第 1 届 CPHOS 物理竞赛基础联考

力电卷试题

本文件于 2024 年 12 月 21 日 8: 00 发布，最后更新于 2024 年 12 月 20 日 22: 40 。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

答题卡上传	阅卷
2024/12/21 8:00 - 2024/12/24 18:00	2024/12/25 8:00 - 2025/1/3 18:00

非正式成绩	成绩申诉	正式成绩
2025/1/3 18:00	2025/1/3 18:00 - 2025/1/4 18:00	2025/1/4 22:00

考生须知

1. 力电卷试题共 **6** 页，力电卷答题卡共 **8** 页，答题时间 **180** 分钟，试题满分 **320** 分。
2. 请在答题卡的指定答题区域内答题，试题和草稿纸上的内容将不会作为评分参考，不可申请答题卡加页。
3. 若发现试题存在问题，请向领队（教练）反映，由其转达至相关微信群聊。
4. 试题答案及相关分析均会在官方网站 www.cphos.cn 上发布。
5. 本次考试定位难度为基础卷。

一、（40分）波的反射与透射

本题只考虑弹性体中的纵波，不考虑横波。

如图1.1，两根半无限长、质量线密度分别为λ_1、λ_2，张力系数为κ_1、κ_2的弹性体，中间由一个质量为m 的小球连接，设小球所在位置为x轴坐标原点。弹性体上的质点沿着弹性体方向振动，记位于x处的质点在t时刻相对于平衡位置的位移为$q(x,t)$。本题想要研究这个弹性体上波动的情况。

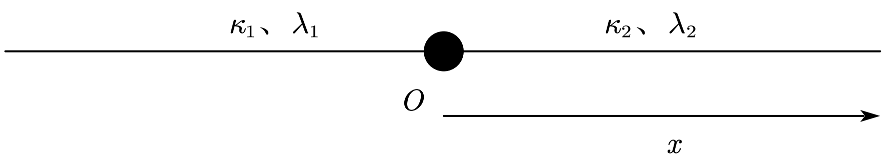

图1.1 弹性体与质点

（1）先考虑一个质量线密度为λ，张力系数为κ的弹性体，请推导出弹性体纵波波动的波动方程，并给出波动方程的一般解，写为复数形式。并求出能流密度。设波振幅为A，角频率为ω。

提示：波的能流密度定义为平均能量密度与波速的乘积。

（2）现在考虑波在图中体系的入射和反射。设从左侧入射波的波动方程为

$$q_0(x,t) = A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 x - \omega t)},\ \ x < 0$$

其中A_0为实数，通过（1）问的结论可得到k_1；设反射波的复振幅为A_R，透射波的复振幅为A_T。（默认振幅包含相位信息）

（2.1）写出$x = 0$处所满足的边界条件，并利用边界条件求出A_R和A_T，以及复振幅反射率r

和复振幅透射率t。

（2.2）求出入射波的能流密度w_0、反射波的能流密度w_r、透射波的能流密度w_t，验证能量守恒定律。并给出能流反射率R和能流透射率T。

二、（40 分）半圆柱体的振动

我们考虑一个质量均匀分布的半圆柱体置于水平桌面上，如图2.1所示，其横截面半径为R，圆柱面与桌面接触。记重力加速度为g。

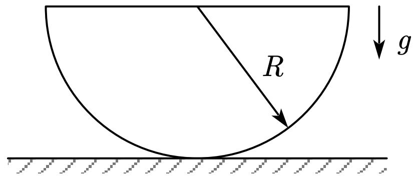

图2.1 半圆柱放置示意图

（1）计算半圆柱体质心与轴线的距离。

（2）如果桌面光滑，给予系统微扰，求半圆柱体振动周期。

（3）如果桌面十分粗糙，给予系统微扰，求半圆柱体振动周期。

三、（40 分）硬币投掷

提到“随机事件”，我们最熟悉的就是“抛硬币”。实际上，硬币落下时到底哪一面朝上，完全是由抛硬币者所发的力道和硬币本身的质地来决定的。如果我们事先清楚硬币的哪一面较重，并且有能力精确控制自己在抛硬币时所用的力量的话，就能够决定硬币在空中翻转的次数，乃至硬币落下时的结果。因此“抛硬币”并不是随机的。我们来计算一下硬币的转动。

