

第 24 届 CPHOS 物理竞赛联考（决赛模拟赛）

理论试题

本试题于 2024 年 10 月 09 日 08:00 发布，最后更新于 2024 年 10 月 8 日 21:52。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

答题卡上传

2024/10/9 12:00 - 2024/10/12 18:00

阅卷

2024/10/14 08:00 - 2024/10/18 20:00

非正式成绩

2024/10/19 08:00

成绩申诉

2024/10/19 09:00 - 2024/10/20 12:00

非正式成绩

2024/10/19

考生须知

1. 理论试题共 **9** 页，理论答题卡共 **8** 页，答题时间 **180** 分钟，试题满分 **320** 分。
2. 请在答题卡的指定答题区域内答题，试题和草稿纸上的内容将不会作为评分参考，不可申请答题卡加页。请将答题卡按照顺序上传至小程序的**第一题至第七题**处。
3. 若发现试题存在问题，请向领队（教练）反映，由其转达至相关微信群聊。
4. 试题答案及相关分析均会在官方网站 www.cphos.cn 上发布。
5. 本次考试定位难度为决赛模拟。

一、（40 分）机翼的升力

我们都知道，飞机的机翼之所以能够产生升力，是因为机翼上下表面的不对称导致的上下表面的空气流速不同，从而导致压强不同产生升力。但是还可以从环量的角度解释这个现象。简单起见，我们假设空气是无粘性不可压缩的流体，且为无旋定常流动。

先引入环量的概念： $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$ （默认逆时针方向）。显然，无旋流动中，若闭合曲线包裹区域内处处是流体，环量为零，但是沿着边界的环量积分不一定为零。

在二维问题中，总可以通过保角变换将一个单连通区域变换成圆，而流体所满足的方程又在保角变换下不变。因此，我们可以先计算下面的情况：

考虑二维均匀流速场中固定一个刚性圆柱体，无穷远处流速为 v_0 ，压强为 p_0 ，圆柱体半径为 a ，流体密度为 ρ 。方便起见，统一采用极坐标系，极轴方向为无穷远处流速方向，如图 1.1 所示。

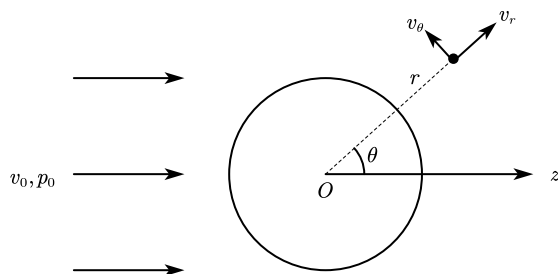


图1.1

(1) 先考虑沿着圆柱表面环量 $\Gamma = 0$ 的情况。

(1.1) 联想到电磁学中匀强电场中的导体圆柱体，两者在自由空间中的方程相同。先求出原点处的二维电偶极子 p 在真空中产生的电场。（偶极子方向沿极轴正方向）

(1.2) 根据上问的计算结果，求出圆柱绕流时全空间的流速分布 v_r, v_θ 。

(1.3) 求出圆柱体单位长度的受力 \vec{F} 。

(2) 再考虑沿着圆柱表面环量 $\Gamma \neq 0$ 的情况。

(2.1) 根据法拉利电磁感应定律，有 $\oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ，与环量的定义形式相同。因此可以将环量看作圆柱内部有变化的磁场。利用叠加原理，据此求出全空间的流速分布 v_r', v_θ' 。

(2.2) 若是将流体类比为磁场，根据安培环路定理，环量还可以类比电流。在类比静磁的情况下重新求出 v_r', v_θ' 。

(2.3) 求出圆柱体单位长度的受力 \vec{F}' 。

(3) 圆可以通过茹科夫斯基变换 $w = \frac{1}{2}(z + \frac{c^2}{z})$ 变换为翼型。由于对应翼型尾部不光滑，导致间断，从而可算出尾部会产生正比于 v_0 的环量。由前面的计算结果证明飞机机翼产生的升力正比于 v^2 。（不用具体计算保角变换）

