

第 24 届 CPHOS 物理竞赛联考（决赛模拟赛）

理论试题参考答案及评分标准

本试题于 2024 年 10 月 09 日 08:00 发布，最后更新于 2024 年 10 月 8 日 21:53。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

答题卡上传

2024/10/9 12:00 - 2024/10/12 18:00

阅卷

2024/10/14 08:00 - 2024/10/18 20:00

非正式成绩

2024/10/19 08:00

成绩申诉

2024/10/19 09:00 - 2024/10/20 12:00

非正式成绩

2024/10/19

一、（40 分）机翼的升力

我们都知道，飞机的机翼之所以能够产生升力，是因为机翼上下表面的不对称导致的上下表面的空气流速不同，从而导致压强不同产生升力。但是还可以从环量的角度解释这个现象。简单起见，我们假设空气是无粘性不可压缩的流体，且为无旋定常流动。

先引入环量的概念： $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$ （默认逆时针方向）。显然，无旋流动中，若闭合曲线包裹区域内处处是流体，环量为零，但是沿着边界的环量积分不一定为零。

在二维问题中，总可以通过保角变换将一个单连通区域变换成圆，而流体所满足的方程又在保角变换下不变。因此，我们可以先计算下面的情况：

考虑二维均匀流速场中固定一个刚性圆柱体，无穷远处流速为 v_0 ，压强为 p_0 ，圆柱体半径为 a ，流体密度为 ρ 。方便起见，统一采用极坐标系，极轴方向为无穷远处流速方向，如图 1.1 所示。

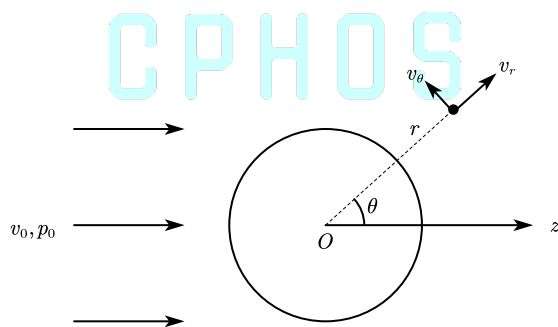


图1.1

（1）先考虑沿着圆柱表面环量 $\Gamma = 0$ 的情况。

（1.1）联想到电磁学中匀强电场中的导体圆柱体，两者在自由空间中的方程相同。先求出原点处的二维电偶极子 \vec{p} 在真空中产生的电场。（偶极子方向沿极轴正方向）

（1.2）根据上问的计算结果，求出圆柱绕流时全空间的流速分布 v_r, v_θ 。

（1.3）求出圆柱体单位长度的受力 \vec{F} 。

（2）再考虑沿着圆柱表面环量 $\Gamma \neq 0$ 的情况。

（2.1）根据法拉利电磁感应定律，有 $\oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ，与环量的定义形式相同。因此可

以将环量看作圆柱内部有变化的磁场。利用叠加原理, 据此求出全空间的流速分布 v_r', v_θ' 。

(2.2) 若是将流体类比为磁场, 根据安培环路定理, 环量还可以类比电流。在类比静磁的情况下重新求出 v_r', v_θ' 。

(2.3) 求出圆柱体单位长度的受力 \vec{F}' 。

(3) 圆可以通过茹科夫斯基变换 $w = \frac{1}{2}(z + \frac{c^2}{z})$ 变换为翼型。由于对应翼型尾部不光滑, 导致间断, 从而可算出尾部会产生正比于 v_0 的环量。由前面的计算结果证明飞机机翼产生的升力正比于 v^2 。(不用具体计算保角变换)

解: (1) (1.1) 假设在 $(\pm \frac{x}{2}, 0)$ 处有源强度 $\pm Q$ 的两点源。 $x \rightarrow 0$ 时, 求出电势

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{\frac{r^2 + \frac{x^2}{4} + rx \cos \theta}{r^2 + \frac{x^2}{4} - rx \cos \theta}} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(1 + \frac{2x}{r} \cos \theta \right) \quad (1)$$

由此可求出电场

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \approx \frac{Qx}{2\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \quad (2)$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \approx \frac{Qx}{2\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta \quad (3)$$

(1.2) 将速度场与电场类比。两者在自由空间中的方程相同, 区别是边界条件不同, 此题中圆柱表面的速度方向沿 $\hat{\theta}$, 而不是 \hat{r} 。

类比电像法, 假设在原点处有大小为 p 的“流偶极子”(偶极子方向沿极轴正方向)。其产生的流场为

$$v_{1r} = \frac{p}{2\pi r^2} \cos \theta \quad (4)$$

$$v_{1\theta} = \frac{p}{2\pi r^2} \sin \theta \quad (5)$$

加上原本的

$$\vec{v}_0 = v_0 (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) \quad (6)$$

完整速度场可以写成

$$\vec{v} = \left(v_0 + \frac{p}{2\pi r^2} \right) \cos \theta \hat{r} + \left(-v_0 + \frac{p}{2\pi r^2} \right) \sin \theta \hat{\theta} \quad (7)$$

考虑 $r = a$ 处的边界条件 $v_r = 0$, 可以得到

$$p = -2\pi a^2 v_0 \quad (8)$$

从而有

$$v_r = v_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (9)$$

$$v_\theta = v_0 \left(-1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta \quad (10)$$

(1.3) 伯努利方程

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{Const} \quad (11)$$

由此求出压强在圆柱表面的分布

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2(1 - 4\sin^2 \theta) \quad (12)$$

由于 $\sin^2 \theta$ 的对称性，可得

$$\vec{F} = 0 \quad (13)$$

（2）（2.1）先考虑只有环量 Γ 而无 v_0 的情况。

对比 $\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 与 $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$ ，在 \vec{E} 与 \vec{v} 类比时， $\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \Gamma$ ，此时空间中的电场为

$$\vec{E}' = \frac{1}{2\pi r} \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \hat{\theta} \quad (14)$$

从而得到

$$\vec{v}_2 = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (15)$$

根据叠加原理，在（1）解得的速度场 \vec{v} 上加上 \vec{v}_2 即可得到（2）所求的 \vec{v}'

$$v'_r = v_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (16)$$

$$v'_\theta = v_0 \left(-1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (17)$$

（2.2）类比静磁时，方程与边界条件和匀强磁场中的超导体圆柱体形式完全相同。根据安培环路定理，该超导体内通有电流

$$I_0 = \Gamma \quad (18)$$

与（1）问一样，先算出二维磁偶极子（两束大小相同，方向相反的电流）的磁场。

假设在 $(\pm \frac{x}{2}, 0)$ 处分别有垂直于纸面向里与向外的电流 I ，在 $x \rightarrow 0$ 时

$$B_{1r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{x \sin \theta}{r^2 - 2xr \cos \theta + x^2} + \frac{x \sin \theta}{r^2 + 2xr \cos \theta + x^2} \right) \approx \frac{\mu_0 I x \sin \theta}{\pi r^2} \quad (19)$$

$$B_{1\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-\frac{r - x \cos \theta}{r^2 - 2xr \cos \theta + x^2} + \frac{r + x \cos \theta}{r^2 + 2xr \cos \theta + x^2} \right) \approx -\frac{\mu_0 I x \cos \theta}{\pi r^2} \quad (20)$$

可以发现，若此时采用“磁像法”，磁像为原点处垂直于极轴的磁偶极子 $M = Ix$ 与垂直于纸面像外的电流 I_0 。

有圆柱表面的边界条件 $B_r = 0$ 可得

$$M = \frac{1}{\mu_0} \pi a^2 v_0 \quad (21)$$

磁像 I_0 产生的磁场为

$$\vec{B}_2 = \frac{I_0}{2\pi r} \hat{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\theta} \quad (22)$$

从而总磁场（速度场）为

$$v'_r = B_r = B_{1r} + v_0 \cos \theta = v_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad (23)$$

$$v'_\theta = B_\theta = B_{1\theta} + B_{2\theta} - v_0 \sin \theta = v_0 \left(-1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (24)$$

与（2.1）结果相同。

（2.3）再利用伯努利方程，得

$$p' = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 \left(1 - 4\sin^2 \theta + \frac{2\Gamma \sin \theta}{\pi a v_0} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2 v_0^2} \right) \quad (25)$$

只有 $\frac{2\Gamma \sin \theta}{\pi a v_0}$ 这一项会产生垂直于极轴方向的升力。

$$F' = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \rho v_0^2 \frac{2\Gamma \sin \theta}{\pi a v_0} a d\theta \sin \theta = \rho v_0 \Gamma \quad (26)$$

(3) 经过保角变换, $F'' = \alpha \rho v_0 \Gamma$, α 为一与机翼形状有关的系数。
又由于 $\Gamma \propto v_0$, 可以得到 $F'' \propto v_0^2$, 证毕。

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 18 分: (4) (5) (6) 式各 4 分, 其余式子各 2 分;

第 (2) 问 18 分: (11) (14) 式各 1 分, 其余式子各 2 分;

第 (3) 问 4 分: 正确说明即可得 4 分。

二、(40 分) 人造地球卫星的运动

本题目旨在推导考虑了地球非球对称效应以后的人造地球卫星的运动。

众所周知, 地球的实际形状并不是圆形, 而是一个较扁的椭球, 这会额外产生一个摄动势 $\Delta V(r, \theta)$, 从而造成地球产生的实际引力势相对点质量引力势的偏离, 进而导致人造地球卫星的轨道的进动。为了更好地描述人造地球卫星由摄动势产生的摄动, 我们将建立一个新的坐标系, 如图 2.1 所示:

其中 Ω 为人造卫星运行平面和地球赤道面的交线 (升交线) 与 x 轴的夹角, i 为卫星运行平面法线与 z 轴夹角, ω 是升交线和离心率矢量的夹角。再设 e 是轨道的离心率, a 是轨道的半长轴, T 是行星运行周期。

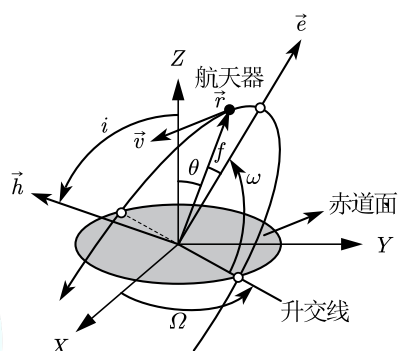


图 2.1 航天器运动示意图

假设有摄动势 ΔV , 此时上面所给的参量将不再是常量, 但是认为它们产生显著变化的时间 $\tau \gg$ 卫星运动的周期 T , 可以得到方程:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \Delta V}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Delta V}{\partial i}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \Delta V}{\partial i}$$