（1）首先推导一般性刚体转动的动力学方程。选取一个与刚体固连的坐标系称为主轴坐标系，三个坐标轴分别用1,2,3表示，设该刚体在这三个方向上的转动惯量分别为I_1,I_2,I_3，三个方向上的角速度分别为$\omega_1,\omega_2,\omega_3$，三个方向上的外力矩分别为$M_1,M_2,M_3$。请推导不受合外力的转动刚体的动力学方程，即利用$\omega,M$和$I$的分量表示出$\dot{\omega}_1,\dot{\omega}_2,\dot{\omega}_3$。

（2）本题中考虑的圆形硬币是对称刚体，在抛硬币时，刚体视为绕质心的自由转动（即外力矩为零），利用上述动力学方程导出刚体对称轴绕角动量方向匀角速度转动的结论，并进一步说明角动量方向和对称轴方向夹角ψ是一个不变量。并求出刚体对称轴绕角动量方向转动的进动角速度ω_0。如图3.1，已知对称轴方向的转动惯量为I_0，其余两个方向的转动惯量为I，角动量大小为L（在导出ψ是不变量的结论以后，可将ψ视为已知量）。

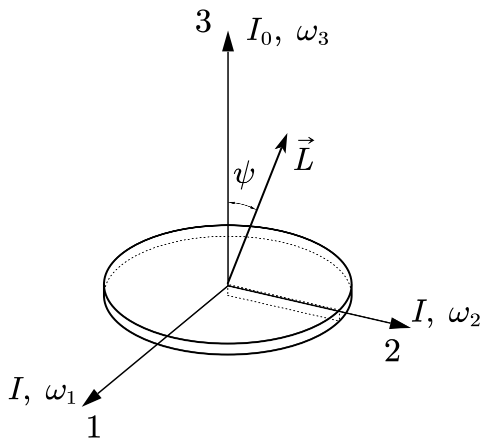

图3.1 硬币的主轴坐标系

（3）抛出硬币时硬币正面朝上，认为硬币抛从出到落地的时间是一个随机数。试导出硬币

在抛出前向上的一面在落地后仍然向上的概率，并写为ψ的函数$P(\psi)$。其中ψ为对称轴与角动量方向夹角，为简化运算，认为硬币质量均匀、没有厚度且落地后不会反弹。

四、（40 分）新概念等时圆

在光滑的水平面上放置一个光滑斜劈，质量为M，如图4.1所示。现从其最高点A点处静止释放一质点，质点质量为m，斜面的最低点为B点，B点位于水平面高度。

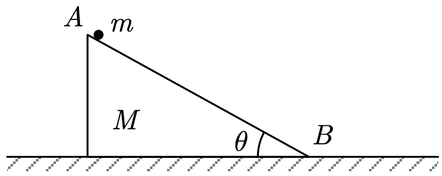

图4.1 斜劈与质点示意图

（1）若斜劈被固定在桌面上不能左右移动；已知质点从A点运动到B点用时为T，试求斜劈长度$|AB|$与其斜面倾角θ的关系。

（2）若斜劈没有被固定在桌面上，可以在桌面上自由滑动；设斜面倾角为θ，A点高度为H，求质点从A点运动到B点的用时t。

（3）仍假设斜劈可以自由滑动，质点从A点运动到B点用时为T。设初始时刻B点位于坐标系原点处，能使得运动时间为T的A点有多个。求出所有可能的A点位置构成的形状。

五、（40分）Schockley-James佯谬

如图5.1所示，光滑水平面上有半径为r的电流环，以及距环心$R(R \gg r)$处的点电荷$Q(Q > 0)$。初始时刻电流环通以（逆时针方向）电流I_0，某时刻开始让圆环电流迅速减小至0（过程中的电磁辐射可以忽略不计），接下来我们想研究过程中圆环与电荷受到的冲量以及它们的来源。

