

第 1 届 CPHOS 物理竞赛基础联考

热光近卷参考答案及评分标准

本文件于 2024 年 12 月 21 日 8:00 发布，最后更新于 2024 年 12 月 20 日 17:23。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

一、(40 分) 光子气体

光子气体是一类非常特殊的极端相对论性气体，对于光子气体的严格讨论原则上需要借助热统的相关知识，而事实上利用热学中的一些方法也能粗略的研究光子气体的一些性质，本题将由此出发，探究光子气体的一些有别于传统的理想气体的行为。

(1) 空腔中的热辐射可以用光子气体来进行处理，假设空腔的内表面对于光子气体来说是完全反射面，即可以认为光子气体与腔体内表面碰撞时没有吸收并且是完全弹性碰撞，虽然事实可能并非如此。

(1.1) 试通过气体动理论的方法推导出光子气体的压强 P 与光子气体的平均能量密度 u 之间的关系。

(1.2) 为了求出光子气体的物态方程，我们还需要一点工具。试利用卡诺定理推导出如下的气体内能方程。(提示：可以构造一个无限小的卡诺循环。)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

(1.3) 利用上面的结果求出光子气体压强 P 与温度 T 之间的关系，即光子气体的物态方程(假定光子气体的平均能量密度与体积无关)。不妨设初态光子气体的压强与温度分别为 P_0 和 T_0 。

(2) 尽管光子气体不能当作是理想气体，但是理论上可以得出，光子气体仍然满足

$$P = nk_B T$$

其中 k_B 是玻尔兹曼常量。据此求出光子气体的热容比 γ 以及光子气体的绝热方程。

解：(1)

(1.1) 光子气体的速度为 c ，我们按照动量 \vec{p} 进行分组，设第 k 组光子气体粒子的动量为 \vec{p}_k ，能量为 E_k ，则有

$$\vec{p}_k \cdot \vec{c} = E_k \quad (1)$$

取器壁上面积为 ΔS 的面元并沿垂直于该面元的方向建立 x 轴，则在 Δt 的时间内，碰壁的粒子数为

$$N = n_k^{(+)} v_{kx} \Delta t \Delta S \quad (2)$$

其中 $n_k^{(+)}$ 表示 x 方向速度为正的粒子的数密度， v_{kx} 表示粒子速度沿 x 方向的分量。由题中的假设可知，这一组光子气体与器壁碰撞时，每个粒子交换的动量为 $2p_{kx}$ ，因此这组气体对压强的贡献量为

$$P_k = \frac{2p_{kx}N}{\Delta t \Delta S} = 2n_k^{(+)} v_{kx} p_{kx} = 2n_k^{(+)} (\vec{p}_k \cdot \vec{v}_k)_x \quad (3)$$

总的压强即为

$$P = \sum_k P_k = \sum_k 2n_k^{(+)} (\vec{p}_k \cdot \vec{v}_k)_x = n \overline{(\vec{p} \cdot \vec{v})}_x \quad (4)$$

这里利用了粒子速度沿正负方向的数量平均相等的对称性，式中 n 是总的光子气体的数密度。由于对称性， x, y, z 三个方向的点乘项的平均值应该相等，即

$$\overline{(\vec{p} \cdot \vec{v})}_x = \overline{(\vec{p} \cdot \vec{v})}_y = \overline{(\vec{p} \cdot \vec{v})}_z \quad (5)$$

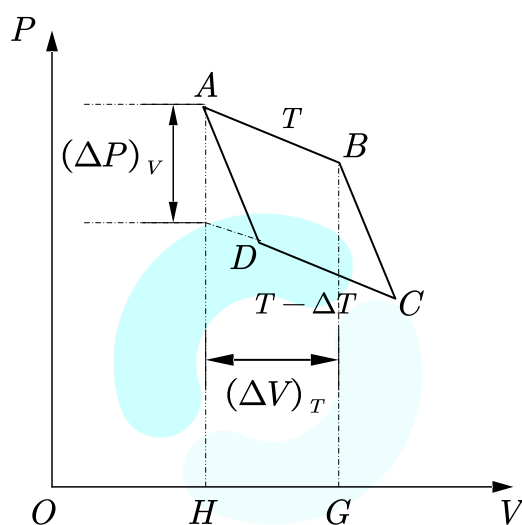
因此有

$$\overline{(\vec{p} \cdot \vec{v})}_x = \frac{1}{3} \overline{(\vec{p} \cdot \vec{v})} = \frac{1}{3} \bar{E} \quad (6)$$