其中 $n = \frac{2\pi}{T}$ 。

(1) 假设地球的质量是 M , 半径是 R , 假设地球仍然关于 z 轴轴对称, 试证明摄动势的形式:

$$\Delta V(r, \theta) = -\frac{GMJR^2}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

其中 J 是一个只由地球的形状决定的常量。

提示: 轴对称情况下的拉普拉斯方程通解为:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n r^n + b_n r^{-n-1}] P_n(\cos \theta)$$

其中 $P_n(x)$ 为第 n 阶勒让德函数, 有 $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$ 。

(2) 将第 (1) 问求出的摄动势代入摄动方程, 求出 $\dot{\omega}$ 和 $\dot{\Omega}$ 。并且可以发现对于某个 i 使得椭圆轨道不存在进动 (ω 不变), 求出这个临界角 i_c , 这个轨道称为 Molnya 轨道。

提示：由于我们只关注 ω 和 Ω 的长期变化，可以将摄动势在卫星的多个运行周期求平均。

数学公式：横线表示对卫星的多个运行周期求平均。

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 = \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(3) 设地球卫星轨道的倾角为 30° ，近地点高度和远地点高度分别为 $h_m = 161\text{km}$ 和 $h_M = 837\text{km}$ ，忽略大气阻力，求出 $\dot{\omega}$ 和 $\dot{\Omega}$ 。(地球半径 $R = 6371\text{km}$, $J = 1.825 \times 10^{-3}$)

解：(1) 已知真空中的引力势 V 是拉普拉斯方程的解

$$\nabla^2 V(r, \theta) = 0 \quad (1)$$

由于系统的旋转对称性， V 只与 r, θ 有关，通过分离变数法解此偏微分方程：

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos \theta) \right] \quad (2)$$

其中 J_n 为常数， $P_n(\cos \theta)$ 为第 n 个勒让德多项式。两边同时乘以 $P_n(\cos \theta)$ 并从0积分到 2π ，利用勒让德多项式的正交性：

$$J_n \propto \int_0^{2\pi} V P_n(\cos \theta) d\theta \quad (3)$$

注意到 V 是 θ 的偶函数，因此所有奇数项为0，将(2)式中级数保留到最低非零项：

$$V(r, \theta) = \frac{GM}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_2(\cos \theta) \right] \quad (4)$$

将 $P_2(\cos \theta)$ 的形式带入其中，并令 $J_2 = J$ ，于是有摄动项表达式近似为：

$$\Delta V(r, \theta) = -\frac{GMJR^2}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

得证

(2) 由几何关系：

$$\cos \theta = \sin(\omega + f) \sin i \quad (6)$$

带入(5)式：

$$\Delta V(r, \theta) = -\frac{GMJR^2}{r^3} \left(\frac{3}{2} \sin^2(\omega + f) \sin^2 i - \frac{1}{2} \right)$$

利用 $\sin^2(\omega + f) = [1 - \cos 2(\omega + f)]/2$ ，得

$$\Delta V(r, \theta) = -\frac{GMJR^2}{r^3} \left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{3}{4} \sin^2 i \cos 2(\omega + f) - \frac{1}{2} \right) \quad (7)$$

由于我们只关心长期变动，将摄动势在卫星的多个运行周期中求平均，容易看出周期项在长时间平均下为零

$$\overline{\Delta V(r, \theta)} = -GMJR^2 \overline{\left(\frac{1}{r^3}\right)} \left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) = -\frac{GMJR^2}{a^3(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) \quad (8)$$

由此可得：

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial e} = -\frac{3eGMJR^2}{4a^3(1-e^2)^{\frac{5}{2}}} (3 \sin^2 i - 2) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial i} = -\frac{3GMJR^2}{2a^3(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \sin i \cos i \quad (10)$$

将 (8) 式带入摄动方程中, 就得到了卫星的摄动方程:

$$\dot{\omega} = \frac{3\pi}{2T} \cdot \frac{JR^2}{a^2(1-e^2)^2} (4 - 5 \sin^2 i) \quad (11)$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{3\pi}{T} \cdot \frac{JR^2}{a^2(1-e^2)^2} \cos i \quad (12)$$

观察 $\dot{\omega}$ 的表达式可以得出, 当

$$\sin i_c = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad (13)$$

时, 轨道不存在进动

(3) 卫星的轨道近似为椭圆, 注意到几何关系:

$$a(1-e) = R + h_m$$

$$a(1+e) = R + h_M$$

解得

$$a = \frac{2R + h_m + h_M}{2} = 6877 \text{ km} \quad (14)$$

$$e = \frac{h_M - h_m}{2R + h_m + h_M} = 0.04915 \quad (15)$$

又有

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = 1.1071 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$$

最后得到:

$$\dot{\omega} = 2.1366 \times 10^{-6} \text{ rad/s} \quad (16)$$

$$\dot{\Omega} = -1.3457 \times 10^{-6} \text{ rad/s} \quad (17)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 14 分: (1) (3) (4) 式各 2 分, (2) (5) 式各 4 分;

第 (2) 问 20 分: (6) (7) (9) (10) 式各 2 分, (8) (11) (12) (13) 式 3 分;

第 (3) 问 6 分: (14) (15) 式各 1 分, (16) 式和 (17) 式 2 分。

三、(60 分) 悬挂电缆线

考虑一根原长为 l 的电缆线, 电缆线视为直径为 d 的长圆柱, 其材料的杨氏模量为 E , 密度为 ρ , 电导率为 σ , 两端固定在间距也为 l 、高为 h 的两竖直杆的上端, 两杆下端固定在大地上, 满足 $d \ll h \ll l$, 大地视为无限大理想良导体, 如图 3.1 所示。本题无需考虑形变对电流传输的影响, 不考虑相对论效应。重力加速度为 g 。

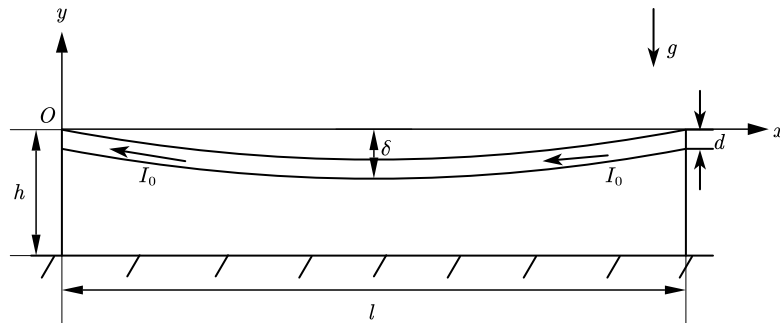


图 3.1 电缆线的示意图

请在答题卡第 3 页作答第 (1) (2) 两问

(1) 大地由于具有较高的电导率, 对电磁场具有趋肤效应, 设大地表面的电场仅有法向分量, 磁感应强度均仅有切向分量。不考虑形变, 写出导线单位长度的电阻 R , 并求出单位长度电缆与大地间形成的等效电容 C 与等效电感 L 。在接下来的小问中, 假设 R, L, C 均保持不变。

(2) 本问考虑直流电流使电缆发生的微小的形变。根据伯努利——欧拉定理, 梁上某点的力偶矩为 $\tau = \frac{EI}{R_0}$, R_0 为梁中性面的曲率半径, I 为惯量矩。已知对于圆柱, 其横截面的惯量矩

$I = \int_S z^2 dS = \frac{1}{64} \pi d^4$ 。现使电缆从右往左通过稳恒电流 I_0 , 求解电缆最低点相对两端下降的高度 δ 的表达式以及其数值并保留三位有效数字。假设 $\delta \ll h$, 可以利用以下给定数据进行适当的近似。

数据: (仅限本问使用)

$$h = 1\text{m}, l = 10\text{m}, d = 0.1\text{m}, \sigma = 5.7 \times 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}, \\ E = 1.5 \times 10^{11} \text{Pa}, I_0 = 4 \times 10^4 \text{A}, \rho = 7.13 \text{g/cm}^3, g = 9.8 \text{m/s}^2$$

请在答题卡第4页作答第(3)(4)两问

(3) 本问考察交流信号在电缆线上的传输。不考虑电缆线发生的微小形变, 于电缆右端加交流电动势 $U = U_m \cos \omega t$, 左端保持零电势, 为便于计算, 使用复数形式 $U = U_m e^{-j\omega t}$ 。以左端为坐标原点, 向右为正方向建立 x 轴, 足够长时间后电缆线上存在复电势分布 $u(x, t)$ 与复电流分布 $i(x, t)$ 。本问可直接使用 (1) 问中的 R, L, C 参量。

(3.1) 求 $u(x, t)$ 与 $i(x, t)$ 满足的微分方程组, 并利用边界条件求出 $u(x, t)$ 的表达式。为使解答更简洁, 本小问可以使用换元: ($j^2 = -1$)

$$\alpha = - \left[\frac{CL\omega^2}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} + j \left[\frac{CL\omega^2}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

(3.2) 求出此时信号在电缆上的传播速度。并在 $R = 0$ 下重新求解传播速度。

(4) 接 (2) (3) 问, 本问考虑交流电对电缆线产生形变的影响。假设梁上的每一点仅发生竖直方向的微小位移。

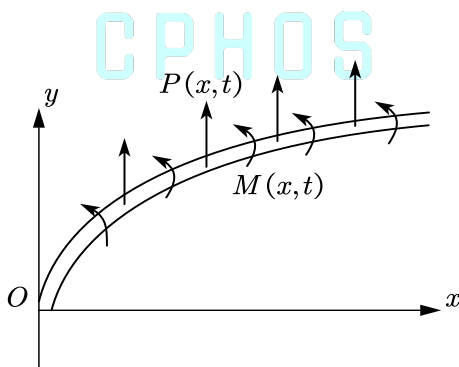


图3.2 微震动下的电缆

(4.1) 考虑电缆线的横向微振动。设线上各点位移用 $y(x, t)$ 描述, 单位长度所受外力与外力矩用 $P(x, t)$ 与 $M(x, t)$ 表示, 如图 3.2 所示。杆横截面切向内力与内力矩分布用 $Q(x, t)$ 与 $\tau(x, t)$ 表示, 求出杆上各点满足的动力学方程与力矩平衡方程。方程中请代入 $\tau(x, t)$ 的具体表达式。

(4.2) 在自由条件下, 有 $P(x, t) = 0, M(x, t) = 0$, 写出 $y(x, t)$ 满足的横向自由振动微分方程。已知方程解的形式为:

$$y(x, t) = (B_1 \cosh Kx + B_2 \sinh Kx + B_3 \cos Kx + B_4 \sin Kx) \cos(\Omega t + \varphi)$$

