第 1 届 CPHOS 物理竞赛基础联考

力电卷参考答案及评分标准

本文件于 2024 年 12 月 21 日 8: 00 发布，最后更新于 2024 年 12 月 20 日 22: 41 。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

一、（40分）波的反射与透射

本题只考虑弹性体中的纵波，不考虑横波。

如图1.1，两根半无限长、质量线密度分别为λ_1、λ_2，张力系数为κ_1、κ_2的弹性体，中间由一个质量为m 的小球连接，设小球所在位置为x轴坐标原点。弹性体上的质点沿着弹性体方向振动，记位于x处的质点在t时刻相对于平衡位置的位移为$q(x,t)$。本题想要研究这个弹性体上波动的情况。

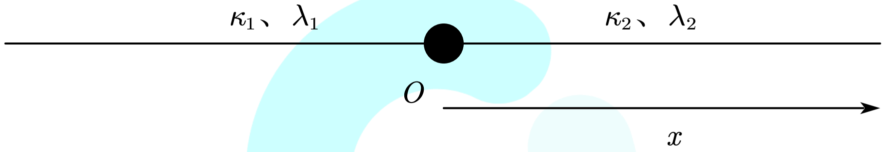


图1.1 弹性体与质点

（1）先考虑一个质量线密度为λ，张力系数为κ的弹性体，请推导出弹性体纵波波动的波动方程，并给出波动方程的一般解，写为复数形式。并求出能流密度。设波振幅为A，角频率为ω。

提示：波的能流密度定义为平均能量密度与波速的乘积。

（2）现在考虑波在图中体系的入射和反射。设从左侧入射波的波动方程为

$$q_0(x,t)=A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x-\omega t)},\ \ x<0$$

其中A_0为实数，通过（1）问的结论可得到k_1；设反射波的复振幅为A_R，透射波的复振幅为A_T。（默认振幅包含相位信息）

（2.1）写出$x=0$处所满足的边界条件，并利用边界条件求出A_R和A_T，以及复振幅反射率r和复振幅透射率t。

（2.2）求出入射波的能流密度w_0、反射波的能流密度w_r、透射波的能流密度w_t，验证能量守恒定律。并给出能流反射率R和能流透射率T。

解：（1）考虑长度为dx的弦，受到拉力

$$f=\kappa\frac{\partial q}{\partial x}\bigg|_{x+\mathrm{d}x}-\kappa\frac{\partial q}{\partial x}\bigg|_{x}=\kappa\mathrm{d}x\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\tag{1}$$

将上式代入牛顿第二定律 $\ddot{q}=-\frac{f}{\lambda\mathrm{d}x}$，得到波动方程为

$$\lambda\ddot{q}=\lambda\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}=\kappa\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\tag{2}$$

波动解为

$$q_\pm(x,t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pm kx-\omega t)}\tag{3}$$

其中$k=\omega\sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}$。进一步可以得到波的能量密度为

$$u=\frac{1}{2}\lambda\overline{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2}+\frac{1}{2}\kappa\overline{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2}=\frac{1}{2}\lambda\omega^2A^2 \tag{4}$$

故能流密度为

$$w=uc=\frac{1}{2}\lambda\omega^2A^2\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}}=\frac{1}{2}\sqrt{\kappa\lambda}\omega^2A^2 \tag{5}$$

其中利用了波速$c=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}}$。

（2）

（2.1）不妨设小球两边波动形式为

$$\begin{cases}q_1=A_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x-\omega t)}+A_R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-k_1x-\omega t)} & x<0\\ q_2=A_T\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2x-\omega t)} & x>0\end{cases} \tag{6}$$

其中$k_1=\omega\sqrt{\frac{\lambda_1}{\kappa_1}},k_2=\omega\sqrt{\frac{\lambda_2}{\kappa_2}}$。下面列出$x=0$处两侧的边界方程：

由两侧振幅相同得

$$A_0+A_R=A_T \tag{7}$$

对小球有运动方程

$$m\ddot{q}(0)=\kappa_2\frac{\partial q_2}{\partial x}(0)-\kappa_1\frac{\partial q_1}{\partial x}(0) \tag{8}$$

即

$$-m\omega^2A_T=\mathrm{i}k_2\kappa_2A_T-\mathrm{i}k_1\kappa_1(A_0-A_R) \tag{9}$$

联立（7）（9）式，解得透射、反射复振幅分别为

$$A_T=\frac{2\mathrm{i}k_1\kappa_1}{(\mathrm{i}k_2\kappa_2+\omega^2m)+\mathrm{i}k_1\kappa_1}A_0 \tag{10}$$

$$A_R=\frac{\mathrm{i}k_1\kappa_1-(\mathrm{i}k_2\kappa_2-\omega^2m)}{(\mathrm{i}k_2\kappa_2+\omega^2m)+\mathrm{i}k_1\kappa_1}A_0 \tag{11}$$

所以复振幅透射率为

$$t=\frac{A_T}{A_0}=\frac{2\mathrm{i}k_1\kappa_1}{(\mathrm{i}k_2\kappa_2+\omega^2m)+\mathrm{i}k_1\kappa_1} \tag{12}$$

复振幅反射率为

$$r=\frac{A_R}{A_0}=\frac{\mathrm{i}k_1\kappa_1-(\mathrm{i}k_2\kappa_2-\omega^2m)}{(\mathrm{i}k_2\kappa_2+\omega^2m)+\mathrm{i}k_1\kappa_1} \tag{13}$$

代入$k_1=\omega\sqrt{\frac{\lambda_1}{\kappa_1}}$、$k_2=\omega\sqrt{\frac{\lambda_2}{\kappa_2}}$可得

$$A_T=\frac{2\mathrm{i}\sqrt{\kappa_1\lambda_1}}{\left(\mathrm{i}\sqrt{\kappa_2\lambda_2}+\omega m\right)+\mathrm{i}\sqrt{\kappa_1\lambda_1}}A_0 \tag{14}$$

$$A_R=\frac{-\left(\mathrm{i}\sqrt{\kappa_2\lambda_2}-\omega m\right)+\mathrm{i}\sqrt{\kappa_1\lambda_1}}{\left(\mathrm{i}\sqrt{\kappa_2\lambda_2}+\omega m\right)+\mathrm{i}\sqrt{\kappa_1\lambda_1}}A_0 \tag{15}$$

$$t=\frac{2\mathrm{i}\sqrt{\kappa_1\lambda_1}}{\left(\mathrm{i}\sqrt{\kappa_2\lambda_2}+\omega m\right)+\mathrm{i}\sqrt{\kappa_1\lambda_1}} \tag{16}$$

$$r=\frac{-\left(\mathrm{i}\sqrt{\kappa_2\lambda_2}-\omega m\right)+\mathrm{i}\sqrt{\kappa_1\lambda_1}}{\left(\mathrm{i}\sqrt{\kappa_2\lambda_2}+\omega m\right)+\mathrm{i}\sqrt{\kappa_1\lambda_1}} \tag{17}$$