故有

$$P = \frac{1}{3} n \bar{E} = \frac{1}{3} n u V = \frac{1}{3} u \quad (7)$$

(1.2) 构造一个无限小的卡诺循环，如答图X.1所示



答图1.1 无限小卡诺循环相图

其中 AB 和 CD 都是等温线， BC 和 AD 都是绝热线，各个物理量的变化也都在图中注出。

设 A 点的压强为 P ，由于 AB 在同一条等温线上，因此 B 点的压强为 $P - (\Delta P)_T$ ，则在这个无限小的卡诺循环中，系统从外界吸热量为

$$\Delta Q_1 = W_{AB} + \Delta U_{AB} = S_{ABHG} + (\Delta U)_T = \left[P - \frac{(\Delta P)_T}{2} \right] (\Delta V)_T + (\Delta U)_T \quad (8)$$

而系统对外界所做的功为

$$\Delta A = S_{ABCD} = (\Delta P)_V (\Delta V)_T \quad (9)$$

根据卡诺定理，这个无限小卡诺循环的效率为

$$\eta = \frac{\Delta A}{\Delta Q_1} = 1 - \frac{T - \Delta T}{T} = \frac{\Delta T}{T} \quad (10)$$

将上面的结果代入并忽略三阶无穷小量后得到

$$(\Delta P)_V (\Delta V)_T = [P (\Delta V)_T + (\Delta U)_T] \frac{\Delta T}{T} \quad (11)$$

两边同除 ΔT 和 $(\Delta V)_T$ 并化为偏微分的形式，即可得到

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \quad (12)$$

(1.3) 由题设可知，光子气体的平均能量密度与体积无关，因此可以得到

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = u = 3P \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{dP}{dT} \quad (14)$$

代入内能方程中可以得到

$$\frac{4dT}{T} = \frac{dP}{P} \quad (15)$$

积分后有

$$P = P_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^4 \quad (16)$$

其中 P_0 和 T_0 是系统初始时的压强和温度。

(2) 【解法一：类比经典气体】

由题目所给的条件可知

$$P = \frac{1}{3}u = nk_B T \quad (17)$$

亦即1mol的光子气体的内能为

$$U_m = 3RT \quad (18)$$

因此，定体摩尔热容和定压摩尔热容为

$$C_V = \left(\frac{dU_m}{dT}\right)_V = 3R \quad (19)$$

$$C_P = \left(\frac{dH_m}{dT}\right)_P = \left(\frac{dU_m + PdV_m}{dT}\right)_P = 4R \quad (20)$$

故光子气体的热容比为

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{4}{3} \quad (21)$$

绝热方程为

$$PV^\gamma = \text{Const} \quad (22)$$

代入热容比即可得到

$$PV^{\frac{4}{3}} = \text{Const} \quad (23)$$

注：解法一中在求等压热容时控制压强 P 不变，而实际上对于光子气体来说， P 是 T 的单值函数，这从(16)式可以看出，因此这只是一种非常粗糙的理解方式，并不严格。

【解法二：使用热力学第一定律】

在绝热过程中光子气体吸放热为零，即有

$$dQ = PdV + dU = 0 \quad (24)$$

而根据前面小问的结果可以知道

$$U = uV = 3PV \quad (25)$$

代入上面的微分式即可得到

$$4PdV + 3VdP = 0 \quad (26)$$

积分之后可以得到

$$PV^{\frac{4}{3}} = \text{Const} \quad (27)$$

因此光子气体的热容比即为

$$\gamma = \frac{4}{3} \quad (28)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 28 分：