二、(40 分) 人造地球卫星的运动

本题目旨在推导考虑了地球非球对称效应以后的人造地球卫星的运动。

众所周知，地球的实际形状并不是圆形，而是一个较扁的椭球，这会额外产生一个摄动势 $\Delta V(r, \theta)$ ，从而造成地球产生的实际引力势相对点质量引力势的偏离，进而导致人造地球卫星的轨道的进动。为了更好地描述人造地球卫星由摄动势产生的摄动，我们将建立一个新的坐标系，如图 2.1 所示：

其中 Ω 为人造卫星运行平面和地球赤道面的交线（升交线）与 x 轴的夹角， i 为卫星运行平面法线与 z 轴夹角， ω 是升交线和离心率矢量的夹角。再设 e 是轨道的离心率， a 是轨道的半长轴， T 是行星运行周期。

假设有摄动势 ΔV ，此时上面所给的参量将不再是常量，但是认为它们产生显著变化的时间 $\tau \gg$ 卫星运动的周期 T ，可以得到方程：

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \Delta V}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \Delta V}{\partial i}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \Delta V}{\partial i}$$

其中 $n = \frac{2\pi}{T}$ 。

(1) 假设地球的质量是 M ，半径是 R ，假设地球仍然关于 z 轴轴对称，试证明摄动势的形式：

$$\Delta V(r, \theta) = -\frac{GMJR^2}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

其中 J 是一个只由地球的形状决定的常量。

提示：轴对称情况下的拉普拉斯方程通解为：

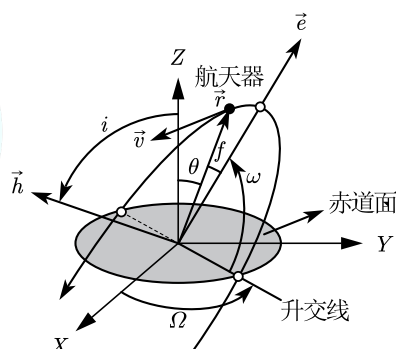


图2.1 航天器运动示意图

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n r^n + b_n r^{-n-1}] P_n(\cos \theta)$$

其中 $P_n(x)$ 为第 n 阶勒让德函数，有 $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$ 。

(2) 将第(1)问求出的摄动势代入摄动方程，求出 $\dot{\omega}$ 和 $\dot{\Omega}$ 。并且可以发现对于某个 i 使得椭圆轨道不存在进动 (ω 不变)，求出这个临界角 i_c ，这个轨道称为 Molnya 轨道。

提示：由于我们只关注 ω 和 Ω 的长期变化，可以将摄动势在卫星的多个运行周期求平均。

数学公式：横线表示对卫星的多个运行周期求平均。

$$\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^3} = \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(3) 设地球卫星轨道的倾角为 30° ，近地点高度和远地点高度分别为 $h_m = 161\text{km}$ 和 $h_M = 837\text{km}$ ，忽略大气阻力，求出 $\dot{\omega}$ 和 $\dot{\Omega}$ 。（地球半径 $R = 6371\text{km}$, $J = 1.825 \times 10^{-3}$ ）

三、(60 分) 悬挂电缆线

考虑一根原长为 l 的电缆线，电缆线视为直径为 d 的长圆柱，其材料的杨氏模量为 E ，密度为 ρ ，电导率为 σ ，两端固定在间距也为 l 、高为 h 的两竖直杆的上端，两杆下端固定在大地上，满足 $d \ll h \ll l$ ，大地视为无限大理想良导体，如图 3.1 所示。本题无需考虑形变对电流传输的影响，不考虑相对论效应。重力加速度为 g 。