（2.2）由（5）式，代入入射波、反射波、透射波振幅可得入射能流密度为

$$w_0=\frac{1}{2}\sqrt{\kappa_1\lambda_1}\omega^2A_0^2 \tag{18}$$

反射能流密度为

$$w_R=\frac{1}{2}\sqrt{\kappa_1\lambda_1}\omega^2A_R^2=\frac{1}{2}\sqrt{\kappa_1\lambda_1}\omega^2A_0^2\frac{\left(\sqrt{\kappa_1\lambda_1}-\sqrt{\kappa_2\lambda_2}\right)^2+\omega^2m^2}{\omega^2m^2+\left(\sqrt{\kappa_1\lambda_1}+\sqrt{\kappa_2\lambda_2}\right)^2} \tag{19}$$

透射能流密度为

$$w_T=\frac{1}{2}\sqrt{\kappa_2\lambda_2}\omega^2A_T^2=\frac{1}{2}\sqrt{\kappa_1\lambda_1}\omega^2A_0^2\frac{4\sqrt{\kappa_1\lambda_1}\sqrt{\kappa_2\lambda_2}}{\omega^2m^2+\left(\sqrt{\kappa_1\lambda_1}+\sqrt{\kappa_2\lambda_2}\right)^2} \tag{20}$$

显然有

$$w_T+w_R=w_0 \tag{21}$$

因此验证了能量守恒定律。进一步地，得到能流透射率为

$$T=\frac{w_T}{w_0}=\frac{4\sqrt{\kappa_1\lambda_1}\sqrt{\kappa_2\lambda_2}}{\omega^2m^2+\left(\sqrt{\kappa_1\lambda_1}+\sqrt{\kappa_2\lambda_2}\right)^2} \tag{22}$$

能流反射率为

$$R=\frac{\left(\sqrt{\kappa_1\lambda_1}-\sqrt{\kappa_2\lambda_2}\right)^2+\omega^2m^2}{\omega^2m^2+\left(\sqrt{\kappa_1\lambda_1}+\sqrt{\kappa_2\lambda_2}\right)^2} \tag{23}$$

评分标准：本题满分 40 分。
第（1）问 10 分：（1）（2）（3）（4）（5）式各 2 分；
第（2）问 30 分：
第（2.1）小问 16 分：（6）（7）（8）（9）（14）（15）（16）（17）式各 2 分；
第（2.2）小问 14 分：（18）式 2 分，（19）（20）式各 3 分，（21）（22）（23）式各 2 分。

二、（40 分）半圆柱体的振动

我们考虑一个质量均匀分布的半圆柱体置于水平桌面上，如图2.1所示，其横截面半径为R，圆柱面与桌面接触。记重力加速度为g。

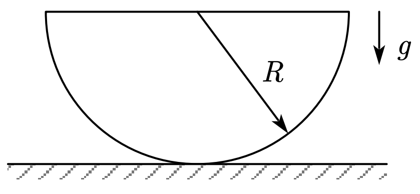
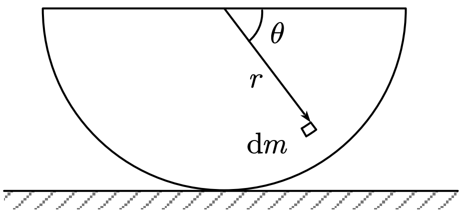


图2.1 半圆柱放置示意图

（1）计算半圆柱体质心与轴线的距离。
（2）如果桌面光滑，给予系统微扰，求半圆柱体振动周期。
（3）如果桌面十分粗糙，给予系统微扰，求半圆柱体振动周期。

解：（1）不妨令圆柱体质量为m。在角度为θ，距轴线r处取质量微元，如答图2.1所示：



答图2.1 体积积分示意图

$$\mathrm{d}m=\frac{\mathrm{d}r\ \cdot r\mathrm{d}\theta}{\frac{1}{2}\pi R^2}m \tag{1}$$

此处高度为

$$h(r,\theta)=r\sin\theta \tag{2}$$

所以质心位置满足

$$mh_c=\int_0^R\int_0^\pi h\mathrm{d}m=\frac{2m}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^\pi r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \tag{3}$$

积分得到

$$h_c=\frac{4}{3\pi}R \tag{4}$$

（2）以半圆柱轴线为轴，半圆柱体的转动惯量为

$$I_o=\frac{1}{2}mR^2 \tag{5}$$

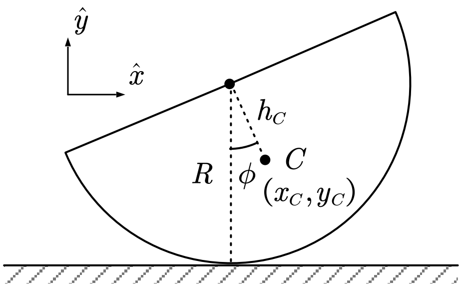
设半圆柱体对于质心的转动惯量为I_c，则由平行轴定理得

$$I_c+mh_c^2=I_o \tag{6}$$

所以

$$I_c=\frac{9\pi^2-32}{18\pi^2}mR^2 \tag{7}$$

再设半圆柱相对于平衡位置偏转角度为ϕ，如答图2.2所示。



答图2.2 圆柱体位形示意图

取平衡位置为重力势能得零点零点，则有

$$E_p=mgy_c \tag{8}$$

其中有

$$y_c=h_c(1-\cos\phi) \tag{9}$$

半圆柱体的动能为

$$E_k=\frac{1}{2}m\dot{y_c}^2+\frac{1}{2}I_c\dot{\phi}^2 \tag{10}$$

由机械能守恒知，

$$E = E_k + E_p = \text{Const} \tag{11}$$

将势能和动能的表达式代入，忽略竖直方向的运动，近似得到

$$E = mgh_c(1-\cos\phi) + \frac{1}{2}I_c\dot{\phi}^2 \tag{12}$$

对上式等号左右同时对时间求导，有

$$mgh_c\sin\phi\,\dot{\phi} + I_c\dot{\phi}\ddot{\phi} = 0 \tag{13}$$

消去 $\dot{\phi}$，并利用$\sin\phi \approx \phi$小量近似得到

$$I_c\ddot{\phi} + mgh_c\phi = 0 \tag{14}$$

所以简谐振动的周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_c}{mgh_c}} \tag{15}$$

代入h_c和I_c，最终结果为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{9\pi^2-32}{24\pi}\cdot\frac{R}{g}} \tag{16}$$

（3）当桌面粗糙时，考虑半圆柱质心的水平运动

$$x_c = R\phi - h_c\sin\phi \tag{17}$$

此时势能表达式与（2）问中的（8）（9）式相同，此时动能为

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\dot{x_c}^2 + \dot{y_c}^2\right) + \frac{1}{2}I_c\dot{\phi}^2 \tag{18}$$