其中 B_1, B_2, B_3, B_4, K 为常数。求 Ω , 用含 K 的表达式表示。

(4.3) 将电缆线右端与交流电流源连接, 电流源输出电流满足 $i = i_0 \cos \omega t$, 左端断路。假设电缆线电阻很小, 可认为 $R = 0$, 同时 ω 较小使 $l \ll \lambda$, λ 为电缆线上信号传播的特征波

长。仅考虑磁场力与重力。已知在适当的近似下 $P(x, t)$ 为 x 的多项式, 求出此时 $P(x, t)$ 的表达式, 并写出此时的振动方程的特解。(答案中不要引入待定常数)

解: (1) 设电缆均匀带电, 线密度为 $+\lambda$, 其电像为均匀带负电的圆柱, 带电线密度为 $-\lambda$ 。此时电缆的电势为:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{4h-d}{d} \quad (1)$$

$$C = \frac{\lambda}{\varphi} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{4h-d}{d}} \quad (2)$$

再设从电缆上流过电流 I , 则其电像为流过电流为 $-I$ 的导线, 磁通为:

$$\Phi = \int_{\frac{d}{2}}^{2h-\frac{d}{2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{4h-d}{d} \quad (3)$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{4h-d}{d} \quad (4)$$

$$R = \frac{4}{\sigma\pi d^2} \quad (5)$$

(注: 答案中的 $4h-d$ 写为 $4h$ 也算对)

(2) 电缆单位长度受磁场力为:

$$f_1 = -\frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi h} \quad (6)$$

假设电流从右向左流, 以左端为原点, 向右建立 x 轴, 向上建立 y 轴。导线上的电势分布为:

$$\varphi(x) = I_0 R x = \frac{4}{\sigma\pi d^2} I_0 x + \varphi_0 \quad (7)$$

带电线密度为:

$$\lambda(x) = C\varphi(x) = \frac{8\epsilon_0 I_0 x}{\sigma d^2 \ln \frac{4h-d}{d}} \quad (8)$$

由于 $l \gg h$, 可认为电缆上 x 处的点所感受到的电场为带电线密度为 $-\lambda(x)$ 的无限长圆柱产生的电场。则单位长电缆受电场力为:

$$f_2 = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 \cdot 2h} = \frac{16\epsilon_0 I_0^2 x^2}{\pi h \sigma^2 d^4 \left(\ln \frac{4h-d}{d}\right)^2} \quad (9)$$

单位长度受合力为:

$$f = \frac{1}{4} \rho g \pi d^2 - \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi h} + \frac{16\epsilon_0 I_0^2}{\pi h \sigma^2 d^4 \left(\ln \frac{4h-d}{d}\right)^2} x^2 \quad (10)$$

对数量级进行大致估算:

$$\frac{1}{4} \rho g \pi d^2 - \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi h} \sim 10^2, \quad \frac{16\epsilon_0 I_0^2}{\pi h \sigma^2 d^4 \left(\ln \frac{4h-d}{d}\right)^2} l^2 \sim 10^{-12} \quad (11)$$

则电场力部分完全可以忽略。

两端的支持力为:

$$N_L = N_R = \left(\frac{1}{4} \rho g \pi d^2 - \frac{\mu_0 I_0^2}{4 \pi h} \right) \cdot \frac{1}{2} l \quad (12)$$

由于形变很小, 有:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \approx y'' \quad (13)$$

对 x 点处的力矩平衡方程为:

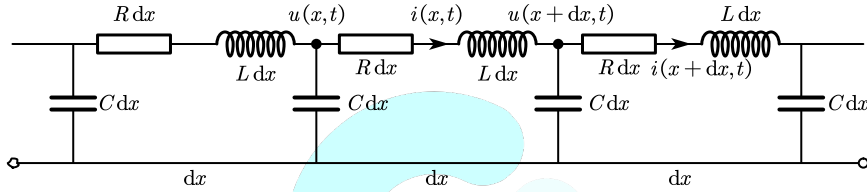
$$EI y'' = \frac{1}{64} E \pi d^4 y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \rho g \pi d^2 - \frac{\mu_0 I_0^2}{4 \pi h} \right) (lx - x^2) \quad (14)$$

由边界条件 $y(0) = y(l) = 0$, 积分得:

$$y(x) = \frac{32}{E \pi d^4} \left(\frac{1}{4} \rho g \pi d^2 - \frac{\mu_0 I_0^2}{4 \pi h} \right) \left(\frac{1}{6} lx^3 - \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{12} l^3 x \right) \quad (15)$$

$$\delta = -y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5l^4}{24 E d^4} \left(\rho g d^2 - \frac{\mu_0 I_0^2}{\pi^2 h} \right) = 0.0688 \text{ m} \quad (16)$$

(3) (3.1) 等效电路图如图:



答图3.1 电缆与大地组成的电路

存在关系式:

$$u(x, t) = \frac{\lambda(x, t)}{C} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \quad (18)$$

$$Ri(x, t) + L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (19)$$

即:

$$\begin{cases} C \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} \\ Ri(x, t) + L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \end{cases} \quad (20)$$

边界条件为:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = U_m e^{-j\omega t} \end{cases} \quad (21)$$

于(20)式中消去 $u(x, t)$:

$$L \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + R \frac{\partial i}{\partial t} - \frac{1}{C} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0 \quad (22)$$

设试探解: $i(x, t) = i_0 e^{\alpha x} e^{-j\omega t}$

$$\alpha^2 = -CL\omega^2 - iCR\omega \quad (23)$$

α 为一复数, 设 $\alpha = -\beta + jk (k > 0)$

$$\begin{cases} k^2 - \beta^2 = CL\omega^2 \\ 2k\beta = CR\omega \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} k = \left[\frac{CL\omega^2}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \beta = \left[\frac{CL\omega^2}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (25)$$

则 $u(x, t) = (u_1 e^{\alpha x} + u_2 e^{-\alpha x}) e^{-j\omega t}$, 与边界条件联立:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = 0 \\ u_1 e^{\alpha l} + u_2 e^{-\alpha l} = U_m \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} u_1 = \frac{U_m}{e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}} \\ u_2 = \frac{-U_m}{e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}} \end{cases} \quad (27)$$

$$u(x, t) = U_m \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}} e^{-j\omega t} \quad (28)$$

其中

$$\alpha = - \left[\frac{CL\omega^2}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} + j \left[\frac{CL\omega^2}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

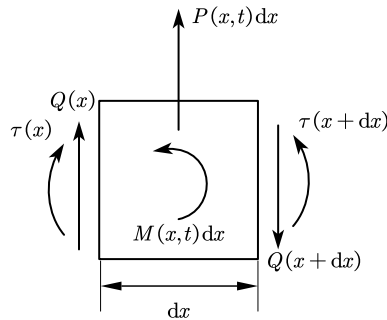
(3.2) 信号传播的速度为群速:

$$\begin{aligned} v_g = \frac{d\omega}{dk} &= \frac{[2(\sqrt{C^2 L^2 \omega^4 + C^2 R^2 \omega^2} + CL\omega^2)]^{\frac{1}{2}}}{\frac{C^2 L^2 \omega^3 + \frac{1}{2} C^2 R^2 \omega}{\sqrt{C^2 L^2 \omega^4 + C^2 R^2 \omega^2}} + CL\omega} \\ &= \frac{\left[2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2} + 1 \right) \left(1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 + \sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{CL}} \end{aligned} \quad (29)$$

代入 $R = 0$:

$$v_g = \frac{1}{\sqrt{CL}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \quad (30)$$

(4) (4.1)



答图3.2 电缆微元的受力分析

动力学方程与力矩平衡方程为:

$$P(x, t) - \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = \frac{\rho \pi d^2}{4} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \tau(x, t)}{\partial x} + M(x, t) = Q(x, t) \quad (32)$$

$$\text{代入 } \tau(x, t) = \frac{EI}{R_0} = \frac{1}{64} E \pi d^4 y''$$

$$\frac{1}{64} E \pi d^4 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + M(x, t) = Q(x, t) \quad (33)$$

(4.2) 消去 $Q(x, t)$:

$$\frac{\rho \pi d^2}{4} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{1}{64} E \pi d^4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = P(x, t) - \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

边界条件为:

$$y(0, t) = y(l, t) = 0 \quad (35)$$

$$\Omega = \frac{K^2 d}{4} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (36)$$

(4.3) 此时电路方程为:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{1}{LC} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0 \quad (37)$$

边界条件为:

$$\begin{cases} i(0, t) = 0 \\ i(l, t) = i_0 \cos \omega t \end{cases} \quad (38)$$

由于 ω 较小, 电缆上的电流沿 x 的分布近似是线性的:

$$i(x, t) \approx \frac{i_0 x}{l} \cos \omega t \quad (39)$$

由于 $l \gg h$, 电缆上各点的磁场近似视为无限长载流直导线产生:

$$B(x, t) \approx \frac{\mu_0 i}{4\pi h} = \frac{\mu_0 i_0 x}{4\pi h l} \cos \omega t \quad (40)$$

$$P(x, t) = \frac{\mu_0 i_0^2 x^2}{4\pi h l^2} \cos^2 \omega t - \frac{1}{4} \rho g \pi d^2 \quad (41)$$

振动方程为:

$$\frac{\rho \pi d^2}{4} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{1}{64} E \pi d^4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\mu_0 i_0^2}{4\pi h l^2} x^2 \cos^2 \omega t - \frac{1}{4} \rho g \pi d^2 \quad (42)$$

有特解:

$$y(x, t) = \frac{8\mu_0 i_0^2}{45E\pi^2 d^4 h l^2} x^6 - \frac{2\rho g}{3Ed^2} x^4 - \frac{\mu_0 i_0^2}{8\pi^2 \rho d^2 h l^2 \omega^2} x^2 \cos 2\omega t \quad (43)$$

评分标准: 本题满分 60 分。

第 (1) 问 6 分: (2) (4) (5) 式各 2 分;

第 (2) 问 18 分: (6) (9) (11) (12) (14) (15) 式各 2 分, (10) (16) 式各 3 分;

第 (3) 问 20 分:

第 (3.1) 问 14 分: (21) (22) (23) (26) (28) 式各 2 分, (20) 式 4 分;

第 (3.2) 问 6 分: (30) 式 2 分, (29) 式 4 分;

第 (4) 问 16 分:

第 (4.1) 问 4 分: (31) (33) 式各 2 分;