第 (1.1) 问 10 分：(1) (2) (5) 式各 1 分，(4) (6) 式各 2 分，(7) 式 3 分；

第 (1.2) 问 12 分：示意图和 (8) (9) 式各 2 分，(10) (12) 式各 3 分；

第 (1.3) 问 6 分：(13) (14) 式各 1 分，(15) (16) 式各 2 分；

第 (2) 问 12 分：

【解法一】(18) (19) (20) 式各 2 分，(21) (23) 式各 3 分；

【解法二】(24) (25) (27) (28) 式各 3 分。

二、(40 分)

如图2.1所示，一个水平放置的绝热密闭气缸的中间有一多层活塞，活塞由一层与气缸壁有摩擦，导热良好且热容量很小可略的材料和一层薄绝热材料(与气缸壁没有摩擦)组成，绝热层在左侧。初始时，左、右室均充有绝对温度均为 T_0 的理想气体，其体积均为 V_0 ，左室气体压强是右室气体压强的 6 倍。释放活塞，活塞由于其导热部分与汽缸壁之间存在摩擦而运动缓慢，最后停止在平衡位置(此时活塞与缸壁间无静摩擦)。气缸固定，不计重力。

已知气缸中的气体在温度高于临界温度 T_d ($T_0 < T_d$) 时，部分气体分子将发生分解，一个分子可以分解为另外两个相同的分子。被分解的气体摩尔数与发生分解前气体总摩尔数之比 α 满足关系 $\alpha(T) = \beta(T - T_d)$ ，其中 $\beta = \frac{2}{T_0}$ 为常量。分解过程是可逆的，分解1mol分子所需化学能(即 $T = 0, p = 0$ 时气体等容分解所吸收的热量) $\phi = 0.4CT_0$ ，其中 $C = \frac{5}{2}R$ 为所有气体的定容摩尔热容。

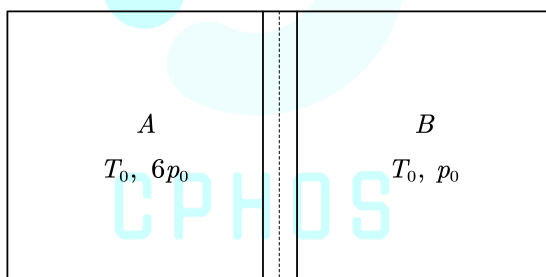


图2.1 绝热气缸与内部气体

(1) 试在平衡时右室气体分子的 $\alpha(T)$ 分别为0和30%时，求解 T_d 的可能值。

(2) 若 $T_d = 2T_0$ ，试求由初态至达到平衡过程中的摩擦生热 Q_f ，数值部分保留至小数点后三位。

解：(1) 设初始时 B 室中气体的摩尔数为 n_0 ，压强为 p_0 。初始时 A 室气体压强是 $6p_0$ ，因而 A 室气体的摩尔数为 $6n_0$ 。把 A、B 室中的气体作为整体，活塞与气缸壁间存在摩擦，摩擦力做功转换成热完全被 B 室中的气体吸收，因而整个气体与气缸外界无能量交换。注意到 A 室中气体经历了绝热过程，而 B 室中的气体经历的不是绝热过程。活塞释放之后 A 室中气体的温度降低，根据题知其中的气体分子不会发生分解。B 室中的气体吸热，温度可能超过 T_d ，有可能发生分子分解。

设 A 室中气体的终态温度为 T_A ，B 室中气体的终态温度 T_B 。并且假定活塞运动过程中有部分气体分子分解，B 室终态气体有 αn_0 摩尔分子分解。按热力学第一定律

$$7n_0CT_0 = 6n_0CT_A + (1 + \alpha)n_0CT_B + \alpha n_0\phi \quad (1)$$

代入 $\phi = 0.4CT_0$ ，上式化为

$$6T_A + (1 + \alpha)T_B = \left(7 - \frac{2\alpha}{5}\right)T_0 \quad (2)$$

终态时两室气体的压强必相等，设为 p_x ，并设终态时 A 和 B 室的体积分别为 V_A 和 V_B ，由理想气体状态方程

$$\begin{cases} \frac{p_x V_A}{6p_0} = \frac{T_A}{T_0} \\ \frac{p_x V_B}{p_0} = (1 + \alpha) \frac{T_B}{T_0} \end{cases} \quad (3)$$