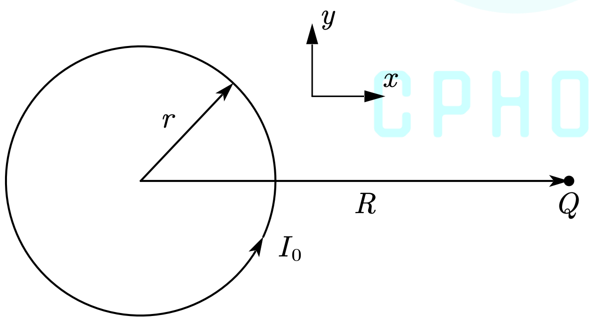

图5.1 电流环点电荷系统示意图

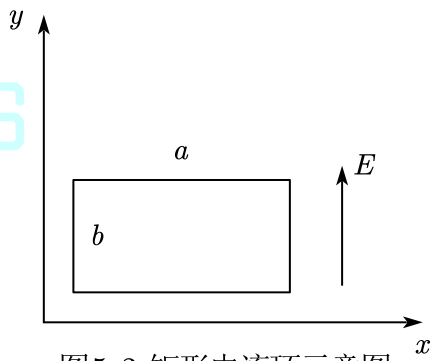

图5.2 矩形电流环示意图

（1）求解在电流减小的过程中电荷Q受到的冲量，并指出它的来源。

提示：计算点电荷处的感应电场可以考虑在半径为R的位置构造一个圆形环路，利用互感法计算环路上的磁通量，从而得到感应电场。

（2）根据系统动量守恒，我们理应得出电流环受到的冲量，但是它的来源似乎不好直接看出（事实上，这一冲量来自于相对论效应），下面我们来研究这一冲量的来源。

（2.1）如图5.2所示，先考虑一长为a，宽为b的矩形电流环，通有逆时针方向的电流i，电场沿y轴方向，考虑相对论效应，载流子在不同区域的动量略有差别，由此，求出环内载流子的总动量$\vec{p}$，设载流子静质量为m_0。

（2.2）给出题目过程中电流环受到的冲量，并指出其来源。

提示：考虑电流环面积微元叠加。

六、（40 分）电场中的介质球

本题中真空中存在场强为E_0的匀强电场。

（1）如图6.1所示，考虑一个真空中半径为R，相对介电常数为ε_r的均匀介质球。求球心处的电场。

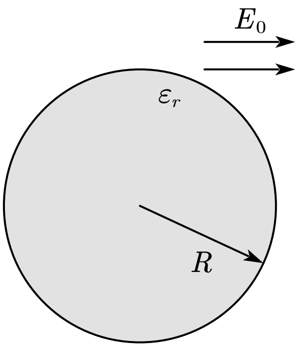

图6.1 匀强电场与介质球

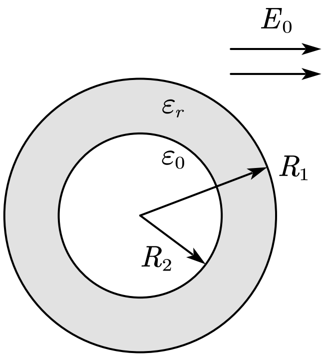

图6.2 匀强电场与中空介质球

（2）如图6.2所示，考虑一个真空中的均匀介质球壳，其外半径为R_1，内半径为R_2，相对介电常数为ε_r。求球心处的电场。

提示：可将空间中的电场猜解为匀强场与偶极子场的叠加，即对于空间中一点，电势可表示为

$$U(r,\theta)=\left(Ar+\frac{B}{r^2}\right)\cos\theta$$

其中A，B为待定常数，r为场点到球心的距离，θ为球心到场点的连线与电场E_0正方向的夹角。

七、（40 分）偏心球

（1）将电量分别为$\pm Q$的点电荷放置在x轴上，位置分别为$x=\pm\frac{a}{2}$。在空间中形成如图7.1的等势面簇。以$\left(-\frac{a}{2},0\right)$处为原点建立极坐标系，极轴与$x$轴方向相同。在第（1）问中只用计算$xOy$平面上的电势分布。