代入总机械能的表达式，忽略竖直方向的运动，近似得到

$$E = mgh_c(1-\cos\phi) + \frac{1}{2}I_c\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m(R-h_c\cos\phi)^2\dot{\phi}^2 \tag{19}$$

对上式等号左右同时对时间求导，有

$$mgh_c\sin\phi\,\dot{\phi} + I_c\dot{\phi}\ddot{\phi} + m(R-h_c\cos\phi)h_c\sin\phi\,\dot{\phi}\cdot\dot{\phi}^2 + m(R-h_c\cos\phi)^2\dot{\phi}\ddot{\phi} = 0 \tag{20}$$

消去 $\dot{\phi}$，并利用$\sin\phi \approx \phi$小量近似化简得到

$$\left(I_c + m(R-h_c)^2\right)\ddot{\phi} + mgh_c\phi = 0 \tag{21}$$

所以简谐振动的周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_c + m(R-h_c)^2}{mgh_c}} \tag{22}$$

代入h_c和I_c，最终结果为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{9\pi-16}{8}\cdot\frac{R}{g}} \tag{23}$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 5 分：（1）（2）（3）式各 1 分，（4）式 2 分；

第（2）问 22 分：（5）式 1 分，（6）（7）（8）（9）式各 2 分，（10）式 1 分，（11）式 2 分，（12）式 3 分，（13）式 1 分，（14）（15）（16）式各 2 分；

第（3）问 13 分：（17）式 1 分，（18）式 2 分，（19）式 3 分，（20）式 1 分，（21）（22）（23）式各 2 分。

三、（40 分）硬币投掷

提到“随机事件”，我们最熟悉的就是“抛硬币”。实际上，硬币落下时到底哪一面朝上，

完全是由抛硬币者所发的力道和硬币本身的质地来决定的。如果我们事先清楚硬币的哪一面较重，并且有能力精确控制自己在抛硬币时所用的力量的话，就能够决定硬币在空中翻转的次数，乃至硬币落下时的结果。因此“抛硬币”并不是随机的。我们来计算一下硬币的转动。

（1）首先推导一般性刚体转动的动力学方程。选取一个与刚体固连的坐标系称为主轴坐标系，三个坐标轴分别用1,2,3表示，设该刚体在这三个方向上的转动惯量分别为I_1, I_2, I_3，三个方向上的角速度分别为$\omega_1, \omega_2, \omega_3$，三个方向上的外力矩分别为$M_1, M_2, M_3$。请推导不受合外力的转动刚体的动力学方程，即利用$\omega, M$和$I$的分量表示出$\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$。

（2）本题中考虑的圆形硬币是对称刚体，在抛硬币时，刚体视为绕质心的自由转动（即外力矩为零），利用上述动力学方程导出刚体对称轴绕角动量方向匀角速度转动的结论，并进一步说明角动量方向和对称轴方向夹角ψ是一个不变量。并求出刚体对称轴绕角动量方向转动的进动角速度ω_0。如图3.1，已知对称轴方向的转动惯量为I_0，其余两个方向的转动惯量为I，角动量大小为L（在导出ψ是不变量的结论以后，可将ψ视为已知量）。

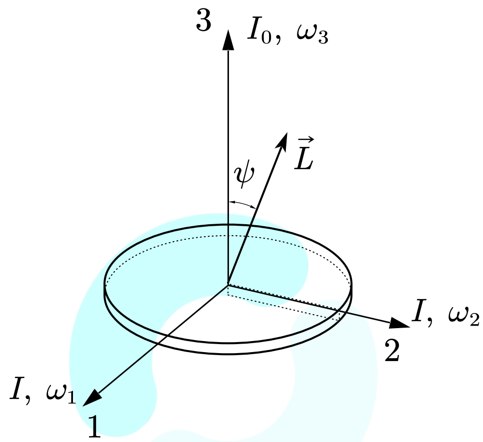


图3.1 硬币的主轴坐标系

（3）抛出硬币时硬币正面朝上，认为硬币抛从出到落地的时间是一个随机数。试导出硬币在抛出前向上的一面在落地后仍然向上的概率，并写为ψ的函数$P(\psi)$。其中ψ为对称轴与角动量方向夹角，为简化运算，认为硬币质量均匀、没有厚度且落地后不会反弹。

（3）抛出硬币时硬币正面朝上，认为硬币抛从出到落地的时间是一个随机数。试导出硬币在抛出前向上的一面在落地后仍然向上的概率，并写为ψ的函数$P(\psi)$。其中ψ为对称轴与角动量方向夹角，为简化运算，认为硬币质量均匀、没有厚度且落地后不会反弹。

解：（1）对任意矢量$\vec{A}$，有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{iner}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{A} \tag{1}$$

其中角标为 iner 指在惯性系中求导，角标在 rot 指在转动的坐标架下求导。将角动量矢量$\vec{L}$代入上式可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{iner}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rot}} + \vec{\omega} \times \vec{L} \tag{2}$$

带入角速度ω，展开为分量式得

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{3}$$

由角动量定理可知

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M} \tag{4}$$

得到动力学方程为

$$I_1\dot{\omega}_1=M_1+(I_2-I_3)\omega_2\omega_3 \tag{5}$$

$$I_2\,\dot{\omega}_2=M_2+(I_3-I_1)\omega_3\omega_1 \tag{6}$$

$$I_3\dot{\omega}_3=M_3+(I_1-I_2)\omega_1\omega_2 \tag{7}$$

（2）将$I_3=I_0,I_1=I_2=I$以及$M_1=M_2=M_3=0$代入（5）（6）（7）式，得到

$$\dot{\omega}_3=0,\ \ \omega_3=\mathrm{Const} \tag{8}$$

$$\dot{\omega}_1=\frac{I-I_0}{I}\omega_3\omega_2 \tag{9}$$

$$\dot{\omega}_2=\frac{I_0-I}{I}\omega_3\omega_1 \tag{10}$$

同时，角动量在对称轴方向上的分量大小为

$$I_0\omega_3=L\cos\psi \tag{11}$$

将（11）式代入（9）（10）式，因此有

$$\dot{\omega}_1=\frac{(I-I_0)L\cos\psi}{II_0}\ \omega_2 \tag{12}$$

$$\dot{\omega}_2=-\frac{(I-I_0)L\cos\psi}{II_0}\ \omega_1 \tag{13}$$

经观察发现

$$\omega_1^2+\omega_2^2=\mathrm{Const} \tag{14}$$

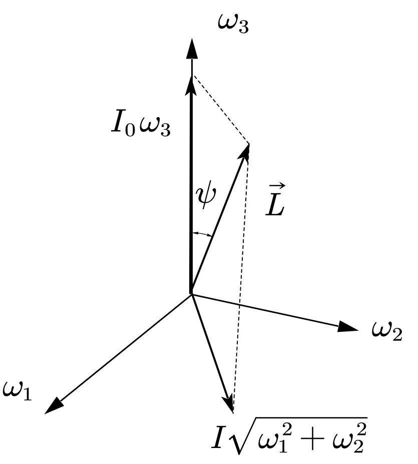
$$\tan\psi=\frac{I\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}{I_0\omega_3} \tag{15}$$