将它们代入 (2) 式得

$$p_x(V_A + V_B) = \left(7 - \frac{2\alpha}{5}\right) \frac{p_0 V_0}{n_0 R} \quad (4)$$

由于气缸是刚性的，有

$$V_A + V_B = 2V_0$$

所以

$$p_x = \frac{1}{2} \left(7 - \frac{2\alpha}{5}\right) p_0 \quad (5)$$

下面求 B 室末态的温度 T_B 。对 A 室气体有绝热方程

$$6p_0 V_0^\gamma = p_x V_A^\gamma \quad (6)$$

其中 $\gamma = \frac{4}{3}$ 。对于 B 室气体有

$$p_x(2V_0 - V_A) = (1 + \alpha)n_0 R T_B \quad (7)$$

将 (6) 式代入 (7) 式，并利用 (5) 式以及相关的状态方程，得

$$T_B = \frac{7 - 2\alpha/5}{2(1 + \alpha)} \left[2 - \left(\frac{12}{7 - 2\alpha/5} \right)^{3/4} \right] T_0 \quad (8)$$

(i) 当 $\alpha = 0$ 时，

$$T_B = \frac{7}{2} \left[2 - \left(\frac{12}{7} \right)^{3/4} \right] T_0 = 1.756T_0 \quad (9)$$

因此

$$T_d \geq \frac{7}{2} \left[2 - \left(\frac{12}{7} \right)^{3/4} \right] T_0 = 1.756T_0 \quad (10)$$

(ii) 当 $\alpha = 30\%$ 时，

$$T_B = \frac{7 - 0.12}{2.6} \left[2 - \left(\frac{12}{7 - 0.12} \right)^{3/4} \right] T_0 = 1.276T_0 \quad (11)$$

而 $\alpha = \beta(T_B - T_d)$ ，因此

$$T_d = T_B - \frac{\alpha}{\beta} = 1.126T_0 \quad (12)$$

(2) 由题目条件知， $T_d > \frac{7}{2} \left[2 - \left(\frac{12}{7} \right)^{3/4} \right] T_0$ ，平衡时 $\alpha = 0$ ，B 室中的气体分子没有发生分解。对于活塞运动过程中的某一个状态，设 A 和 B 室的气体压强分别为 p_A 和 p_B ，由 (2)

(3) (6) 式，注意到 $V_B = 2V_0 - V_A$ 得

$$p_A = 6p_0 \left(\frac{V_0}{V_A} \right)^{\frac{4}{3}}, \quad p_B = p_0 \frac{V_0 \left[7 - 6 \left(\frac{V_0}{V_A} \right)^{\frac{1}{3}} \right]}{2V_0 - V_A} \quad (13)$$

接下来求摩擦生热，A 室气体膨胀一个微元体积 dV_A 时，活塞与缸壁的摩擦力做功为

$$dQ_f = (p_A - p_B) dV_A = \left\{ 6 \left(\frac{V_0}{V_A} \right)^{\frac{4}{3}} - \frac{V_0 \left[7 - 6 \left(\frac{V_0}{V_A} \right)^{\frac{1}{3}} \right]}{2V_0 - V_A} \right\} p_0 dV_A \quad (14)$$

末态有 $p_A = p_x = \frac{7}{2}p_0$ ，代入 (13) 式得末态 A 室体积

$$V_{A\text{末}} = \left(\frac{12}{7} \right)^{\frac{3}{4}} V_0 = 1.498V_0 \quad (15)$$

作定积分，积分上下限由 $V_{A\text{初}} = V_0$ 至 $V_{A\text{末}} = \left(\frac{12}{7} \right)^{\frac{3}{4}} V_0$ ，得

$$Q_f = 1.266p_0V_0 \quad (16)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 28 分：(1) 式 4 分，(2) (3) (4) (6) 式各 2 分，(5) (8) 式各 5 分，(10) (12) 式各 3 分；