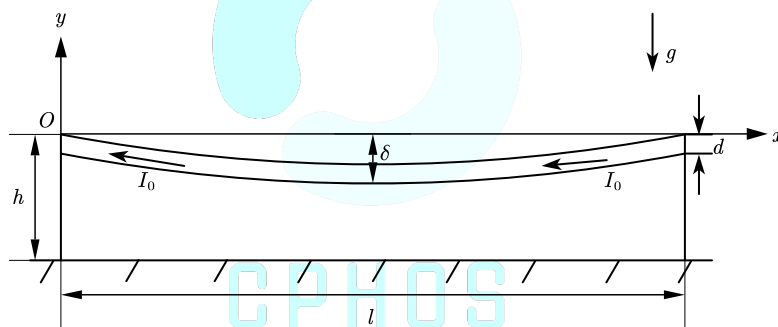


图3.1 电缆线的示意图

(1) 大地由于具有较高的电导率，对电磁场具有趋肤效应，设大地表面的电场仅有法向分量，磁感应强度均仅有切向分量。不考虑形变，写出导线单位长度的电阻 R ，并求出单位长度电缆与大地间形成的等效电容 C 与等效电感 L 。在接下来的小问中，假设 R, L, C 均保持不变。

(2) 本问考虑直流电流使电缆发生的微小的形变。根据伯努利——欧拉定理，梁上某点的力偶矩为 $\tau = \frac{EI}{R_0}$ ， R_0 为梁中性面的曲率半径， I 为惯量矩。已知对于圆柱，其横截面的惯量矩

$$I = \int_S z^2 dS = \frac{1}{64} \pi d^4$$

现使电缆从右往左通过稳恒电流 I_0 ，求解电缆最低点相对两端下降的高度 δ 的表达式以及其数值并保留三位有效数字。假设 $\delta \ll h$ ，可以利用以下给定数据进行适当的近似。

数据：(仅限本问使用)

$$h = 1\text{m}, l = 10\text{m}, d = 0.1\text{m}, \sigma = 5.7 \times 10^7 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}, \\ E = 1.5 \times 10^{11} \text{Pa}, I_0 = 4 \times 10^4 \text{A}, \rho = 7.13 \text{g/cm}^3, g = 9.8 \text{m/s}^2$$

(3) 本问考察交流信号在电缆线上的传输。不考虑电缆线发生的微小形变，于电缆右端加交流电动势 $U = U_m \cos \omega t$ ，左端保持零电势，为便于计算，使用复数形式 $U = U_m e^{-j\omega t}$ 。以左端为坐标原点，向右为正方向建立 x 轴，足够长时间后电缆线上存在复电势分布 $u(x, t)$ 与

复电流分布 $i(x, t)$ 。本问可直接使用 (1) 问中的 R, L, C 参量。

(3.1) 求 $u(x, t)$ 与 $i(x, t)$ 满足的微分方程组, 并利用边界条件求出 $u(x, t)$ 的表达式。为使解答更简洁, 本小问可以使用换元: ($j^2 = -1$)

$$\alpha = - \left[\frac{CL\omega^2}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} + j \left[\frac{CL\omega^2}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

(3.2) 求出此时信号在电缆上的传播速度。并在 $R = 0$ 下重新求解传播速度。

(4) 接 (2) (3) 问, 本问考虑交流电对电缆线产生形变的影响。假设梁上的每一点仅发生竖直方向的微小位移。

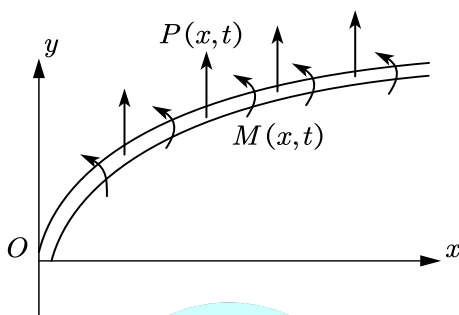


图3.2 微震动下的电缆

(4.1) 考虑电缆线的横向微振动。设线上各点位移用 $y(x, t)$ 描述, 单位长度所受外力与外力矩用 $P(x, t)$ 与 $M(x, t)$ 表示, 如图 3.2 所示。杆横截面切向内力与内力矩分布用 $Q(x, t)$ 与 $\tau(x, t)$ 表示, 求出杆上各点满足的动力学方程与力矩平衡方程。方程中请代入 $\tau(x, t)$ 的具体表达式。