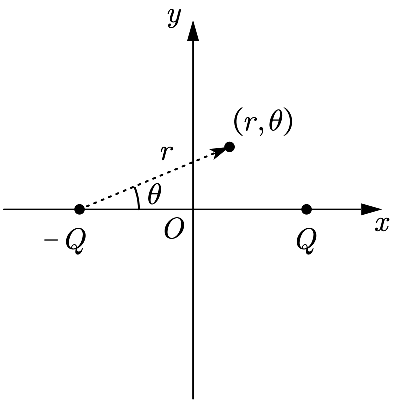

图7.1 电荷系统示意图

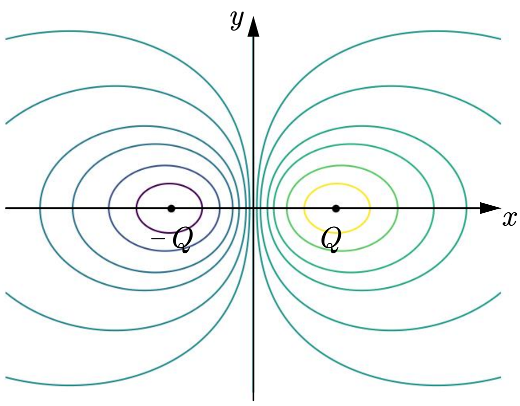

图7.2 等势线示意图

（1.1）在极坐标下，设电势为φ_0的等势线满足方程$f(r,\theta)=0$，求$f(r,\theta)$。

（1.2）利用近似，求出$(x,y)=\left(-\frac{a}{2},0\right)$（即负电荷所在位置）处附近的等势线形状，如图7.2

所示。

提示：极坐标下偏心的圆方程为$r^2-2r\delta\cos\theta+\delta^2=\mathrm{Const}$，其中圆心在极轴上，与极坐标系的原点相距$\delta$。

（2）利用以上结论，完成下面的问题。

（2.1）现在考虑另一个问题，真空中有一个同心球形电容器，两金属球壳的半径分别为R_1,R_2（$R_1<R_2$，二者同量级）。直接写出电容的大小C_0。

（2.2）实际情况下，电容器做工有稍有缺陷，导致两个球的球心相距了一个微小的距离d（$d\ll R_1,R_2$）；再求该系统的电容大小C。

八、（40 分）

如图8.1所示，平面内固定有两个光滑绝缘圆环，二者环心均在O点，半径分别r和R（$R>r$）。两圆环上分别串有光滑绝缘小球，小球可沿圆环无摩擦滑动，其中半径为r的圆环上串的小球B带有正电荷Q，质量为m_1；半径为R的圆环上串的小球A不带电，质量为m_2。两小球之间以绝缘轻质弹性绳连接，弹性绳劲度系数为k，自由长度极短，可忽略不计。

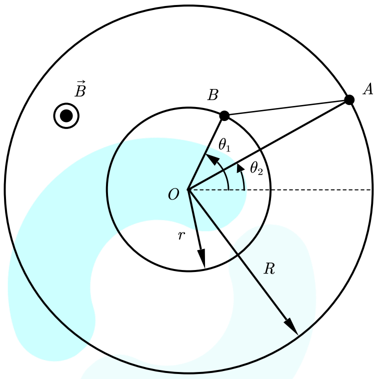

图8.1 圆环与质点示意图

初始状态下，两小球处于静止状态，此时弹性绳长度为$R-r$，半径为R的圆环内有垂直于纸面向外的匀强磁场，磁感应强度为B。在$t=0$时刻，保持磁感应强度大小不变而使磁场方向突然反向，即突变为垂直于纸面向内的匀强磁场 B。在某$t>0$时刻，设内环上的小球相对初始位置的角位移为θ_1，外环上的小球相对初始位置角位移为θ_2，均以逆时针为正方向，试求$\theta_1(t),\theta_2(t)$。为了便于求解，认为$k\gg\frac{Q^2B^2}{m}$（m_1与m_2同量级），保留至$\sqrt{\frac{Q^2B^2}{mk}}$的一阶项。

版权信息

命题人

曹云博 付亦轩 李天笑 魏哲宇

审题人

曹云博 付亦轩 李天笑 魏哲宇

联系方式

微信公众号
CPHOS

官方网站
cphos.cn

CPHOS 论坛
cphos.cn/index.php/community

邮箱
service@cphos.cn

微信小程序
CPHOS 物理竞赛联考