第 (2) 问 12 分：(13) (15) 式各 2 分，(14) (16) 式各 4 分。

三、(40分) 气体中的纵波

本题将考虑气体中的纵波模型，为简化，下面仅仅考虑一维气体中的纵波，取振动方向为 x 轴。

(1) 考虑横截面积为 S 的一段气柱，设其沿着 x 方向的位移为 $\xi = \xi(x, t)$ ，气体压强分布为 $p = p(x, t)$ ，未压缩时气体的密度为 ρ_0 。考虑小振幅、长波长的情形，即 $\xi \ll x, \frac{\partial \xi}{\partial x} \ll 1, (p - p_0) \ll p_0, (\rho - \rho_0) \ll \rho_0$ 。根据气柱的动力学关系，列出上面变量之间满足的偏微分方程。

(2) 下面继续考虑气体的状态方程 $f(p, \rho, T) = 0$ 。根据过程方程，可以将其中的参量 T 消去，得到压强与密度之间的关系。结合质量守恒，将这一关系代入上一小问，可以得到一个波动方程，计算出这一方程，可以使用 $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_c$ 表示，其中下标 c 表示特定情况下的过程方程。

(3) 分别计算理想气体在等温状态和绝热状态下的纵波波速，已知普适气体常量 R ，温度 T ，比热容比 γ ，气体摩尔质量 μ 。

(4) 下面计算范德瓦尔斯气体中的纵波波速。已知 1mol 该气体的状态方程为：

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$

等容摩尔热容为 c_v ，气体摩尔质量为 μ ，求解绝热状态下的波速，用 $p, \rho, a, b, \mu, \gamma = \frac{c_v + R}{c_v}$ 表示。

提示：可以使用公式

$$dU = c_v dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

和

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p$$

计算绝热方程。

解：（1）考虑 $x \rightarrow x + dx$ 的气柱。由动力学方程，得到：

$$\rho_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{dp}{dx} \quad (1)$$

化简后得到

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

（2）考虑原来位于 $x \rightarrow x + dx$ 处的气柱，现在位于 $x + \xi \rightarrow x + dx + \xi + d\xi$ 处，由质量守恒

$$\rho(d\xi + dx) = \rho_0 dx \quad (3)$$

得到

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \quad (4)$$

利用

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_c \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (5)$$

得到

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_c \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (6)$$

（3）波速为

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_c} \quad (7)$$

等温状态下

$$p = \frac{\rho RT}{\mu} \quad (8)$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}} \quad (9)$$

绝热状态下

$$p \cdot \rho^\gamma = \text{Const} \quad (10)$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} \quad (11)$$

（4）利用提示中的公式，得到

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p = \frac{a}{V^2} \quad (12)$$

热力学第一定律

$$dQ = dU + dW \quad (13)$$

$$0 = c_v dT + \frac{a}{V^2} dV + p dV = c_v dT + \frac{RT}{V-b} dV \quad (14)$$

积分并代入状态方程得到

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b)^{\frac{c_v+R}{c_v}} = \text{Const} \quad (15)$$

利用

$$V = \frac{\mu}{\rho} \quad (16)$$

对(15)式取对数后求微分, 得到:

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{\gamma\mu}{\mu\rho - b\rho^2} \left(p + \frac{a}{\mu^2}\rho^2\right) - \frac{2a\rho}{\mu^2}} \quad (17)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第(1)问 5 分; (2) 式 5 分;

第(2)问 7 分; (3) (5) 式各 2 分, (6) 式 3 分;

第(3)问 12 分; (8) (9) (10) (11) 式各 3 分;

第(4)问 16 分; (12) (13) 式 3 分, (14) 式 2 分, (15) (17) 式 3 分, (16) 式 2 分。

四、(40分) 偏振光干涉

如图4.1所示为三缝干涉结构, 点光源发自然光, 波长为 λ , 位于体系的对称轴上, 距离狭缝 R , 中间的缝宽度为 $2b$, 两侧的缝宽度为 b , 狭缝之间的间隔为 d , 接收屏与狭缝的距离为 L 。采用傍轴条件, 观察范围较小, 使得在本题考虑的范围之内不必计较单缝衍射的效应。