(4.2) 在自由条件下, 有 $P(x, t) = 0, M(x, t) = 0$, 写出 $y(x, t)$ 满足的横向自由振动微分方程。已知方程解的形式为:

$$y(x, t) = (B_1 \cosh Kx + B_2 \sinh Kx + B_3 \cos Kx + B_4 \sin Kx) \cos(\Omega t + \varphi)$$

其中 B_1, B_2, B_3, B_4, K 为常数。求 Ω , 用含 K 的表达式表示。

(4.3) 将电缆线右端与交流电流源连接, 电流源输出电流满足 $i = i_0 \cos \omega t$, 左端断路。假设电缆线电阻很小, 可认为 $R = 0$, 同时 ω 较小使 $l \ll \lambda$, λ 为电缆线上信号传播的特征波长。仅考虑磁场力与重力。已知在适当的近似下 $P(x, t)$ 为 x 的多项式, 求出此时 $P(x, t)$ 的表达式, 并写出此时的振动方程的特解。(答案中不要引入待定常数)

四、(40分) 光分支流现象

波在一个关联长度比波长大的弱无序势中传播时, 会持续出现分支现象, 即分支流 (branched flow)。2001 年, 美国哈佛大学 M. Topinka 等人在二维电子气中发现了分支流现象, 2010 年, 德国马尔堡菲利普斯大学 R. Höhmann 等人在微波腔中发现了微波的分支现象, 2020 年, 以色列理工学院 A. Patsyk 等人首次报道了光的分支流现象: 一束激光射入肥皂膜内部的夹层时, 不会像原来在空气中一样沿直线传播, 而是会产生分支现象。激光束就像从树干中衍生出树枝一样, 多次分岔, 在肥皂膜内扩散, 形成许多的分支。并且这种分支并不是固定不变的, 而是会随时间无序且随机地快速变化。造成激光不沿直线传播, 而是改变路径产生分支的原因就在于光的传播介质——肥皂膜的厚度分布无序且随机。肥皂膜厚度在空间上的无序与随机性就导致了空间各点膜内有效折射率的随机分布, 造成了光的偏折与分支, 肥皂膜厚度分布的时间随机性则是光分支随机快速变化的原因。研究团队将激光束耦合到肥皂膜上。他们发现, 当光在肥皂膜中传播而不是被散射时, 光会形成细长的分支, 从而形成光的分支流现象。

对于在空气中稳定存在的肥皂膜，肥皂膜内部的折射率为肥皂溶液的折射率，肥皂膜外部的折射率为空气折射率。在本题的模型中，假设全空间折射率分布为：

$$n(x, y, z) = \begin{cases} 1, & |z| > d(x, y)/2 \\ n, & |z| < d(x, y)/2 \end{cases}$$

设磁导率 $\mu = \mu_0$ 且不考虑色散。肥皂膜的厚度 $d(x, y)$ 在波长量级且在波长范围内几乎为常量。本题研究 $d(x, y)$ 的变化尺度为百微米量级。

麦克斯韦方程组为：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

在均匀介质中电磁波的传播遵循亥姆霍兹方程：

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \nabla^2 \psi + \mu \epsilon \omega^2 \psi = 0$$

其中 ψ 是电场或磁场在任意方向上的振幅， ω 是电磁波角频率。本题考虑角频率为 ω 的单体电磁波。

在空间中只可能存在两种电磁波的叠加，一种是类似 F-P 腔的多光束干涉，另一种是束缚在肥皂膜内以及附近传播的，光的分支流现象对应后者。显然束缚在肥皂膜附近的电磁波，在 z 方向上是驻波，而沿 xy 平面方向可以传播行波。电磁波有两种偏振，由于沿 xy 平面方向传播行波，可以选取一种偏振为 $E_z = 0$ ，另一种偏振为 $H_z = 0$ 。在第一种波内，电场是纯横向的（相对波矢），记作 TE 波，在第二种波内，磁场是纯横向的，记作 TM 波。