因此，ψ为一个不变的常数。由（12）（13）式可解得ω_1,ω_2随时间变化的关系为

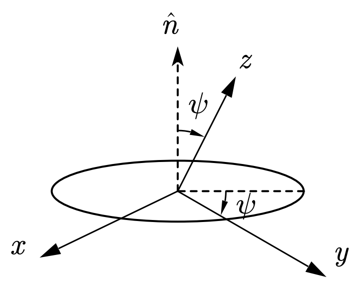
$$\begin{cases}\omega_1(t)=A\sin\left[\dfrac{(I-I_0)L\cos\psi}{II_0}t+\phi_0\right]\\ \omega_2(t)=A\cos\left[\dfrac{(I-I_0)L\cos\psi}{II_0}t+\phi_0\right]\end{cases} \tag{16}$$

其中A,ϕ_0为由初始条件决定的常数。所以刚体对称轴绕角动量方向旋转的进动角速度为

$$\omega_0=\left|\frac{(I-I_0)L\cos\psi}{II_0}\right| \tag{17}$$



答图3.1 主轴坐标系中的角速度分解



答图3.2 硬币法向量示意图

（3）建立如答图3.2所示的坐标架，其中$\hat{n}$为硬币的法向量，根据题意初始时刻竖直向上；z轴为角动量方向，由角动量守恒知其方向不会改变；x轴与z轴正交且位于水平面内，y轴与x,z轴正交，正方向由右手法则确定。

根据题意，硬币抛出后在空中做自由转动，落地时间为随机数；由（2）问中的结论可知，硬币的对称轴（即法向量$\hat{n}$）绕角动量$\vec{L}$的方向做匀角速度进动。假设硬币的法向量绕z轴转动β角，则$\hat{n}(\beta)$的分量式为

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\psi \\ \cos\psi \end{bmatrix} \tag{18}$$

由几何关系知当$\vec{n}(\beta)\cdot(0,\sin\psi,-\cos\psi)<0$时，落地时正面朝上；反之则反面朝上。所以考虑临界情况$\hat{n}(\beta_0)\cdot(0,\sin\psi,-\cos\psi)=0$下$\beta_0$和$\psi$的关系。得到在$\frac{\pi}{4}<\psi\le\frac{\pi}{2}$时

$$\cos\beta_0 = -\cot^2\psi \tag{19}$$

当$-\beta_0<\beta<\beta_0$时硬币会以正面朝上落地，所以正面朝上的概率为

$$P(\psi) = \frac{2\beta_0}{2\pi} \tag{20}$$

代入（19）式，得到

$$P(\psi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sin^{-1}(\cot^2\psi) \tag{20}$$

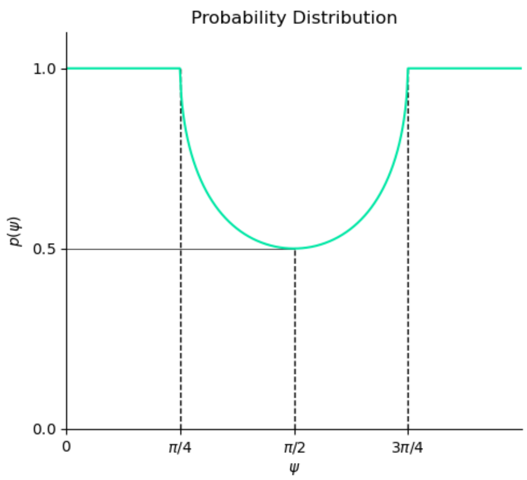
在$0\le\psi\le\frac{\pi}{4}$时

$$P(\psi) = 1 \tag{21}$$

综上，硬币落地后原先朝上的一面仍然朝上的概率为

$$P(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sin^{-1}(\cot^2\psi), & \frac{\pi}{4}<\psi\le\frac{\pi}{2} \\ 1, & 0\le\psi\le\frac{\pi}{4} \end{cases} \tag{22}$$

作图如下：



答图3.3 概率分布函数图

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 14 分：（2）（3）（4）（5）（6）（7）式各 2 分；

第（2）问 14 分：（8）（9）（10）（11）式各 2 分，（12）（13）（14）（15）式各 1 分，（17）

式 2 分；

第（3）问 12 分：（18）（19）（20）（21）（22）式各 2 分，作图 2 分。

四、（40 分）新概念等时圆

在光滑的水平面上放置一个光滑斜劈，质量为M，如图4.1所示。现从其最高点A点处静止释放一质点，质点质量为m，斜面的最低点为B点，B点位于水平面高度。

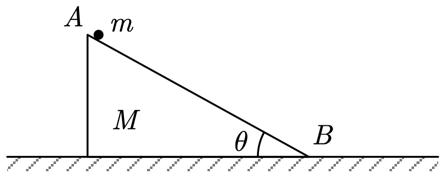


图4.1 斜劈与质点示意图

（1）若斜劈被固定在桌面上不能左右移动；已知质点从A点运动到B点用时为T，试求斜劈长度$|AB|$与其斜面倾角θ的关系。

（2）若斜劈没有被固定在桌面上，可以在桌面上自由滑动；设斜面倾角为θ，A点高度为H，求质点从A点运动到B点的用时t。

（3）仍假设斜劈可以自由滑动，质点从A点运动到B点用时为T。设初始时刻B点位于坐标系原点处，能使得运动时间为T的A点有多个。求出所有可能的A点位置构成的形状。

解：（1）当斜劈被固定时，容易知道质点沿斜面下滑作匀加速运动，加速度大小为

$$a = g\sin\theta \tag{1}$$

运动时间为T，所以位移也即斜面长度为

$$|AB| = \frac{1}{2}aT^2 = \frac{1}{2}gT^2\sin\theta \tag{2}$$

（2）设质点在斜劈系中位移为s，速率为v，斜劈速率为v_M；由水平动量守恒知

$$Mv_M = m(v\cos\theta - v_M) \tag{3}$$

即

$$v_M = \frac{m}{M+m}v\cos\theta \tag{4}$$

由机械能守恒知

$$\frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}m(v_M^2 + v^2 - 2v_M v\cos\theta) = mgs\sin\theta \tag{5}$$

代入(4)式，得到

$$v^2 = \frac{2(M+m)gs\sin\theta}{M+m\sin^2\theta} \tag{6}$$

对(6)式两侧同时求导，利用$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，得到

$$2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{2(M+m)g\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{2(M+m)g\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}v \tag{7}$$