(1) 计算光强随观察位置的变化规律, 大致描述干涉图像(画图或语言描述均可, 但至少包含以下要素: 不同大小的峰值位置的表达式, 峰值的大小之比的表达式, 峰之间谷的数目。)

(2) 如图4.2所示, 在三个狭缝前面分别加上三个偏振片, 中间偏振片的透振方向与纸面平行, 上下两个偏振片对称的与中间偏振片透振方向夹角 θ , 计算总光强的表达式。

(3) 在观察屏上放上偏振片, 透振方向与中间偏振片的透振方向夹角为 φ , $\theta = \frac{\pi}{4}$, 分别计算 $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}$ 时的光强分布情况。

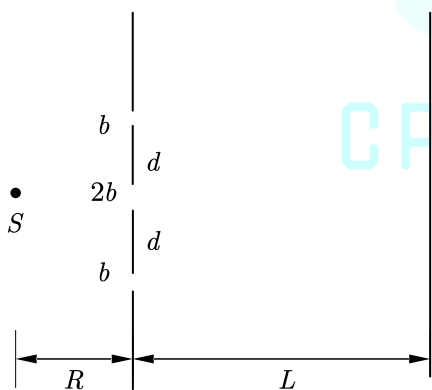


图4.1 三缝干涉示意图

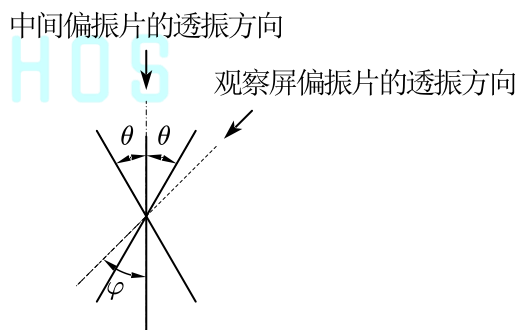


图4.2 偏振片透振方向

解: (1) 观察屏上距离中心轴线为 x 处, 通过三条狭缝到达观察点的光程 S 为

$$S_1 = \sqrt{R^2 + d^2} + \sqrt{L^2 + (x - d)^2} \quad (1)$$

$$S_2 = R + \sqrt{L^2 + x^2} \quad (2)$$

$$S_3 = \sqrt{R^2 + d^2} + \sqrt{L^2 + (x + d)^2} \quad (3)$$

不妨设复振幅分别为

$$2A_1 = A_2 = 2A_3 = 2A \quad (4)$$

计算复振幅叠加

$$\tilde{U} = A(e^{ikS_1} + 2e^{ikS_2} + e^{ikS_3}) \quad (5)$$

小量近似后得到

$$\tilde{U} = 2A \left(\cos \frac{kdx}{L} e^{ik\left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L}\right)} + 1 \right) e^{ik\left(R+L+\frac{x^2}{2L}\right)} \quad (6)$$

所以看到的光强为

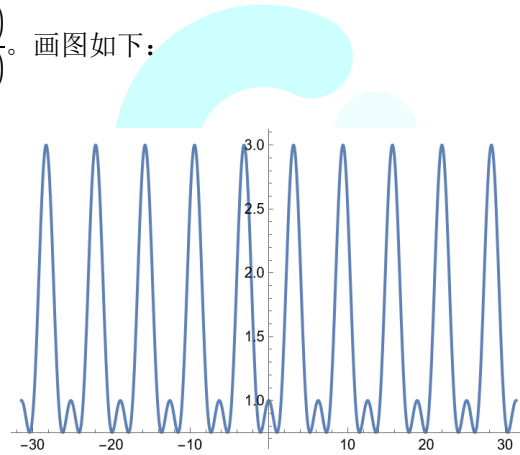
$$\tilde{U}\tilde{U}^* = 4A^2 \left[\cos^2 \frac{kdx}{L} + 2 \cos \frac{kdx}{L} \cos k \left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L} \right) + 1 \right] \quad (7)$$

上式是关于 $\cos \frac{kdx}{L}$ 的二次函数。容易发现，光强极大值分为大小峰，大峰与小峰的周期均为 $\frac{\lambda L}{d}$ ，大峰与小峰交替出现，大小峰之间存在一个谷。下面分类讨论说明这一情况：

$$(a) -1 < \cos k \left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L} \right) < 0:$$