第（4.2）问 4 分：（34）（36）式各 2 分；

第（4.3）问 8 分：（39）（41）（42）（43）式各 2 分。

四、（40分）光分支流现象

波在一个关联长度比波长大的弱无序势中传播时，会持续出现分支现象，即分支流（branched flow）。2001 年，美国哈佛大学 M. Topinka 等人在二维电子气中发现了分支流现象，2010 年，德国马尔堡菲利普斯大学 R. Höhmann 等人在微波腔中发现了微波的分支现象，2020 年，以色列理工学院 A. Patsyk 等人首次报道了光的分支流现象：一束激光射入肥皂膜内部的夹层时，不会像原来在空气中一样沿直线传播，而是会产生分支现象。激光束就像从树干中衍生出树枝一样，多次分岔，在肥皂膜内扩散，形成许多的分支。并且这种分支并不是固定不变的，而是会随时间无序且随机地快速变化。造成激光不沿直线传播，而是改变路径产生分支的原因就在于光的传播介质——肥皂膜的厚度分布无序且随机。肥皂膜厚度在空间上的无序与随机性就导致了空间各点膜内有效折射率的随机分布，造成了光的偏折与分支，肥皂膜厚度分布的时间随机性则是光分支随机快速变化的原因。研究团队将激光束耦合到肥皂膜上。他们发现，当光在肥皂膜中传播而不是被散射时，光会形成细长的分支，从而形成光的分支流现象。

对于在空气中稳定存在的肥皂膜，肥皂膜内部的折射率为肥皂溶液的折射率，肥皂膜外部的折射率为空气折射率。在本题的模型中，假设全空间折射率分布为：

$$n(x, y, z) = \begin{cases} 1, & |z| > d(x, y)/2 \\ n, & |z| < d(x, y)/2 \end{cases}$$

设磁导率 $\mu = \mu_0$ 且不考虑色散。肥皂膜的厚度 $d(x, y)$ 在波长量级且在波长范围内几乎为常量。本题研究 $d(x, y)$ 的变化尺度为百微米量级。

麦克斯韦方程组为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

在均匀介质中电磁波的传播遵循亥姆霍兹方程：

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \nabla^2 \psi + \mu \epsilon \omega^2 \psi = 0$$

其中 ψ 是电场或磁场在任意方向上的振幅， ω 是电磁波角频率。本题考虑角频率为 ω 的单色电磁波。

在空间中只可能存在两种电磁波的叠加，一种是类似 F-P 腔的多光束干涉，另一种是束缚在肥皂膜内以及附近传播的，光的分支流现象对应后者。显然束缚在肥皂膜附近的电磁波，在 z 方向上是驻波，而沿 xy 平面方向可以传播行波。电磁波有两种偏振，由于沿 xy 平面方向传播行波，可以选取一种偏振为 $E_z = 0$ ，另一种偏振为 $H_z = 0$ 。在第一种波内，电场是纯横向的（相对波矢），记作 TE 波，在第二种波内，磁场是纯横向的，记作 TM 波。

为了寻求束缚在肥皂膜附近电磁波的解，现在采用分离变量法，设 $\psi(x, y, z) = \sum_i a_i \Psi_i(x, y) G_i(z)$ ， a_i 是任意复常数。其中对于 TE 波 $\psi = E$ ，对于 TM 波 $\psi = H$ ，对于不同的 i 称作电磁波的不同模式（如果比值 $G_i(z)/G_j(z)$ 为复常数，则称 i 和 j 为一个模式）。以下电磁场 E, H 的分量均指复振幅。

对于 TE 波, $E_x = \sum_i a_i A_i(x, y) G_i(z)$, $E_y = \sum_i a_i B_i(x, y) G_i(z)$ 。由于 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 及 $E_z = 0$, 所以 $\frac{\partial A_i}{\partial x} + \frac{\partial B_i}{\partial y} = 0$, 可以设 $A_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}$, $B_i = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}$; 对于 TM 波, $H_x = \sum_i a_i C_i(x, y) G_i(z)$, $H_y = \sum_i a_i D_i(x, y) G_i(z)$, 同理可以设 $C_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}$, $D_i = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}$ 。



图4.1 光的分支流实验

(1) 分别对于 TE 波和 TM 波写出 $\Phi_i(x, y)$ 满足的微分方程, 不必求解。

提示: 考虑亥姆霍兹方程和电磁场的边界条件。

(2) 分别对于 TE 波和 TM 波求解所有可能的电磁波模式个数。

(3) 证明: 全空间电场总能量平均值等于全空间磁场总能量平均值。

提示: $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$, $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$

以下考虑光束在肥皂膜中的传播。由于波长远小于厚度变化的尺度, 考虑几何光学近似。

(4) 证明: 在几何光学近似下, 对于每一个模式, $\Phi_i(x, y)$ 等价于光线在第 i 个二维等效折射率分布中的轨迹。

(5) 证明: 在几何光学近似下, 对于每一个模式, $\Phi_i(x, y)$ 等价于经典粒子在第 i 个二维势场中的运动轨迹。

(6) 为了直观地理解光的分支流, 下面考虑厚度分布:

$$d(x, y) = \begin{cases} d, & x^2 + y^2 > R^2 \\ d + (1 - (x^2 + y^2)/R^2)\Delta, & x^2 + y^2 < R^2 \end{cases}$$

其中 R 为毫米量级且 $|\Delta| \ll d$ (规定有效折射率的平方保留 Δ 的一阶项)。一束单色激光在点 $(-2R, R \sin \theta, 0)$ 耦合到肥皂膜上并沿 $+x$ 方向传播, 在几何光学近似下求解 $\Phi_i(x, y)$ 对应的轨迹, 并画出 $\Delta > 0$ 对应的草图。

提示: 可以使用参数方程。

解: (1) 对于 TE 波, 考虑第 i 个模式, 将 $E_x = A_i(x, y) G_i(z)$, $E_y = B_i(x, y) G_i(z)$ 代入亥姆霍兹方程得到:

$$\frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A_i = -\frac{1}{G_i} \frac{d^2}{dz^2} G_i - n^2 k^2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{B_i} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) B_i = -\frac{1}{G_i} \frac{d^2}{dz^2} G_i - n^2 k^2 \quad (2)$$

其中 $k = \frac{\omega}{c}$ 。

由于 $d(x, y)$ 在波长量级且在波长范围内几乎为常量, 所以 $n(x, y, z)$ 近似与 x, y 无关。由于上式左边不显含 z 、右边不显含 x, y , 所以两边都为常数:

$$\frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A_i = \frac{1}{B_i} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) B_i = -\frac{1}{G_i} \frac{d^2}{dz^2} G_i - n^2 k^2 = \text{Const.} = -n_i^2 k^2 \quad (3)$$

代入 $A_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}$, $B_i = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}$, 考虑到 $n(x, y, z)$ 近似与 x, y 无关, 得到:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi_i + n_i^2 k^2 \Phi_i = 0 \quad (4)$$

$$G_i(z) = \begin{cases} a e^{-\sqrt{n_i^2 - 1} k (z - \frac{d}{2})}, & z > \frac{d}{2} \\ b \cos \left(\sqrt{n^2 - n_i^2} k z + \phi \right), & |z| < \frac{d}{2} \\ c e^{\sqrt{n_i^2 - 1} k (z + \frac{d}{2})}, & z < -\frac{d}{2} \end{cases} \quad (5)$$

下面给出自设参数 n_i 满足的方程

由麦克斯韦方程组得到:

$$\vec{B} = -\frac{j}{\omega} \nabla \times \vec{E} = \frac{j}{\omega} (B_i G'_i \hat{x} - A_i G'_i \hat{y} + (A_{i,y} - B_{i,x}) G_i \hat{z}) \quad (6)$$

其中 j 是虚数单位。

由电磁场边界条件, 在 $z = \pm \frac{d}{2}$ 面上切向电场强度、磁场强度连续, 代入得到:

$$G_i \left(\pm \frac{d}{2} + 0 \right) = G_i \left(\pm \frac{d}{2} - 0 \right), G'_i \left(\pm \frac{d}{2} + 0 \right) = G'_i \left(\pm \frac{d}{2} - 0 \right) \quad (7)$$

代入解得:

$$\sqrt{n^2 - n_i^2} k d = q\pi + 2 \arctan \sqrt{\frac{n_i^2 - 1}{n^2 - n_i^2}} \quad (8)$$

其中 q 为整数。由于 n_i 在 $[1, n]$ 上有不超过一个根, 所以可以取 $q = i$ 。

对于 TM 波, 考虑第 i 个模式, 将 $H_x = C_i(x, y) G_i(z)$, $H_y = D_i(x, y) G_i(z)$ 代入亥姆霍兹方程, 同理有 (1) ~ (5) 式。由麦克斯韦方程组得到:

$$\vec{E} = \frac{j}{\omega \epsilon_0 n^2} \nabla \times \vec{H} = \frac{j}{\omega \epsilon_0 n^2} (-D_i G'_i \hat{x} + C_i G'_i \hat{y} + (D_{i,x} - C_{i,y}) G_i \hat{z}) \quad (9)$$

由电磁场边界条件, 在 $z = \pm \frac{d}{2}$ 面上切向电场强度、磁场强度连续, 代入得到:

$$G_i \left(\pm \frac{d}{2} + 0 \right) = G_i \left(\pm \frac{d}{2} - 0 \right), G'_i \left(\pm \frac{d}{2} \pm 0 \right) = \frac{1}{n^2} G'_i \left(\pm \frac{d}{2} \mp 0 \right) \quad (10)$$

代入解得:

$$\sqrt{n^2 - n_i^2} k d = q\pi + 2 \arctan \left(n^2 \sqrt{\frac{n_i^2 - 1}{n^2 - n_i^2}} \right) \quad (11)$$

其中 q 为整数。由于 n_i 在 $[1, n]$ 上有不超过一个根, 所以可以取 $q = i$ 。

【 $G_i(z)$ 的求解类似于量子力学的一维有限深势阱的求解, 其中散射态具有连续能量, 束缚态具有离散能量。】

(2) 下面固定 d 计算 n_i 存在的条件。由 (5) (7) (10) 式得到: n_i 不能取 1 或 n 。令 $f_i(t) = \sqrt{n^2 - t^2} k d - i\pi - 2 \arctan \sqrt{\frac{t^2 - 1}{n^2 - t^2}}$, $g_i(t) = \sqrt{n^2 - t^2} k d - i\pi - 2 \arctan \left(n^2 \sqrt{\frac{t^2 - 1}{n^2 - t^2}} \right)$, 则 f_i 和 g_i 在 $(1, n)$ 上各有不超过一个根。

由于 $f_i(1) = g_i(1) = \sqrt{n^2 - 1}kd - i\pi$, $f_i(n) = g_i(n) = -i\pi - \pi$, 所以 n_i 存在的条件为 $\sqrt{n^2 - 1}kd - i\pi > 0 > -i\pi - 1$, 即 $0 \leq i < \sqrt{n^2 - 1}kd/\pi$ 。