即得到质点做匀加速运动，加速度为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{(M+m)g\sin\theta}{M+m\sin^2\theta} \tag{8}$$

所以下滑用时为

$$t=\sqrt{\frac{2H/\sin\theta}{a}}=\sqrt{\frac{M+m\sin^2\theta}{(M+m)\sin^2\theta}\frac{2H}{g}} \tag{9}$$

（3）设轨道长度为L，倾角为θ，利用上一问中求得的加速度可知

$$L=\frac{1}{2}aT^2=\frac{(M+m)\sin\theta}{2(M+m\sin^2\theta)}gT^2 \tag{10}$$

以B点为原点，向上为y轴正方向，则A点坐标为

$$x_A=L\cos\theta\,,y_A=L\sin\theta \tag{11}$$

所以有

$$L=\sqrt{x^2+y^2},\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{12}$$

将上式代入（10）式，化简得到

$$\frac{x_A^2}{(M+m)/M}+y_A^2-\frac{1}{2}gT^2y_A=0 \tag{13}$$

该式可以化为椭圆方程

$$\frac{x_A^2}{\left(\sqrt{\frac{M+m}{M}}\right)^2}+\left(y_A-\frac{1}{4}gT^2\right)^2=\left(\frac{1}{4}gT^2\right)^2 \tag{14}$$

所以所有可能的A点构成了一个“等时椭圆”，该椭圆的长轴$a=\frac{1}{4}gT^2\sqrt{\frac{M+m}{m}}$，短轴$b=\frac{1}{4}gT^2$，椭心位于$\left(0,\frac{1}{4}gT^2\right)$。

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 5 分：（1）式 2 分，（2）式 3 分；

第（2）问 12 分：（3）（4）式各 1 分，（5）（6）（7）（8）（9）各 2 分；

第（3）问 23 分：（10）式 4 分，（11）式 3 分，（12）（13）（14）式各 4 分，说明是椭圆及相关的几何参数 4 分。

五、（40分）Schockley-James佯谬

如图5.1所示，光滑水平面上有半径为r的电流环，以及距环心$R(R\gg r)$处的点电荷$Q(Q>0)$。初始时刻电流环通以（逆时针方向）电流I_0，某时刻开始让圆环电流迅速减小至0（过程中的电磁辐射可以忽略不计），接下来我们想研究过程中圆环与电荷受到的冲量以及它们的来源。

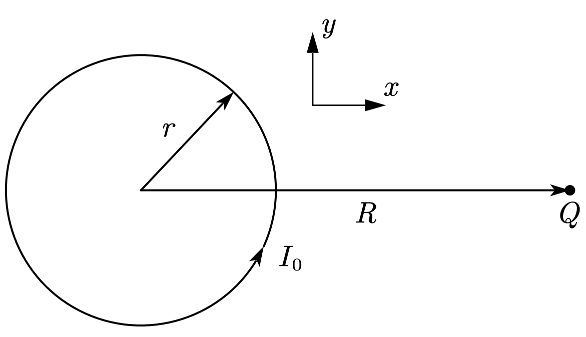


图5.1 电流环点电荷系统示意图

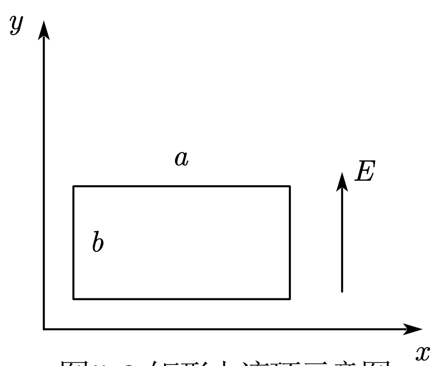


图5.2 矩形电流环示意图

（1）求解在电流减小的过程中电荷Q受到的冲量，并指出它的来源。

提示： 计算点电荷处的感应电场可以考虑在半径为R的位置构造一个圆形环路，利用互感法计算环路上的磁通量，从而得到感应电场。

（2）根据系统动量守恒，我们理应得出电流环受到的冲量，但是它的来源似乎不好直接看出（事实上，这一冲量来自于相对论效应），下面我们来研究这一冲量的来源。

（2.1）如图5.2所示，先考虑一长为a，宽为b的矩形电流环，通有逆时针方向的电流i，电场沿y轴方向，考虑相对论效应，载流子在不同区域的动量略有差别，由此，求出环内载流子的总动量$\vec{p}$，设载流子静质量为m_0。

（2.2）给出题目过程中电流环受到的冲量，并指出其来源。

提示：考虑电流环面积微元叠加。

解：（1）根据题目中的提示，构造半径为R的圆形环路并设该环路上有电流I'，则小磁矩上由该电流产生的磁通量为

$$\Phi' = \pi r^2 \cdot \frac{\mu_0 I'}{2R} = \frac{\pi\mu_0 r^2}{2R} I' \tag{1}$$

所以大小圆环之间的互感系数为

$$L = \frac{\Phi'}{I'} = \frac{\pi\mu_0 r^2}{2R} \tag{2}$$

相应地，圆环内由小磁矩上电流产生的磁通量为

$$\Phi = LI = \frac{\pi\mu_0 r^2}{2R} I = \frac{\mu_0 m}{2R} \tag{3}$$

所以点电荷处的感应电场为

$$E = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu_0}{4\pi R^2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

由此得到点电荷受到的冲量

$$I = \int QE\mathrm{d}t = \frac{\mu_0 Q m}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 Q I_0 r^2}{4R^2}\hat{y} \tag{5}$$

方向向上，此冲量来自于初始时刻的电磁场动量转化。

（2）

（2.1）不妨假设载流子电荷为q，由对称性可以看出，左右两条边载流子动量大小相同，方向相反，可以抵消，故总动量进来自于上下两条边的贡献。

设上方载流子密度N_+，速度u_+；下方载流子密度N_-，速度u_-，电流连续性方程要求

$$N_+ u_+ = N_- u_+ = \frac{ia}{q} \tag{6}$$

引入

$$\gamma_+ = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u_+}{c}\right)^2}} \tag{7}$$

$$\gamma_- = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u_-}{c}\right)^2}} \tag{8}$$

电子移动过程中电场做功，上方载流子与下方载流子有能量关系

$$qEb = m_0 c^2(\gamma_+ - \gamma_-) \tag{9}$$

并且总动量为

$$p = p_- - p_+ = N_- u_- m_0 \gamma_- - N_+ u_+ m_0 \gamma_+ \tag{10}$$

联立（6）（9）（10）式得到

$$\vec{p}=-\frac{Eiab}{c^2}\vec{x} \tag{11}$$

（2.2）对于（2.1）中情况可以将（11）矢量化

$$p=\frac{\vec{m}\times\vec{E}}{c^2} \tag{12}$$

则对于题目中的情况，可以将圆环分为无穷个无穷小矩形电流环，则有

$$\vec{p}=\int\frac{\mathrm{d}\vec{m}\times\vec{E}}{c^2}=\frac{\vec{m}\times\vec{E}}{c^2} \tag{13}$$