为了寻求束缚在肥皂膜附近电磁波的解，现在采用分离变量法，设 $\psi(x, y, z) = \sum_i a_i \psi_i(x, y) G_i(z)$ ， a_i 是任意复常数。其中对于 TE 波 $\psi = E$ ，对于 TM 波 $\psi = H$ ，对于不同的 i 称作电磁波的不同模式（如果比值 $G_i(z)/G_j(z)$ 为复常数，则称 i 和 j 为一个模式）。以下电磁场 E, H 的分量均指复振幅。

对于 TE 波， $E_x = \sum_i a_i A_i(x, y) G_i(z)$ ， $E_y = \sum_i a_i B_i(x, y) G_i(z)$ 。由于 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 及 $E_z = 0$ ，所以 $\frac{\partial A_i}{\partial x} + \frac{\partial B_i}{\partial y} = 0$ ，可以设 $A_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}$ ， $B_i = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}$ ；对于 TM 波， $H_x = \sum_i a_i C_i(x, y) G_i(z)$ ， $H_y =$

$\sum_i a_i D_i(x, y) G_i(z)$ ，同理可以设 $C_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}$ ， $D_i = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}$ 。



图4.1 光的分支流实验

（1）分别对于 TE 波和 TM 波写出 $\Phi_i(x, y)$ 满足的微分方程，不必求解。

提示：考虑亥姆霍兹方程和电磁场的边界条件。

（2）分别对于 TE 波和 TM 波求解所有可能的电磁波模式个数。

（3）证明：全空间电场总能量平均值等于全空间磁场总能量平均值。

提示： $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$, $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$

以下考虑光束在肥皂膜中的传播。由于波长远小于厚度变化的尺度，考虑几何光学近似。

(4) 证明：在几何光学近似下，对于每一个模式， $\Phi_i(x, y)$ 等价于光线在第 i 个二维等效折射率分布中的轨迹。

(5) 证明：在几何光学近似下，对于每一个模式， $\Phi_i(x, y)$ 等价于经典粒子在第 i 个二维势场中的运动轨迹。

(6) 为了直观地理解光的分支流，下面考虑厚度分布：

$$d(x, y) = \begin{cases} d, & x^2 + y^2 > R^2 \\ d + (1 - (x^2 + y^2)/R^2)\Delta, & x^2 + y^2 < R^2 \end{cases}$$

其中 R 为毫米量级且 $|\Delta| \ll d$ （规定有效折射率的平方保留 Δ 的一阶项）。一束单色激光在点 $(-2R, R \sin \theta, 0)$ 耦合到肥皂膜上并沿 $+x$ 方向传播，在几何光学近似下求解 $\Phi_i(x, y)$ 对应的轨迹，并画出 $\Delta > 0$ 对应的草图。

提示：可以使用参数方程。

五、(40 分) 竞技体操

8 月 5 日，随着女子自由体操决赛金牌的决出，2024 年巴黎奥运会中竞技体操的所有比赛正式落下帷幕。在此次比赛中，中国竞技体操队的健儿们争金夺银，他们顶着伤病、在赛场上奋力拼搏的身影成为赛场上一道亮丽的风景线。本题拟在一定的近似条件下研究与竞技体操相关的物理原理。

(1) 大回环——单杠

单杠是男子竞技体操项目之一，且其中的许多技术动作亦会出现在女子体操项目“高低杠”中。大回环是单杠中的一个基本技巧，在做大回环时，运动员身体近似保持笔直，双手伸直，绕水平放置的单杠做圆周运动，如图 5.1 所示。本小问研究以下这种情况：运动员在此问中，在最高点处由于要完成转体动作而静止，随后身体保持笔直状态，在受到扰动后摆下。实心杠的半径为 r ，长度为 $2a$ ，质量可忽略不计，其杨氏模量 E 很大。将运动员近似为一根铰接在单杠上的质量均匀为 m 、长度为 l 的杆。考虑重力，重力加速度为 g 。