所有可能的电磁波模式个数分别为:

$$N_{TE} = N_{TM} = \left\lfloor \frac{\sqrt{n^2 - 1}kd}{\pi} \right\rfloor \quad (12)$$

注意 $N_{TE} = N_{TM}$ 可能随 d 变化。

(3) 全空间电场总能量平均值和全空间磁场总能量平均值的差为:

$$\Delta W = \int \left(\frac{\epsilon_0 n^2 |\vec{E}|^2}{4} - \frac{|\vec{B}|^2}{4\mu_0} \right) dV = \frac{\epsilon_0}{4k^2} \int \left(n^2 k^2 |\vec{E}|^2 - |\nabla \times \vec{E}|^2 \right) dV \quad (13)$$

由亥姆霍兹方程得到:

$$0 = \int \vec{E}^* \cdot (\Delta \vec{E} + n^2 k^2 \vec{E}) dV = \int \left(n^2 k^2 |\vec{E}|^2 + \vec{E}^* \cdot \Delta \vec{E} \right) dV$$

由提示:

$$\nabla \cdot (\vec{E}^* \times (\nabla \times \vec{E})) = |\nabla \times \vec{E}|^2 - \vec{E}^* \cdot (\nabla \times (\nabla \times \vec{E})) = |\nabla \times \vec{E}|^2 + \vec{E}^* \cdot \nabla^2 \vec{E}$$

由高斯定理:

$$\int \left(|\nabla \times \vec{E}|^2 + \vec{E}^* \cdot \nabla^2 \vec{E} \right) dV = \oint (\vec{E}^* \times (\nabla \times \vec{E})) \cdot d\vec{S} \quad (14)$$

积分区域取球心在原点、半径为 r 的球, 令 $r \rightarrow \infty$, 则 $|\vec{E}| \sim 1/r$ 、 $|\vec{E}^* \times (\nabla \times \vec{E})| \sim 1/r^3$ 、等号右边 $\sim 1/r \rightarrow 0$ 。于是:

$$\Delta W = \frac{\epsilon_0}{4k^2} \int \left(n^2 k^2 |\vec{E}|^2 + \vec{E}^* \cdot \nabla^2 \vec{E} \right) dV = 0 \quad (15)$$

【注 1: $|\vec{E}| \sim 1/r$ 可以通过以下方式得到: 设时间 $t \leq 0$ 全空间电磁场为零, 令 $r \rightarrow \infty$, 则 (全空间的电磁场能量) $\sim \int |\vec{E}|^2 dV \sim (\text{光源功率} \times t) \sim r$ 。

注 2: 反常积分 $\int (\epsilon_0 n^2 |\vec{E}|^2 / 4 + |\vec{B}|^2 / 4\mu_0) dV$ 并不收敛, 其中 \vec{E} 和 \vec{B} 分别是求解亥姆霍兹方程得到的稳态 ($t = \infty$) 场量复振幅。】

(4) 由 (8) (11) 式得到 n_i 是坐标 x, y 的函数。由 (4) 式及亥姆霍兹方程得到 $\Phi_i(x, y)$ 等价于光线在二维等效折射率分布 $n_i(x, y)$ 中的轨迹。

(5) 下面证明第 i 个二维势场 $V_i(x, y) = -\frac{1}{2}n_i(x, y)^2$, 粒子机械能 $E = 0$ 满足要求。这里只提供最基础的证明。

光线在均匀介质中沿直线传播, 对应于经典粒子在均匀势场中沿直线运动; 下面证明粒子在

$V_i(x, y) = -\frac{1}{2}n_i(x, y)^2$ 中的运动满足折射定律:

考虑光从 n_1 介质折射到 n_2 介质, 入射角和折射角分别为 θ_1, θ_2 , 折射定律为 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ 。

与之对应, 对于粒子有:

$$\begin{cases} \text{能量守恒: } mv_1^2/2 - n_1^2/2 = mv_2^2/2 - n_2^2/2 \\ \text{沿切向动量守恒: } mv_1 \sin \theta_1 = mv_2 \sin \theta_2' \end{cases}$$

解得: $\theta_2' = \theta_2$, 证毕。

(6) 对于 TE 波, 设 n_i 满足方程 $\sqrt{n^2 - n_i^2}kd = i\pi + 2 \arctan \sqrt{\frac{n_i^2 - 1}{n^2 - n_i^2}}$ 。

有效折射率的平方保留 Δ 的一阶项:

$$n_i(x, y)^2 = n_i^2 + \alpha_i \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right), x^2 + y^2 < R^2 \quad (16)$$

其中 $\alpha_i = -\frac{2n_i \sqrt{n^2 - n_i^2} k \Delta}{f'_0(n_i)}$, $f_0(t) = \sqrt{n^2 - t^2}kd - 2 \arctan \sqrt{\frac{t^2 - 1}{n^2 - t^2}}$ 。

对于 TM 波, 设 n_i 满足方程 $\sqrt{n^2 - n_i^2}kd = i\pi + 2 \arctan n^2 \sqrt{\frac{n_i^2 - 1}{n^2 - n_i^2}}$ 。

有效折射率的平方保留 Δ 的一阶项:

$$n_i(x, y)^2 = n_i^2 + \beta_i \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right), x^2 + y^2 < R^2 \quad (17)$$

其中 $\beta_i = -\frac{2n_i \sqrt{n^2 - n_i^2} k \Delta}{g'_0(n_i)}$, $g_0(t) = \sqrt{n^2 - t^2}kd - 2 \arctan n^2 \sqrt{\frac{t^2 - 1}{n^2 - t^2}}$ 。

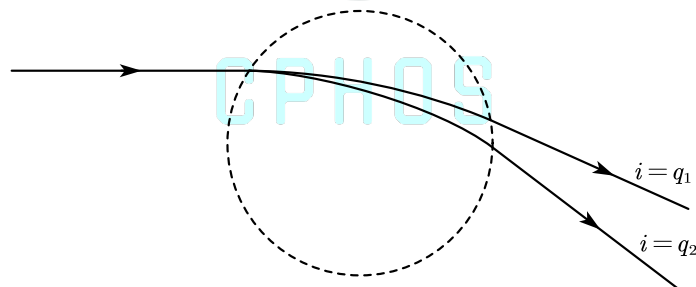
记 $\Omega = \sqrt{\alpha_i}/R$ 或 $\sqrt{\beta_i}/R$ 。由 (5) 问得到粒子的运动方程: (设粒子质量为 1)

$$\ddot{\vec{r}} = -\nabla V = \nabla \frac{1}{2} n^2 = -\Omega^2 \vec{r}, x^2 + y^2 < R^2$$

代入初始条件解得:

$$\vec{r} = \begin{cases} (-R \cos \theta \hat{x} + R \sin \theta \hat{y}) + n_i t \hat{x}, t \leq 0; \\ \frac{n_i}{\Omega} \hat{x} \sin \Omega t + (-R \cos \theta \hat{x} + R \sin \theta \hat{y}) \cos \Omega t, 0 \leq t \leq t_0; \\ \frac{R \cos \theta (n_i^2 + \Omega^2 R^2) \hat{x} + R \sin \theta (n_i^2 - \Omega^2 R^2) \hat{y}}{\sqrt{n_i^4 + 2n_i^2 \Omega^2 R^2 \cos 2\theta + \Omega^4 R^4}} + (t - t_0) \frac{n_i (n_i^2 + \Omega^2 R^2 \cos 2\theta) \hat{x} - n_i \Omega^2 R^2 \sin 2\theta \hat{y}}{\sqrt{n_i^4 + 2n_i^2 \Omega^2 R^2 \cos 2\theta + \Omega^4 R^4}}, t \geq t_0 \end{cases} \quad (18)$$

其中 $t_0 = \frac{1}{\Omega} \arctan \frac{2n_i \Omega R \cos \theta}{n_i^2 - \Omega^2 R^2}$ 。草图如下。



答图 4.1 草图

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 16 分: (4) (5) (7) (10) 式各 2 分, (8) (11) 式各 4 分;

第 (2) 问 2 分: (12) 式 2 分;

第 (3) 问 8 分: (13) (14) (15) 式 2 分, 说明面积分为零 2 分;

第 (4) 问 2 分: 提到 $n_i(x, y)$ 为等效折射率分布 2 分;

第 (5) 问 6 分: 给出势场 2 分, 证明 4 分 (其它方法也给分);

第 (6) 问 6 分: (16) (17) 式各 1 分, (18) 式 2 分, 草图 2 分 (偏转方向正确 2 分)。

五、(40 分) 竞技体操

8 月 5 日, 随着女子自由体操决赛金牌的决出, 2024 年巴黎奥运会中竞技体操的所有比赛正式落下帷幕。在此次比赛中, 中国竞技体操队的健儿们争金夺银, 他们顶着伤病、在赛

场上奋力拼搏的身影成为赛场上一道亮丽的风景线。本题拟在一定的近似条件下研究与竞技体操相关的物理原理。

（1）大回环——单杠

单杠是男子竞技体操项目之一，且其中的许多技术动作亦会出现在女子体操项目“高低杠”中。大回环是单杠中的一个基本技巧，在做大回环时，运动员身体近似保持笔直，双手伸直，绕水平放置的单杠做圆周运动，如图5.1所示。本小问研究以下这种情况：运动员在此问中，在最高点处由于要完成转体动作而静止，随后身体保持笔直状态，在受到扰动后摆下。实心杠的半径为 r ，长度为 $2a$ ，质量可忽略不计，其杨氏模量 E 很大。将运动员近似为一根铰接在单杠上的质量均匀为 m 、长度为 l 的杆。考虑重力，重力加速度为 g 。

（1.1）试在 $E \rightarrow +\infty$ 的条件下，写出单杠对运动员的支持力 T 随运动员身体与竖直方向夹角 θ 的关系（为便于阅卷，规定 T 的正方向：当它使得单杠有向人体一侧弯曲的倾向时， T 的符号为正）；

（1.2）在实际情况下，运动员在完成大回环时往往会双手握杠。此时，认为运动员双手距离为 $2b$ ，两握点关于单杠的对称轴对称（为便于理解，此时你可以将运动员想象为两根质量均匀为 $\frac{m}{2}$ 、长度为 l 的杆，显然，它们的运动是同步的），如图5.2所示。在本小问中， E 将是一个很大的有限量，你可以使用适当的近似。已知在单杠不受力时，它保持平直。试求与认为单杠不可弯曲的情况相比，考虑单杠弹性后运动员在身体位置处于 θ 处时的角速度的变化量 δ ；