光强极大值分为大小峰，大峰与小峰的周期均为 $\frac{\lambda L}{d}$ ，大峰与小峰交替出现，大小峰之间存在一个谷。

小峰位于 $x = \frac{m\lambda L}{d}$ 的位置处，大峰位于 $x = \frac{(m+\frac{1}{2})\lambda L}{d}$ 的位置处，其中 m 为整数。大小峰值比为 $\frac{1 - \cos k \left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L} \right)}{1 + \cos k \left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L} \right)}$ 。画图如下：



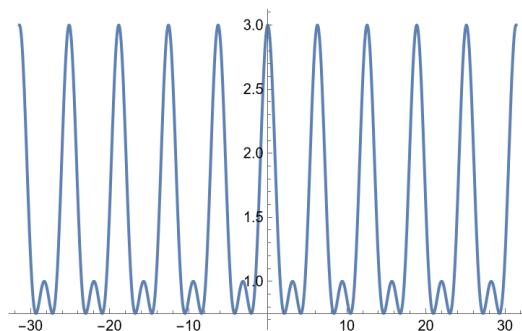
答图4.1 情况(a)干涉光强分布图

$$(b) 0 < \cos k \left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L} \right) < 1:$$

光强极大值分为大小峰，大峰与小峰的周期均为 $\frac{\lambda L}{d}$ ，大峰与小峰交替出现，大小峰之间存在一个谷。

大峰位于 $x = \frac{m\lambda L}{d}$ 的位置处，小峰位于 $x = \frac{(m+\frac{1}{2})\lambda L}{d}$ 的位置处，其中 m 为整数。大小峰值比为 $\frac{1 + \cos k \left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L} \right)}{1 - \cos k \left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L} \right)}$ 。画图如下：

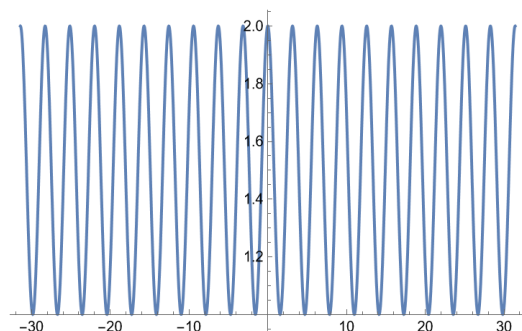
小峰值比为 $\frac{1 + \cos k \left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L} \right)}{1 - \cos k \left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L} \right)}$ 。画图如下：



答图4.2 情况(b)干涉光强分布图

$$(c) \cos k \left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L} \right) = 0:$$

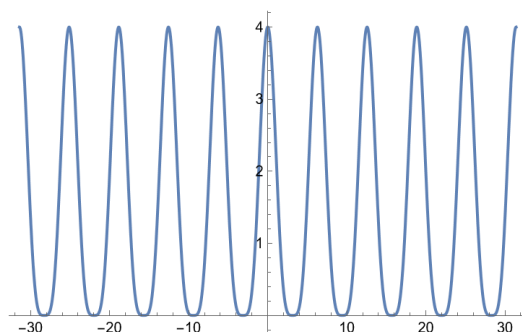
此时没有大小峰之间的区别，周期为 $\frac{\lambda L}{2d}$ ，峰位于 $x = \frac{m\lambda L}{2d}$ 处，峰值比为 1。画图如下：



答图4.3 情况(c)干涉光强分布图

$$(d) \cos k \left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L} \right) = 1:$$

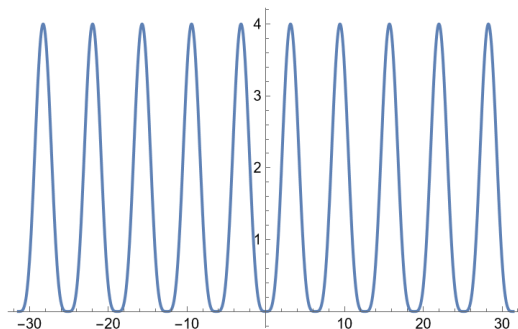
此时没有大小峰之间的区别，峰值位置在 $x = \frac{m\lambda L}{d}$ 处，周期为 $\frac{\lambda L}{d}$ ，峰值比为 1。画图如下：