(1.1) 试在 $E \rightarrow +\infty$ 的条件下，写出单杠对运动员的支持力 T 随运动员身体与竖直方向夹角 θ 的关系（为便于阅卷，规定 T 的正方向：当它使得单杠有向人体一侧弯曲的倾向时， T 的符号为正）；

(1.2) 在实际情况下，运动员在完成大回环时往往会双手握杠。此时，认为运动员双手距离为 $2b$ ，两握点关于单杠的对称轴对称（为便于理解，此时你可以将运动员想象为两根质量均匀为 $\frac{m}{2}$ 、长度为 l 的杆，显然，它们的运动是同步的），如图 5.2 所示。在本小问中， E 将是一个很大的有限量，你可以使用适当的近似。已知在单杠不受力时，它保持平直。试求与认为单杠不可弯曲的情况相比，考虑单杠弹性后运动员在身体位置处于 θ 处时的角速度的变化量 δ ；

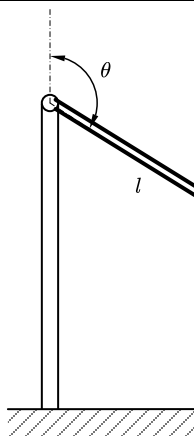


图5.1

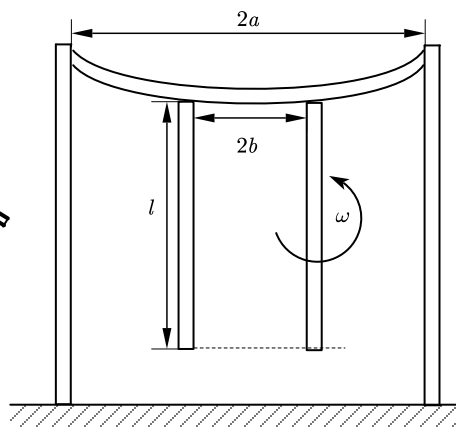


图5.2

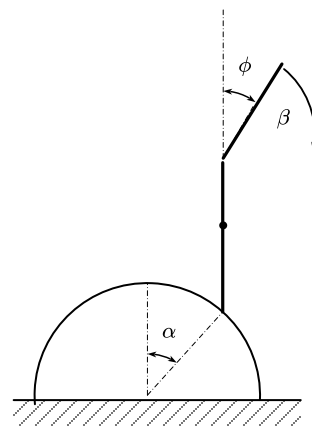


图5.3

(2) 如何在圆木上保持平衡——平衡木

平衡木是女子体操动作项目,它需要运动员在一根横木上做出一连串的舞蹈与翻腾动作,是最容易出现失误的体操项目。在巴黎奥运会平衡木上,参与比赛的八位高水平运动员中共有五位摔下了平衡木,其比例比之前的各式大赛都要高上许多。在平衡木决赛中摘银的周雅琴表示,与平时训练中的方木相比,巴黎奥运会组委会采用了圆木。所谓“方”与“圆”,指的是横截面的形状。显然,为了在平衡木上站稳,圆木比之方木对落点准确性的要求更高。本小问拟讨论运动员通过上半身的倾倒来使自身尽可能在圆木上保持平衡的可能性。如图 5.3 所示,将圆木简化为一个轴线水平的半圆柱,其静摩擦系数为 μ 且可以给人体提供任意大小的力矩;将人体简化为两根长度均为 L 、质量均为 M 的忽略粗细的相连的匀质杆。初始时刻,运动员位置与圆心的连线和竖直方向的夹角为 α ,为保持平衡,运动员下半身保持不动,上半身以角加速度 β 作匀加角速度运动,方向如图所示,上半身在 t 时刻与竖直方向的夹角记为 ϕ 。已知运动员在 ϕ 达到 ϕ_0 之前,无法通过脚步的移动使自己可以在静止状态下保持平衡。作为简化,你需要求解 $0 \leq \phi \leq \phi_0$ 时的平衡条件。试给出此条件,用 $a \leq f(\phi) \leq b$ 的形式表示,并在 $\mu = \frac{1}{5}$, $\alpha = \frac{\pi}{12}$, $\phi_0 = 0.500\text{rad}$, $g = 9.80\text{m/s}^2$, $L = 0.800\text{m}$ 的条件下给出 β 的取值范围。考虑重力,重力加速度为 g 。