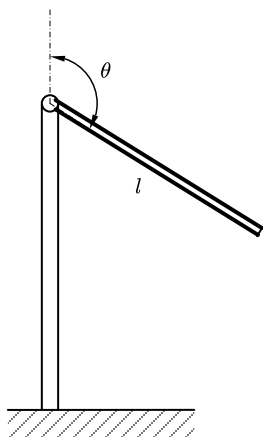


图5.1

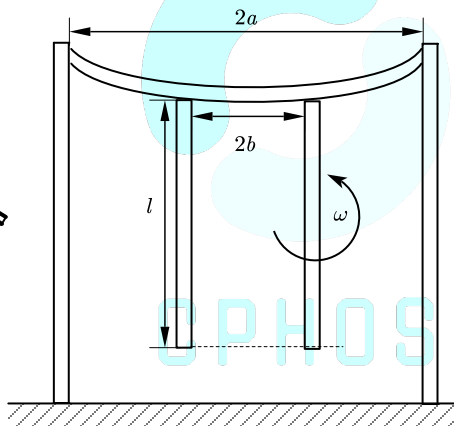


图5.2

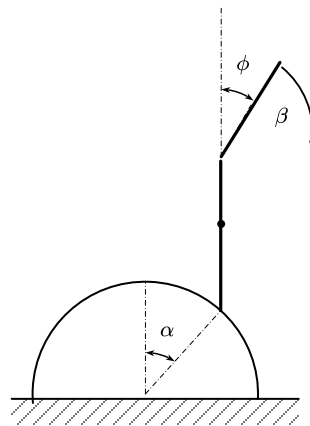


图5.3

（2）如何在圆木上保持平衡——平衡木

平衡木是女子体操动作项目，它需要运动员在一根横木上做出一连串的舞蹈与翻腾动作，是最容易出现失误的体操项目。在巴黎奥运会平衡木上，参与比赛的八位高水平运动员中共有五位摔下了平衡木，其比例比之前的各式大赛都要高上许多。在平衡木决赛中摘银的周雅琴表示，与平时训练中的方木相比，巴黎奥运会组委会采用了圆木。所谓“方”与“圆”，指的是横截面的形状。显然，为了在平衡木上站稳，圆木比之方木对落点准确性的要求更高。本小问拟讨论运动员通过上半身的倾倒来使自身尽可能在圆木上保持平衡的可能性。如图5.3所示，将圆木简化为一个轴线水平的半圆柱，其静摩擦系数为 μ 且可以给人体提供任意大小的力矩；将人体简化为两根长度均为 L 、质量均为 M 的忽略粗细的相连的匀质杆。初始时刻，运动员位置与圆心的连线和竖直方向的夹角为 α ，为保持平衡，运动员下半身保持不动，上半身以角加速度 β 作匀加角速度运动，方向如图所示，上半身在 t 时刻与竖直方向的夹角记为 ϕ 。已知运动员在 ϕ 达到 ϕ_0 之前，无法通过脚步的移动使自己可以在静止状态下保持平衡。作为简化，你需要求解 $0 \leq \phi \leq \phi_0$ 时的平衡条件。试给出此条件，用 $a \leq f(\phi) \leq b$ 的形式表

示，并在 $\mu = \frac{1}{5}$, $\alpha = \frac{\pi}{12}$, $\phi_0 = 0.500\text{rad}$, $g = 9.80\text{m/s}^2$, $L = 0.800\text{m}$ 的条件下给出 β 的取值范围。考虑重力，重力加速度为 g 。

解：（1）（1.1）有人体绕铰接点处的转动惯量为： $I = \frac{1}{3}ml^2$ ，故由能量守恒定律可以写出：

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + mg\frac{l}{2}\cos\theta = mg\frac{l}{2} \quad (1)$$

解得：

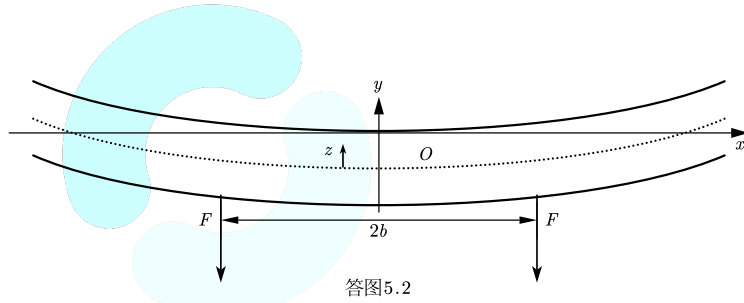
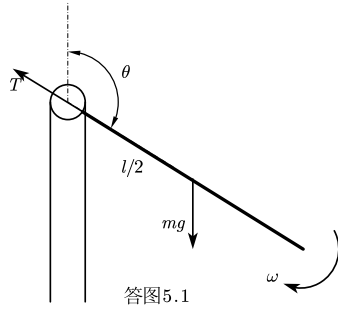
$$\omega = \sqrt{3\frac{g}{l}(1 - \cos\theta)} \quad (2)$$

如答图 5.1 所示，可以列出径向上的受力方程（显然，杆对人体无角向作用力）

$$T + mg\cos\theta = m \cdot \omega^2 \frac{l}{2} \quad (3)$$

故有：

$$T = \frac{mg}{2}(3 - 5\cos\theta) \quad (4)$$



（1.2）先来研究答图 5.2 中杆在 $x = \pm b$ 处受到相同作用力 $F = T/2$ 的情况下的形变及对应的弹性势能：

考察杆上 x 处的圆横截面，对于距中性面为 z 处，有此处受力为：

$$dF = E\varepsilon dS = 2Ez\kappa\sqrt{r^2 - z^2}dz \quad (5)$$

其中 κ 为曲率， ε 为应变。故有 x 处的总力矩为：

$$M = \int_{z=-r}^{z=r} zdF = \frac{\pi}{4}E\kappa r^4 \quad (6)$$

下面计算各 x ($x \geq 0$) 处的力矩以求出曲率，易得：

$$M = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq b \\ F(a-x), & b < x \leq a \end{cases} \quad (7)$$

故可知各 x 处的曲率为：

$$\kappa = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq b \\ \frac{4F}{\pi r^4 E}(a-x), & b < x \leq a \end{cases} \quad (8)$$

此时，可以写出在 (x, z) 处的弹性势能密度为：

$$w = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{1}{2}E\kappa^2 z^2 \quad (9)$$

即可知 x 处厚度为 dx 的薄片的弹性势能为：

$$\begin{aligned}
 dV &= dx \cdot \int_{-r}^r \frac{1}{2} E \kappa^2 z^2 \cdot 2\sqrt{r^2 - z^2} dz \\
 &= dx \cdot \frac{\pi}{8} E \kappa^2 r^4 = dx \cdot \frac{2M^2}{\pi E r^4}
 \end{aligned} \quad (10)$$

将 M 的表达式代入并对 x 积分, 同时考虑到 $F = T/2$, 即得:

$$V = \frac{T^2}{3\pi E r^4} (a - b)^3 \quad (11)$$

再来求由于杆有弹性导致的杆的形变:

在形变量很小的条件下, 有:

$$\kappa \approx \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (12)$$

所以对于 $0 \leq x \leq b$, 有:

$$y'(x) = 0 \quad (13)$$

$$\Delta y(x) = 0 \quad (14)$$

故对于第一段, 有:

$$\Delta y_1 = 0 \quad (15)$$

$$y'(b) = 0 \quad (16)$$

而对于 $b < x \leq a$ 的情况, 有:

$$y'(x) = \frac{4F}{\pi r^4 E} \left(a(x - b) - \frac{x^2 - b^2}{2} \right) \quad (17)$$

故有第二段的形变量为:

$$\Delta y_2 = \frac{2F}{3\pi r^4 E} (a - b)^2 (2a + b) \quad (18)$$

故在拉力 T 的作用下, 杆向人弯曲的长度为:

$$\Delta = \frac{T}{3\pi r^4 E} (a - b)^2 (2a + b) \quad (19)$$

考虑弹性势能和重心位置与 (1.1) 中的差异, 重新列出能量守恒方程:

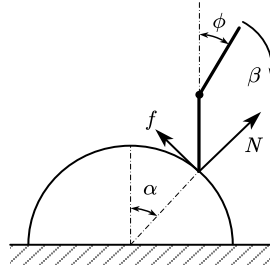
$$\frac{1}{2} I (\omega + \delta)^2 + V(\theta) + mg \cos \theta \left(\frac{L}{2} + \Delta \right) = \text{const} \quad (20)$$

解得:

$$\delta = \frac{mg^2(a-b)}{2\pi E r^4 \sqrt{3gl(1-\cos\theta)}} \cdot \left(-2(2a+b)(4+\cos\theta(3-5\cos\theta)) + (a-b)(4-(5\cos\theta-3)^2) \right) \quad (21)$$

(2) 设支持力为 N , 摩擦力为 f 。显然有 ϕ 处的角速度为:

$$\omega = \sqrt{2\beta\phi} \quad (22)$$



答图5.3

设单根杆的质量为 M , 如答图 5.3 所示列出受力分析:

$$N \cos \alpha + f \sin \alpha - Mg = \frac{ML}{2} (-\beta \sin \phi - \omega^2 \cos \phi) \quad (23)$$

$$N \sin \alpha - f \cos \alpha = \frac{ML}{2} (\beta \cos \phi - \omega^2 \sin \phi) \quad (24)$$

解得:

$$N = 2Mg \cos \alpha + \frac{ML}{2} (\beta \sin(\alpha - \phi) - 2\beta\phi \cos(\alpha - \phi)) \quad (25)$$

$$f = 2Mg \sin \alpha - \frac{ML}{2} (\beta \cos(\alpha - \phi) + 2\beta\phi \sin(\alpha - \phi)) \quad (26)$$

受力平衡的条件为:

$$\left| \frac{f}{N} \right| \leq \mu \quad (27)$$

即:

$$-\mu \leq \frac{k \sin \alpha - \cos(\alpha - \phi) - 2\phi \sin(\alpha - \phi)}{k \cos \alpha + \sin(\alpha - \phi) - 2\phi \cos(\alpha - \phi)} \leq \mu \quad (28)$$

其中: $k = \frac{4g}{L\beta}$, $0 \leq \phi \leq \phi_0$ 。当各数据数值如题目所示时, 可以求出:

$$2.45 \leq k \leq 7.53 \quad (29)$$

即:

$$6.51 \text{rad/s}^2 \leq \beta \leq 20.0 \text{rad/s}^2 \quad (30)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 31 分:

第 (1.1) 小问 5 分: (1) (2) (3) 式 1 分, (4) 式 2 分;