代入

$$m=\pi r^2 I_0\hat{z}$$

以及

$$\vec{E}=-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{x} \tag{14}$$

得到隐藏动量

$$\vec{p}=-\frac{\mu_0 Q I_0 r^2}{4R^2}\hat{y} \tag{15}$$

则电流环受到的冲量为

$$\vec{J}=-\frac{\mu_0 Q I_0 r^2}{4R^2}\hat{y} \tag{16}$$

冲量来自于电流环内载流子的隐藏动量。

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 14 分：（1）（2）（3）式各 2 分（4）（5）式各 3 分；解释来源 2 分；

第（2）问 26 分：

第（2.1）小问 15 分：（6）（7）（8）式各 2 分；（9）（10）（11）式各 3 分；

第（2.2）小问 11 分：（12）式 1 分；（13）（14）（15）（16）式各 2 分；解释来源 2 分。

六、（40 分）电场中的介质球

本题中真空中存在场强为E_0的匀强电场。

（1）如图6.1所示，考虑一个真空中半径为R，相对介电常数为ε_r的均匀介质球。求球心处的电场。

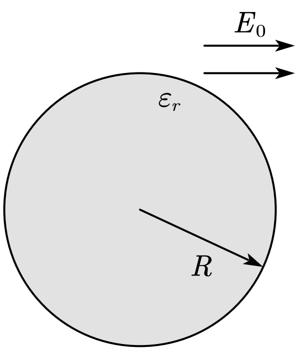


图6.1 匀强电场与介质球

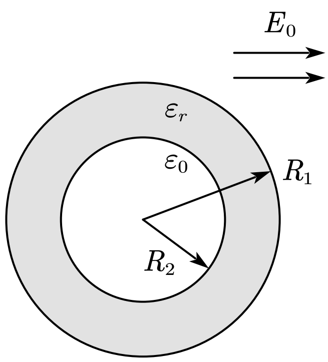


图6.2 匀强电场与中空介质球

（2）如图6.2所示，考虑一个真空中的均匀介质球壳，其外半径为R_1，内半径为R_2，相对介电常数为ε_r。求球心处的电场。

提示：可将空间中的电场猜解为匀强场与偶极子场的叠加，即对于空间中一点，电势可表示为

$$U(r,\theta)=\left(Ar+\frac{B}{r^2}\right)\cos\theta$$

其中A，B为待定常数，r为场点到球心的距离，θ为球心到场点的连线与电场E_0正方向的夹角。

解：（1）不妨设介质球外部的电势分布为

$$U_1=\left(A_1r+\frac{B_1}{r^2}\right)\cos\theta \tag{1}$$

介质球内部的电势分布为

$$U_2=\left(A_2r+\frac{B_2}{r^2}\right)\cos\theta \tag{2}$$

下面考虑待定常数的求解：考虑在无穷远处上述电势的分布趋近于匀强电场E_0，有

$$A_1=-E_0 \tag{3}$$

考虑球心处电势不能发散，有

$$B_2=0 \tag{4}$$

考虑$r=R$处介质球内外电势连续，有

$$A_1R+\frac{B_1}{R^2}=A_2R+\frac{B_2}{R^2} \tag{5}$$

由于径向电场可以表示为

$$E_r=-\frac{\partial U}{\partial r} \tag{6}$$

代入电势的猜解，即

$$E_r=\left(-A+\frac{2B}{r^3}\right)\cos\theta \tag{7}$$

由$r=R$处的法向边界条件知$D_{1r}=D_{2r}$，所以

$$-A_1+\frac{2B_1}{R^3}=\varepsilon_r\left(-A_2+\frac{2B_2}{R^3}\right) \tag{8}$$

联立（3）（4）（5）（8）式，可解得

$$A_2=-\frac{3}{\varepsilon_r+2}E_0 \tag{9}$$

所以球心处电场为

$$E_c=\frac{3}{\varepsilon_r+2}E_0 \tag{10}$$

其方向与E_0相同。

（2）不妨设介质球壳外部的电场分布为

$$U_1=\left(A_1r+\frac{B_1}{r^2}\right)\cos\theta \tag{11}$$

介质球壳中的电场分布为

$$U_2=\left(A_2r+\frac{B_2}{r^2}\right)\cos\theta \tag{12}$$

介质球壳内部的电场分布为

$$U_3=\left(A_3r+\frac{B_3}{r^2}\right)\cos\theta \tag{13}$$

下面考虑待定常数的求解：考虑在无穷远处上述电势的分布趋近于匀强电场E_0，有

$$A_1=-E_0 \tag{14}$$

考虑球心处电势不能发散，有

$$B_3 = 0 \tag{15}$$

考虑$r = R_1$处介质球壳和外部电势连续，有

$$A_1R_1 + \frac{B_1}{R_1^2} = A_2R_1 + \frac{B_2}{R_1^2} \tag{16}$$

由$r = R_1$处的法向边界条件知$D_{1r} = D_{2r}$，所以

$$-A_1 + \frac{2B_1}{R_1^3} = \varepsilon_r\left(-A_2 + \frac{2B_2}{R_1^3}\right) \tag{17}$$

考虑$r = R_2$处介质球壳和内部电势连续，有

$$A_3R_2 + \frac{B_3}{R_2^2} = A_2R_2 + \frac{B_2}{R_2^2} \tag{18}$$

由$r = R_2$处的法向边界条件知$D_{3r} = D_{2r}$，所以

$$-A_3 + \frac{2B_3}{R_2^3} = \varepsilon_r\left(-A_2 + \frac{2B_2}{R_2^3}\right) \tag{19}$$

联立（14）（15）（16）（17）（18）（19）式，可解得

$$A_3 = -\frac{9\varepsilon_r}{(2\varepsilon_r + 1)(\varepsilon_r + 2) - 2(\varepsilon_r - 1)^2\frac{R_2^3}{R_1^3}}E_0 \tag{20}$$

所以球心处电场为

$$E_c = \frac{9\varepsilon_r}{(2\varepsilon_r + 1)(\varepsilon_r + 2) - 2(\varepsilon_r - 1)^2\frac{R_2^3}{R_1^3}}E_0 \tag{21}$$

其方向与E_0相同。

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 19 分：（1）（2）（3）（4）式各 1 分，（5）（6）式各 2 分，（7）式 3 分，（8）式 2 分，（9）式 4 分，（10）式 2 分；

第（2）问 21 分：（11）（12）（13）（14）（15）式各 1 分，（16）（17）（18）（19）式各 2 分，（20）式 6 分，（21）式 2 分。