六、(60 分) 阻抗与反射率

对于“阻抗”这个概念,很多同学应该有所了解。但是大家对它的使用一般只局限于交流电路中的“阻抗”,而实际上我们可以把这个概念推广到更多的场景中,如机械波中定义“力学阻抗”。接下来我们讨论相关问题。

(1) 对于一个体系中传播的一维波,当它可以用 A 、 B 两个物理量完全描述时,我们可以试图引入阻抗的概念。对于一种给定的波动模式,一个介质 i 中的阻抗可以定义为 $Z_i = \frac{B_i}{A_i}$ (要求

该模式下 $\frac{B_i}{A_i}$ 为一常量,不随时间和坐标变化)。当正向传播满足 $B_i = Z_i A_i$ 时,反向传播有 $B'_i = -Z_i A'_i$ 。在介质交界面上, A 、 B 均连续。试求解从介质 1 入射往 1, 2 介质交界面,界面处的振幅反射率 Γ 。(不妨将 A 作为波的振幅)

上问中分析了可以使用阻抗概念的一般情况,接下来对一些实际的物理场景进行分析。

(2) 如图 6.1, 在一个无限长谐振子链的一端加上一个阻尼器。弹簧劲度系数为 κ , 小球质量为 m (不考虑小球以外物体的质量), 弹簧原长为 a 。一束简谐波从左侧入射, 波长 $\lambda (\gg a)$ 。将小球速度 v 当作 A , 弹簧的斥力 F 当作 B 。

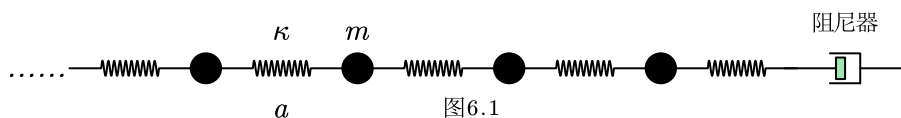


图6.1

(2.1) 求谐振子链的阻抗 Z_c 。

(2.2) 求解以下两种阻尼器的反射率 Γ 。i. 端点自由；ii. 端点固定。

(2.3) 如果阻尼器的阻力满足 $F = -\gamma v$ ，试求解 γ 取值使得谐振子链中没有反射波。

(3) 同轴电缆是一种常用的电学元件，其由内外两层导体组成，中间填充一定介质。（在电路中，将电压 V 作为 B ，电流 I 作为 A ）

(3.1) 内导体外表面与外导体内表面均为圆柱，半径分别为 a, b ，中间介质相对介电常数 ϵ_r ，相对磁导率 μ_r 。认为以上导体均为良导体。求同轴电缆的阻抗 Z_0 。（工作时，导体上电流沿 $+z$ 方向传播，内外导体电流方向相反）

为简化结果，(3) 问之后的问题中可直接使用阻抗 Z_0 和波速 v 。

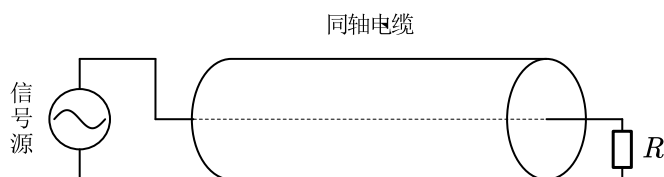


图6.2

(3.2) 如图 6.2，将同轴电缆接入电路。信号源产生最大值为 V_0 的脉冲信号（单个脉冲比同轴电缆长度短），信号会在同轴电缆的电阻端发生反射。忽略传播过程中的波形变化，试求解经过 n 次反射的脉冲信号最大值 V_n 。