第 (1.2) 小问 26 分: (5) (8) (10) (12) (13) (14) (15) (16) (17) 式 1 分, (6) (7) (9) (11) (18) (19) (20) 式 2 分, (21) 式 3 分;

第 (2) 问 9 分: (22) (23) (24) (25) (26) (28) 式 1 分, (30) 式 3 分。

六、(60 分) 阻抗与反射率

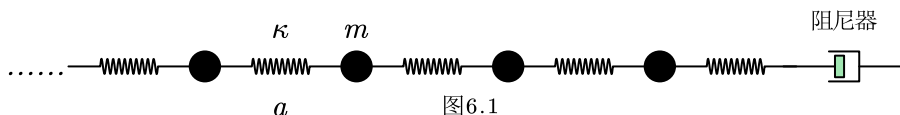
对于“阻抗”这个概念, 很多同学应该有所了解。但是大家对它的使用一般只局限于交流电路中的“阻抗”, 而实际上我们可以把这个概念推广到更多的场景中, 如机械波中定义“力学阻抗”。接下来我们讨论相关问题。

(1) 对于一个体系中传播的一维波, 当它可以用 A 、 B 两个物理量完全描述时, 我们可以试图引入阻抗的概念。对于一种给定的波动模式, 一个介质 i 中的阻抗可以定义为 $Z_i = \frac{B_i}{A_i}$ (要求

该模式下 $\frac{B_i}{A_i}$ 为一常量, 不随时间和坐标变化)。当正向传播满足 $B_i = Z_i A_i$ 时, 反向传播有 $B'_i = -Z_i A'_i$ 。在介质交界面上, A 、 B 均连续。试求解从介质 1 入射往 1, 2 介质交界面, 界面处的振幅反射率 Γ 。(不妨将 A 作为波的振幅)

上问中分析了可以使用阻抗概念的一般情况, 接下来对一些实际的物理场景进行分析。

(2) 如图 6.1, 在一个无限长谐振子链的一端加上一个阻尼器。弹簧劲度系数为 κ , 小球质量为 m (不考虑小球以外物体的质量), 弹簧原长为 a 。一束简谐波从左侧入射, 波长 λ ($\gg a$)。将小球速度 v 当作 A , 弹簧的斥力 F 当作 B 。



(2.1) 求谐振子链的阻抗 Z_c 。

(2.2) 求解以下两种阻尼器的反射率 Γ 。i. 端点自由；ii. 端点固定。

(2.3) 如果阻尼器的阻力满足 $F = -\gamma v$ ，试求解 γ 取值使得谐振子链中没有反射波。

(3) 同轴电缆是一种常用的电学元件，其由内外两层导体组成，中间填充一定介质。（在电路中，将电压 V 作为 B ，电流 I 作为 A ）

(3.1) 内导体外表面与外导体内表面均为圆柱，半径分别为 a, b ，中间介质相对介电常数 ϵ_r ，相对磁导率 μ_r 。认为以上导体均为良导体。求同轴电缆的阻抗 Z_0 。（工作时，导体上电流沿 $+z$ 方向传播，内外导体电流方向相反）

为简化结果，(3) 问之后的问题中可直接使用阻抗 Z_0 和波速 v 。

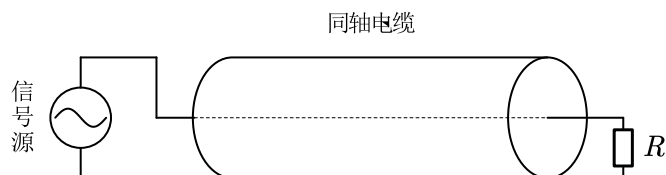


图6.2

(3.2) 如图 6.2，将同轴电缆接入电路。信号源产生最大值为 V_0 的脉冲信号（单个脉冲比同轴电缆长度短），信号会在同轴电缆的电阻端发生反射。忽略传播过程中的波形变化，试求解经过 n 次反射的脉冲信号最大值 V_n 。

(3.3) 同轴光子晶体是由两种特征阻抗的同轴电缆交替连接构成的结构，有类似能带结构和光子晶体的性质。我们将两个相同的同轴电缆并联得到特征阻抗不同的“电缆”，再将其按照图 6.3 的方式（仅作示意）连接得到一个简易的“同轴光子晶体”，同轴电缆参数与前问一致且其长度为 L 。

信号源以及末端电阻按照图 6.3 方式连接，末端电阻阻值 $R = Z_0$ 。从信号源发射一个脉冲信号（对角频率 ω 的简谐波调制振幅得到），求脉冲信号在“同轴光子晶体”的传播速度 v_g ，并判断速度是否能够超光速。（请将 v_g 写成 $\sin \frac{\omega L}{v}$ 的函数）

提示：通过输入与输出端电压的相位差来计算“晶体”中波矢 K 。

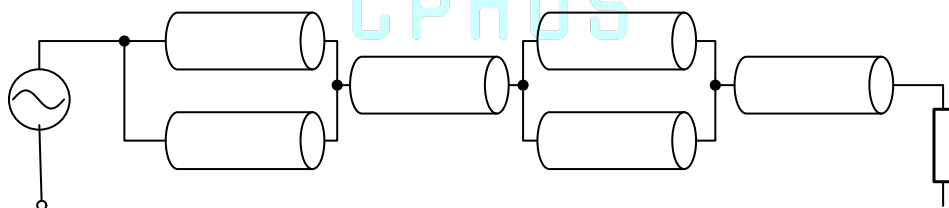


图6.3

解：(1) 边界条件

$$\begin{aligned} A_1 + A'_1 &= A_2 \\ B_1 + B'_1 &= B_2 \end{aligned} \quad (1)$$

阻抗定义

$$\begin{aligned} B_1 &= Z_1 A_1 \\ B'_1 &= -Z_1 A'_1 \\ B_2 &= Z_2 A_2 \end{aligned} \quad (2)$$

解得

$$\Gamma = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (3)$$

(2) (2.1) 设第 n 个小球位移为 ϵ_n ，第 n 个和第 $n+1$ 个小球间弹簧斥力为 F_n 。那么 ϵ, F 间满

足关系

$$m \frac{\partial^2 \varepsilon_n}{\partial t^2} = F_n - F_{n-1} \quad (4)$$

$$F_n = \kappa(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) \quad (5)$$

由于 $\lambda \gg a$, 可以将上式写成连续的形式

$$m \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = -a \frac{\partial F}{\partial x} \quad (6)$$

$$F = -\kappa a \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \quad (7)$$

整理得到

$$m \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \kappa a^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} \quad (8)$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} a \quad (9)$$

c 为波速。

因为

$$v = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

由 (6) 式

$$m \omega v = a k F \quad (10)$$

将 (9) 式代入 (10) 式

$$Z_c = \frac{F}{v} = \sqrt{\kappa m} \quad (11)$$

(2.2) i.

$$F = 0$$

阻尼器阻抗

$$Z_L = 0 \quad (12)$$

反射率

$$\Gamma = 1 \quad (13)$$

ii.

$$v = 0$$

阻尼器阻抗

$$Z_L = \infty \quad (14)$$

反射率

$$\Gamma = -1 \quad (15)$$

(2.3)

$$F_{\text{阻}} = -\gamma v$$

$$F + F_{\text{阻}} = 0$$

F 是阻尼器内张力

$$Z_L = \frac{F}{v} = \gamma \quad (16)$$

$$\text{由 } \Gamma = \frac{Z_c - Z_L}{Z_c + Z_L} = 0$$

$$\gamma = \sqrt{\kappa m} \quad (17)$$

(3) (3.1) 单位长度电容

$$V = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

$$c = \frac{\lambda}{V} = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \quad (18)$$

单位长度自感

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu_r\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_r\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$l = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_r\mu_0 \ln \frac{b}{a}}{2\pi} \quad (19)$$

由方程

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -l \frac{\partial I}{\partial t}$$

$$c \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial z}$$

整理得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - lc \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (20)$$

波速

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{lc}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\mu_0\epsilon_r\epsilon_0}} \quad (21)$$

与光速相同

$$kV = l\omega I$$

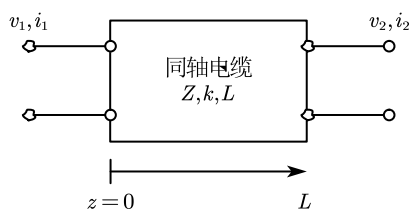
$$Z_0 = \frac{V}{I} = vl = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\epsilon_0}} \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi} \quad (22)$$

(3.2) 根据 (1) 问结果可以得到

$$\Gamma = \frac{Z_0 - R}{Z_0 + R} \quad (23)$$

$$V_n = V_0 \Gamma^n = V_0 \left(\frac{Z_0 - R}{Z_0 + R} \right)^n \quad (24)$$

(3.3) 由于电压电流均满足波动方程, 对于电缆如答图 6.1 所示



答图 6.1

根据波动方程通解, 可以得到

$$\begin{cases} v_1 = v_0^+ e^{j\omega t} + v_0^- e^{j\omega t} \\ v_2 = v_0^+ e^{j(\omega t - kL)} + v_0^- e^{j(\omega t + kL)} \\ i_1 = \frac{v_0^+}{Z} e^{j\omega t} - \frac{v_0^-}{Z} e^{j\omega t} \\ i_2 = \frac{v_0^+}{Z} e^{j(\omega t - kL)} - \frac{v_0^-}{Z} e^{j(\omega t + kL)} \end{cases} \quad (25)$$

其中 j 单位虚数, $k = \frac{\omega}{v}$ 。整理得到

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ Z_0 i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos kL & j \frac{Z}{Z_0} \sin kL \\ j \frac{Z_0}{Z} \sin kL & \cos kL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ Z_0 i_2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

中间 2×2 的矩阵称为传递矩阵。

并联电缆 $Z = \frac{1}{2}Z_0$, k 不变。传递矩阵

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos x & j \frac{1}{2} \sin x \\ j 2 \sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad (27)$$

单个电缆

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos x & j \sin x \\ j \sin x & \cos x \end{pmatrix} \quad (28)$$

其中 $x = kL$

总的传递矩阵

$$A_T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = A_1 A_2 A_1 A_2 \quad (29)$$

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2} \sin^2 x & j \frac{3}{2} \sin x \cos x \\ j \frac{3}{2} \sin x \cos x & 1 - 3 \sin^2 x \end{pmatrix}$$

解出

$$A = \frac{1}{4} (4 - 30 \sin^2 x + 27 \sin^4 x) \quad (30)$$

$$B = j \frac{3}{4} (4 - 9 \sin^2 x) \sin x \cos x \quad (31)$$

即

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ Z_0 i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_L \\ Z_0 i_L \end{pmatrix}$$