注：若（10）式正确但未说明电场方向，扣 1 分，（21）式同理。

七、（40 分）偏心球

（1）将电量分别为$\pm Q$的点电荷放置在x轴上，位置分别为$x = \pm\frac{a}{2}$。在空间中形成如图7.1的等势面簇。以$\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$处为原点建立极坐标系，极轴与$x$轴方向相同。在第（1）问中只用计算$xOy$平面上的电势分布。

（1.1）在极坐标下，设电势为φ_0的等势线满足方程$f(r,\theta) = 0$，求$f(r,\theta)$。

（1.2）利用近似，求出$(x,y) = \left(-\frac{a}{2}, 0\right)$（即负电荷所在位置）处附近的等势线形状，如图7.2所示。

提示：极坐标下偏心的圆方程为$r^2 - 2r\delta\cos\theta + \delta^2 = \text{Const}$，其中圆心在极轴上，与极坐标系的原点相距$\delta$。

（2）利用以上结论，完成下面的问题。

（2.1）现在考虑另一个问题，真空中有一个同心球形电容器，两金属球壳的半径分别为R_1, R_2（$R_1 < R_2$，二者同量级）。直接写出电容的大小C_0。

（2.2）实际情况下，电容器做工有稍有缺陷，导致两个球的球心相距了一个微小的距离d（$d \ll R_1, R_2$）；再求该系统的电容大小C。

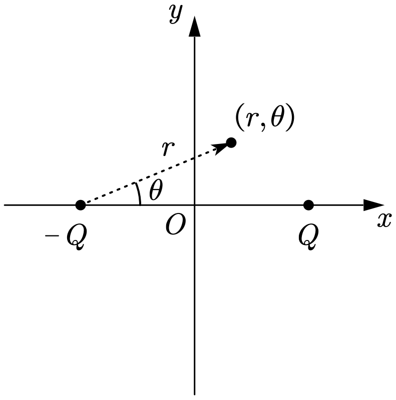


图7.1 电荷系统示意图

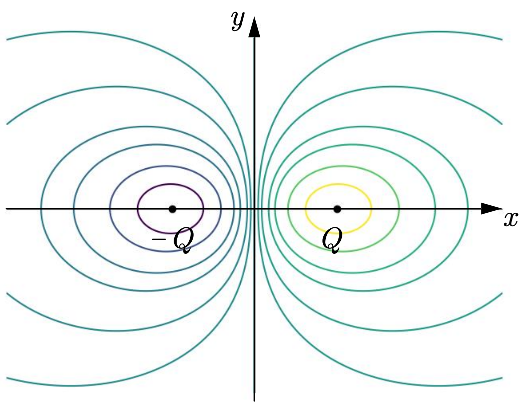


图7.2 等势线示意图

解：（1）

（1.1）容易知道场点(r,θ)与正负电荷的距离分别为

$$r_- = r \quad r_+ = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta} \tag{1}$$

因此以无穷远处为零点，(r,θ)处的电势为

$$\varphi(r,\theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}} - \frac{1}{r}\right) \tag{2}$$

所以电势为φ的等势线方程为

$$f(r,\theta) = 0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta}} - \frac{1}{r}\right) - \varphi_0 \tag{3}$$

（1.2）本文探究$\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$附近的电势分布，因此有$r \ll a$。将（3）式右侧用const代替，并且利用$r \ll a$近似，则有

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\left(1 + \frac{r}{a}\cos\theta\right) = \text{const} \tag{4}$$

即

$$r - \frac{r^3}{a^2}\cos\theta = Cr^2 \tag{5}$$

其中C是一个常数。注意到零阶近似下该方程的解可以被写为$r = \frac{1}{C}$，可以令一阶近似下$r(\theta) = \frac{1}{C} + \Delta(\theta)$，代入方程近似后解得

$$r(\theta) \approx \frac{1}{C} - \frac{1}{C^3 a^2}\cos\theta \tag{6}$$

不妨令$R = \frac{1}{C}$，所以负电荷附近等势线的形状可以近似为

$$r(\theta) = R - \frac{R^3}{a^2}\cos\theta \tag{7}$$

考虑到该曲线与圆$r(\theta) = R$较为相似，猜测其可能是一个偏心圆，利用题目中的提示，偏心圆方程为

$$R = \sqrt{r^2 + \delta^2 - 2r\delta\cos\theta} \approx r - \delta\cos\theta \tag{8}$$

对比（7）（8）式，发现等势线确实是一簇偏心圆，其圆心相对于$\left(-\frac{a}{2},0\right)$向外（即$-x$方向）移动了$\frac{R^3}{a^2}$距离，其中$R$是对应的偏心圆的半径。

注：本问也可以采用其他图形的近似，如椭圆；但是利用椭圆近似计算出的等势线形状离心率的大小相对于椭心偏移距离是高阶小量，因此最终等价于圆近似。

（2）

（2.1）直接写出电容

$$C_0 = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2-R_1} \tag{9}$$

（2.2）注意到本问中的系统是两个偏心球，而第（1.2）问中恰好计算出了近似情况下的偏心球等势面簇，所以考虑在本问中构建类似第（1.2）问中系统的电像来解决问题。

设想有两个点电荷，电量分别为$\pm Q$，其中电量为$-Q$的点电荷位于小球壳内部，电量为Q的点电荷位于大球壳外部，两个电荷相距为a（$a \gg R_1,R_2$）且都位于大小球壳的球心连线（及其延长线）上。大、小球壳恰好是这两个电荷产生的电场中的两个等势面。根据第（1.2）问的结论，负电荷与两个球壳的球心分别相距

$$\delta_1 = \frac{R_1^3}{a^2}\quad \delta_2 = \frac{R_2^3}{a^2} \tag{10}$$

由几何关系，需要满足

$$\delta_2-\delta_1 = \frac{1}{a^2}(R_2^3-R_1^3) = d \tag{11}$$

解得

$$a = \sqrt{\frac{1}{d}(R_2^3-R_1^3)} \tag{12}$$

接下来计算这个系统中两个球壳的电势差即可：

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{R_1-\delta_1}-\frac{1}{a-R_1+\delta_1}\right)-\left(\frac{1}{R_2-\delta_2}-\frac{1}{a-R_2+\delta_2}\right)\right] \tag{13}$$

注意到有$\delta_1 \sim \delta_2 \ll R_1 \sim R_2 \ll a$，该式小量近似时需展开到二阶，最终保留至首阶非零小量

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{R_2^2-R_1^2}{a^3}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+(R_2^2-R_1^2)\sqrt{\frac{d}{R_2^3-R_1^3}}^{\,3}\right] \tag{14}$$

所以该系统的电容大小为

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \approx 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\left[1-R_1R_2(R_1+R_2)\sqrt{\frac{d}{R_2^3-R_1^3}}^{\,3}\right] \tag{15}$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 15 分：