(3.3) 同轴光子晶体是由两种特征阻抗的同轴电缆交替连接构成的结构，有类似能带结构和光子晶体的性质。我们将两个相同的同轴电缆并联得到特征阻抗不同的“电缆”，再将其按照图 6.3 的方式（仅作示意）连接得到一个简易的“同轴光子晶体”，同轴电缆参数与前问一致且其长度为 L 。

信号源以及末端电阻按照图 6.3 方式连接，末端电阻阻值 $R = Z_0$ 。从信号源发射一个脉冲信号（对角频率 ω 的简谐波调制振幅得到），求脉冲信号在“同轴光子晶体”的传播速度 v_g ，并判断速度是否能够超光速。（请将 v_g 写成 $\sin \frac{\omega L}{v}$ 的函数）

提示：通过输入与输出端电压的相位差来计算“晶体”中波矢 K 。

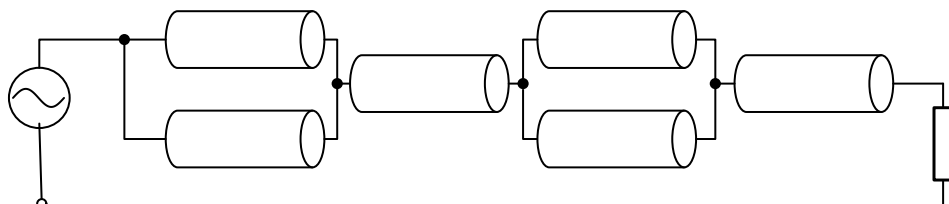


图6.3

七、(40 分) 宇宙和真空衰变

量子场论理论中，现在的宇宙真空并不是处于能量最低状态，而被称为“伪真空”（False vacuum），与之对应的则是处于能量最低状态的“真正的真空”（True vacuum），存在某种“能量势垒”阻止“伪真空”自发地向“真真空”跃迁，而一旦突破能量势垒就会发生所谓的真空衰变，本题尝试建立这种衰变的玩具模型。

考虑宇宙中出现了一个真空衰变的区域，由于区域边界改变会需要能量，我们可以将其效应等效为表面张力，对宇宙的边界也假设可以用表面张力处理。这样问题变成两个真空中

的同心球，其初始半径分别为 R 和 $3R$ ，这两个同心球的表面张力系数恒为 α ，同时我们假设宇宙的边界是绝热的。内球内部（真真空）和两球之间（宇宙）都存在初始温度为 T_0 的理想气体，气体的绝热指数 $\gamma = \frac{5}{3}$ ，外球壳无气体，初始时系统达到平衡状态。

（1）固定外球使其半径保持不变，给内球沿半径方向各向同性的微扰，求内球振动的本征频率，本问假设内球边界是完全导热的，并且初始时内球拥有 σ_0 的质量面密度。

（2）现在给外球施加均匀的、各向同性的力，使内外球半径缓慢地增加。假设内球边界绝热。求当外球的半径变为 $5R$ 时，内球的半径 r_1 与外力做的总功 W ，结果保留至小数点后两位。

提示：本题所指的“平衡”包括受力平衡和热平衡，假设所有过程都是准静态的。

版权信息

命题人

肖慎兴 刘家亦 任泓锦 孙浩晰 孙榕希 潘昊扬 吴恒旭 徐 前

审题人

孙浩晰 肖慎兴 徐 前 孙榕希 刘家亦 潘昊扬 龚俊安 任泓锦 吴恒旭 陈炆 王浩冉

联系方式



微信公众号
CPHOS



官方网站
cphos.cn



CPHOS 论坛
cphos.cn/index.php/community

邮箱

service@cphos.cn

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考

CPHOS