其中 v_1 、 i_1 为信号源一端的参量, v_L 、 i_L 为电阻上的参量

$$v_L = R i_L$$

$$v_L = \frac{v_1}{A + B} = \frac{v_1}{\sqrt{|A|^2 + |B|^2}} e^{-j \arctan \frac{B}{A}} \propto e^{-jK(4L)} \quad (32)$$

$$K = \frac{1}{4L} \left(\arctan \frac{3(4 - 9 \sin^2 x) \sin x \cos x}{4 - 30 \sin^2 x + 27 \sin^4 x} + m\pi \right) \quad (33)$$

m 为整数, 它的取值使得 $K(\omega)$ 连续且 $\omega = 0$ 时 $K = 0$

传播速度即群速度

$$v_g = \frac{d\omega}{dK} = \frac{dx}{dK} \frac{d\omega}{dx} = \frac{4(16 - 96 \sin^2 x + 324 \sin^4 x - 243 \sin^6 x)}{3(16 - 20 \sin^2 x + 90 \sin^4 x - 81 \sin^6 x)} v \quad (34)$$

其中 $x = \frac{\omega L}{v}$

当 $x = n\pi$ 时 (n 为整数), $v_g = \frac{4}{3}v$

因为 v 可以取到真空光速, 所以 v_g 可以超光速 (此时波包色散强烈, 群速度不能很好地描述传播过程)。

评分标准: 本题满分 60 分。

第 (1) 问 5 分: (1) (2) 式 1 分, (3) 式 3 分;

第 (2) 问 20 分:

第 (2.1) 小问 10 分: (4) (5) (6) (7) (8) (10) 式 1 分, (9) (11) 式 2 分;

第 (2.2) 小问 6 分: (12) (14) 式 1 分, (13) (15) 式 2 分;

第 (2.3) 小问 4 分: (16) (17) 式 2 分;

第 (3) 问 35 分:

第 (3.1) 小问 10 分: (18) (19) (20) (21) (22) 式 2 分;

第 (3.2) 小问 5 分: (23) 式 3 分, (24) 式 2 分;

第 (3.3) 小问 20 分: (27) (28) (30) (31) 式 1 分, (29) (32) (33) (34) 2 分, (25) (26) 3 分, 可以超光速 (含解释) 2 分。

七、(40 分) 宇宙和真空衰变

量子场论理论中, 现在的宇宙真空并不是处于能量最低状态, 而被称为“伪真空” (False vacuum), 与之对应的则是处于能量最低状态的“真正的真空” (True vacuum), 存在某种“能量势垒”阻止“伪真空”自发地向“真真空”跃迁, 而一旦突破能量势垒就会发生所谓的真空衰变, 本题尝试建立这种衰变的玩具模型。

考虑宇宙中出现了一个真空衰变的区域, 由于区域边界改变会需要能量, 我们可以将其效应等效为表面张力, 对宇宙的边界也假设可以用表面张力处理。这样问题变成两个真空中的同心球, 其初始半径分别为 R 和 $3R$, 这两个同心球的表面张力系数恒为 α , 同时我们假设宇宙的边界是绝热的。内球内部 (真真空) 和两球之间 (宇宙) 都存在初始温度为 T_0 的理想气体, 气体的绝热指数 $\gamma = \frac{5}{3}$, 外球壳无气体, 初始时系统达到平衡状态。

(1) 固定外球使其半径保持不变, 给内球沿半径方向各向同性的微扰, 求内球振动的本征频率, 本问假设内球边界是完全导热的, 并且初始时内球拥有 σ_0 的质量面密度。

(2) 现在给外球施加均匀的、各向同性的力, 使内外球半径缓慢地增加。假设内球边界绝热。求当外球的半径变为 $5R$ 时, 内球的半径 r_1 与外力做的总功 W , 结果保留至小数点后两位。

提示: 本题所指的“平衡”包括受力平衡和热平衡, 假设所有过程都是准静态的。

解: (1) 初态时为平衡状态, 设内球内气体的压强为 p_1 , 两球间气体的压强为 p_2 , 由受力平衡可得初态压强

$$p_{20} = \frac{2\alpha}{3R} \quad (1)$$

$$p_{10} = p_{20} + \frac{2\alpha}{R} = \frac{8\alpha}{3R} \quad (2)$$

设某时刻内球的半径增加 x ($x \ll R$), 气体温度变为 T_x ($|T_x - T_0| \ll T_0$), 由理想气体状态方

程可得

$$\frac{p_{10}R^3}{T_0} = \frac{p_1(x)(R+x)^3}{T_x} \quad (3)$$

$$\frac{p_{20}((3R)^3 - R^3)}{T_0} = \frac{p_2(x)((3R)^3 - (R+x)^3)}{T_x} \quad (4)$$

气体的内能为

$$U_1 = \frac{N_1 k T_x}{\gamma - 1} = \frac{3}{2} p_1 \cdot \frac{4\pi}{3} (R+x)^3 \quad (5)$$

$$U_2 = \frac{N_2 k T_x}{\gamma - 1} = \frac{3}{2} p_2 \cdot \frac{4\pi}{3} (27R^3 - (R+x)^3) \quad (6)$$

式中 N_1 与 N_2 分别为内球内气体和两球间气体的粒子数。由于外球绝热, 由热力学第一定律得

$$d(U_1 + U_2) = -(p_1 - p_2) \cdot 4\pi(R+x)^2 dx \quad (7)$$

由于 $\frac{x}{R} \ll 1$, 对上式小量展开至最低阶, 解得

$$p_1(x) \approx \frac{8\alpha}{3R} \left(1 - \frac{16x}{5R}\right) \quad (8)$$

$$p_2(x) \approx \frac{2\alpha}{3R} \left(1 - \frac{11x}{130R}\right) \quad (9)$$

内球壳的质量为

$$m_1 = 4\pi R^2 \sigma_0 \quad (10)$$

通过受力分析可以列出内球的运动方程

$$m_1 \ddot{x} = \left(p_1 - \frac{2\alpha}{R+x} - p_2\right) \cdot 4\pi(R+x)^2 \approx -4\pi R^2 \cdot \frac{421\alpha}{65\sigma_0 R^2} x \quad (11)$$

化简得

$$\ddot{x} = -\frac{421}{65} \frac{\alpha}{\sigma_0 R^2} x \quad (12)$$

故本征频率为

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{421}{65} \frac{\alpha}{\sigma_0 R^2}} \quad (13)$$

(2) 设某时刻内球的半径为 r_1 , 外球半径为 r_2 , 则对内球内气体而言, 有绝热方程

$$p_1 \left(\frac{4}{3}\pi r_1^3\right)^\gamma = \text{Const.} \quad (14)$$

则

$$p_1(r_1) = \left(\frac{R}{r_1}\right)^{3\gamma} p_{10} \quad (15)$$

而对于两球之间的气体

$$p_2 \left[\frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3)\right]^\gamma = \text{Const.} \quad (16)$$

则

$$p_2(r_2) = \left(\frac{26R^3}{r_2^3 - r_1^3}\right)^\gamma p_{20} \quad (17)$$

由内球受力平衡可得

$$p_1(r_1) = p_2(r_2) + \frac{2\alpha}{r_1} \quad (18)$$

由 (28) (30) (31) 式可得

$$r_2^3 = r_1^3 + 26R^3 \left[4 \left(\frac{R}{r_1} \right)^{3\gamma} - \frac{3R}{r_1} \right]^{-\frac{1}{\gamma}} \quad (19)$$

当 $r_2 = 5R$ 时, 解得

$$r_1 = 1.0676R \quad (20)$$

此时

$$p_1' = 0.7211p_{10} \quad (21)$$

$$p_2' = 0.0742p_{20} \quad (22)$$

由绝热方程可得

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{Const.} \quad (23)$$

因此

$$T_1' = 0.877T_0 \quad (24)$$

$$T_2' = 0.353T_0 \quad (25)$$

则内、外气体的内能增量

$$\Delta U_1 = \frac{3}{2} N_1 k (T_1' - T_0) = \frac{3}{2} p_1 V_1 \left(\frac{T_1'}{T_0} - 1 \right) = -2.0544\alpha R^2 \quad (26)$$

$$\Delta U_1 = \frac{3}{2} N_2 k (T_2' - T_0) = \frac{3}{2} p_2 V_2 \left(\frac{T_2'}{T_0} - 1 \right) = -70.4256\alpha R^2 \quad (27)$$

式中 N_1 与 N_2 分别为内筒内气体和两筒间气体的粒子数。同时, 内、外橡皮膜的表面张力能的增量分别为

$$\Delta U_3 = \alpha \cdot 4\pi(r_1^2 - R^2) = 1.756\alpha R^2 \quad (28)$$

$$\Delta U_4 = \alpha \cdot 4\pi(r_2^2 - R^2) = 201.062\alpha R^2 \quad (29)$$

由于系统绝热, 故

$$W = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 + \Delta U_4 = 130.338\alpha R^2 \quad (30)$$

说明: 本题解答均基于题目假设, 并非严谨的真空衰变理论计算。

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 19 分: (1) (2) (3) (4) (5) (6) 式各 1 分, (7) (8) (9) (11) (12) 式各 2 分, (13) 式 3 分;

第 (2) 问 21 分: (21) (22) (24) (25) (28) (29) 式各 1 分, (14) (16) (18) (20) (26) (27) 式各 2 分, (30) 式 3 分。

参考文献：

1. 李广宇. 天体测量和天体物理学基础[M]. 北京:科学出版社, 2015: 185–189.
2. Patsyk, A., Sivan, U., Segev, M. *et al.* Observation of branched flow of light. *Nature* **583**, 60–65 (2020).
3. M. A. Topinka, B. J. LeRoy, R. M. Westervelt, S. E. J. Shaw, R. Fleischmann, E. J. Heller, K. D. Maranowski, and A. C. Gossard, Coherent branched flow in a two-dimensional electron gas, *Nature* **410**, 183–186 (2001).
4. 童元伟, 张冶文, 赫丽, 李宏强, 陈鸿. 用传输矩阵法研究微波波段准一维同轴光子晶体能隙结构. 物理学报, 2006, 55(2): 935–940.

版权信息**命题人**

肖慎兴 刘家亦 任泓锦 孙浩晰 孙榕希 潘昊扬 吴恒旭 徐 前

审题人

孙浩晰 肖慎兴 徐 前 孙榕希 刘家亦 潘昊扬 龚俊安 任泓锦 吴恒旭 陈炆 王浩冉

联系方式

微信公众号
CPHOS



官方网站
cphos.cn



CPHOS 论坛
cphos.cn/index.php/community

邮箱

service@cphos.cn

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考

CPHOS