第（1.1）小问 5 分：（1）式 2 分，（2）式 1 分，（3）式 2 分；

第（1.2）小问 10 分：（4）（5）式各 2 分，（6）式或（7）式写出其一即得 2 分，（8）式两分，分析形状为偏心圆得 2 分；

第（2）问 25 分：

第（2.1）小问 5 分：（9）式 5 分；

第（2.2）小问 20 分：说明构造电像得 2 分，（10）（11）（12）式各 2 分，（13）式 3 分，（14）式 6 分，（15）式 3 分。

八、（40 分）

如图8.1所示，平面内固定有两个光滑绝缘圆环，二者环心均在O点，半径分别r和R（$R>r$）。两圆环上分别串有光滑绝缘小球，小球可沿圆环无摩擦滑动，其中半径为r的圆环上串的小球B带有正电荷Q，质量为m_1；半径为R的圆环上串的小球A不带电，质量为m_2。两小球之间以绝缘轻质弹性绳连接，弹性绳劲度系数为k，自由长度极短，可忽略不计。

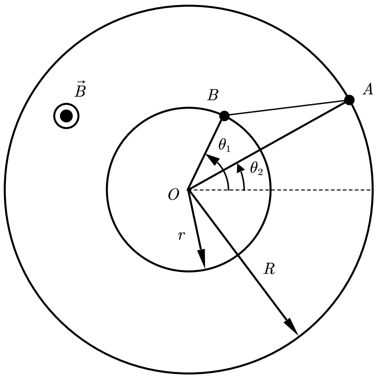


图8.1 圆环与质点示意图

初始状态下，两小球处于静止状态，此时弹性绳长度为$R-r$，半径为R的圆环内有垂直于纸面向外的匀强磁场，磁感应强度为B。在$t=0$时刻，保持磁感应强度大小不变而使磁场方向突然反向，即突变为垂直于纸面向内的匀强磁场 B。在某$t>0$时刻，设内环上的小球相对初始位置的角位移为θ_1，外环上的小球相对初始位置角位移为θ_2，均以逆时针为正方向，试求$\theta_1(t),\theta_2(t)$。为了便于求解，认为$k\gg\frac{Q^2B^2}{m}$（m_1与m_2同量级），保留至$\sqrt{\frac{Q^2B^2}{mk}}$的一阶项。

解：磁场的变化产生涡旋电场

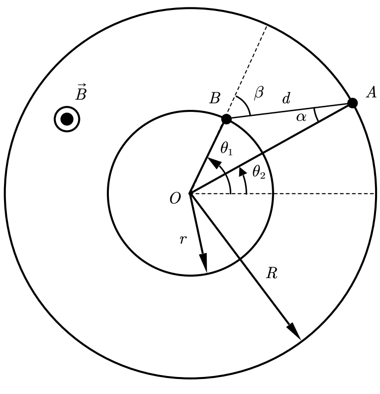
$$E=\frac{r}{2}\frac{\Delta B}{\Delta \mathrm{t}} \tag{1}$$

以O为参考点，涡旋电场对小球B施加的冲量矩为

$$J=\Sigma QE\Delta t\times r=Qr^2B \tag{2}$$

使小圆上的带电小球获得角速度

$$\omega=\frac{J}{m_1r^2}=\frac{QB}{m_1} \tag{3}$$



答图8.1 质点运动位置

如答图8.1所示，在三角形 AOB 中，由正弦定理知

$$\frac{d}{\sin(\theta_1-\theta_2)}=\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin\beta}\tag{4}$$

分别对m_1,m_2列角动量定理。略去弹性绳绳长。

$$m_1r^2\ddot{\theta}_1=-kd\sin\beta\times r\tag{5}$$

$$m_2R^2\ddot{\theta}_2=kd\sin\alpha\times R\tag{6}$$

联立（4）（5）（6）式得到

$$\ddot{\theta}_1=-\frac{kR}{m_1r}\sin(\theta_1-\theta_2)\tag{7}$$

$$\ddot{\theta}_2=\frac{kr}{m_2R}\sin(\theta_1-\theta_2)\tag{8}$$

将（8）（9）两式相减得到

$$\frac{\mathrm{d}^2(\theta_1-\theta_2)}{\mathrm{d}t^2}=-k\left(\frac{R}{m_1r}+\frac{r}{m_2R}\right)\sin(\theta_1-\theta_2)\tag{9}$$

同时m_1,m_2组成的系统相对于O角动量守恒。

$$m_1r^2\dot{\theta}_1+m_2R^2\dot{\theta}_2=m_1r^2\omega\tag{10}$$

令$\psi=\theta_1-\theta_2$，$\omega_0=\sqrt{\frac{k(m_2R^2+m_1r^2)}{m_1m_2rR}}$；利用$\ddot{\psi}=\frac{\dot{\psi}\mathrm{d}\dot{\psi}}{\mathrm{d}\psi}$并积分可得

$$\dot{\psi}^2=\omega^2-2\omega_0^2(1-\cos\psi)\tag{11}$$

由于$\omega_0\gg\omega$，因此$(1-\cos\psi)\ll1$。利用$1-\cos\psi\approx\frac{1}{2}\psi^2$近似可得

$$\dot{\psi}^2+\omega_0^2\psi^2=\omega^2\tag{12}$$

由初始条件知，当$t=0$时，$\psi=0,\dot{\psi}=\omega$，所以

$$\psi=\frac{\omega}{\omega_0}\times\sin\omega_0t\tag{13}$$

联立（10）（13）式得到

$$\dot{\theta}_1=\frac{m_1r^2}{m_2R^2+m_1r^2}\omega+\frac{m_2R^2}{m_2R^2+m_1r^2}\omega\cos\omega_0t\tag{14}$$

$$\dot{\theta}_2=\frac{m_1r^2}{m_2R^2+m_1r^2}\omega(1-\cos\omega_0t)\tag{15}$$

因此，再次积分得到：

$$\theta_1=\frac{m_1r^2}{m_2R^2+m_1r^2}\omega t+\frac{m_2R^2}{m_2R^2+m_1r^2}\frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0t\tag{16}$$

$$\theta_2=\frac{m_1r^2}{m_2R^2+m_1r^2}\omega t-\frac{m_1r^2}{m_2R^2+m_1r^2}\frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0t\tag{17}$$

其中$\omega=\frac{QB}{m_1},\omega_0=\sqrt{\frac{k(m_2R^2+m_1r^2)}{m_1m_2rR}}$。

评分标准：本题满分 40 分。

（1）（2）（3）（4）（5）（6）（7）（8）（9）式各 2 分，（10）式 4 分，（11）（12）（13）（14）（15）式各 2 分，（16）（17）式各 4 分。

版权信息

命题人

曹云博 付亦轩 李天笑 魏哲宇

审题人

曹云博 付亦轩 李天笑 魏哲宇

联系方式

微信公众号
CPHOS

官方网站
cphos.cn

CPHOS 论坛
cphos.cn/index.php/community

邮箱
service@cphos.cn

微信小程序
CPHOS 物理竞赛联考