答图4.4 情况(d)干涉光强分布图

$$(e) \cos k \left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L} \right) = -1:$$

此时没有大小峰之间的区别，峰值位置在 $x = \frac{(m+\frac{1}{2})\lambda L}{d}$ 处，周期为 $\frac{\lambda L}{d}$ ，峰值比为 1。画图如下：



答图4.5 情况(e)干涉光强分布图

(2) 此时需要考虑不同方向光的相干性。将入射光分解为平行于纸面与垂直于纸面，两个方向的光并不相干。先计算平行于纸面的入射光：

经过三条狭缝以后分别在平行于纸面的方向和垂直于纸面的方向上叠加。平行于纸面方向：

$$\tilde{U} = A(e^{ikS_1} \cos^2 \theta + 2e^{ikS_2} + e^{ikS_3} \cos^2 \theta) \quad (8)$$

$$\tilde{U}\tilde{U}^* = 4A^2 \left[\cos^2 \frac{kdx}{L} \cos^4 \theta + 2 \cos \frac{kdx}{L} \cos^2 \theta \cos k \left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L} \right) + 1 \right] \quad (9)$$

垂直于纸面方向：

$$\tilde{U} = A(e^{ikS_1} - e^{ikS_3}) \cos \theta \sin \theta \quad (10)$$

$$\tilde{U}\tilde{U}^* = 4A^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos^2 \left(\frac{kdx}{L} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (11)$$

再计算垂直于纸面方向的入射光：

平行于纸面方向叠加：

$$\tilde{U} = A(e^{ikS_1} - e^{ikS_3}) \cos \theta \sin \theta \quad (12)$$

$$\tilde{U}\tilde{U}^* = 4A^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos^2 \left(\frac{kdx}{L} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (13)$$

垂直于纸面方向叠加：

$$\tilde{U} = A(e^{ikS_1} + e^{ikS_3}) \sin^2 \theta \quad (14)$$

$$\tilde{U}\tilde{U}^* = 4A^2 \sin^4 \theta \cos^2 \frac{kdx}{L} \quad (15)$$

总光强为

$$\begin{aligned} \tilde{U}\tilde{U}^* = 4A^2 & \left[(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 \cos^2 \frac{kdx}{L} \right. \\ & \left. + 2 \cos^2 \theta \cos k \left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L} \right) \cos \frac{kdx}{L} + (1 + 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

(3) 当 $\varphi = 0$ 时：

$$\tilde{U}\tilde{U}^* = 4A^2 \left[\cos k \left(\frac{d^2}{2R} + \frac{d^2}{2L} \right) \cos \frac{kdx}{L} + \frac{5}{4} \right] \quad (17)$$

当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时：

$$\tilde{U}\tilde{U}^* = A^2 \quad (18)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 21 分：(1) (2) (3) (5) (6) (7) 式各 2 分，答图4.1、答图4.2（或相应的文字描述）各 3 分（对应题干中要求的各个要素：峰位置、峰值比、峰之间谷数目各自占分），答图4.3、答图4.4、答图4.5各 1 分（只有峰位置占分）；

第(2)问 15分: (9) (11) (13) (15) (16) 式各3分;

第(3)问 4分: (17) (18) 式各2分。

五、(40分) 几何光学中的像差

我们在竞赛中所遇到的几何光学系统一般都是理想的光学成像系统,而在实际的成像过程中,像差往往是不可避免的。由于在几何光学的习题中涉及像差的部分非常有限,因此本题希望通过利用一些几何光学中基本的方法和图像对于球差和色差这两类像差进行分析研究,从而对像差现象有一个初步的认识。

(1) 球面像差: 在傍轴情况下球面近似成像于一点,而当入射光线偏离光轴较远时,成像的位置就会与傍轴时的像点产生偏移,偏移量的大小与入射光距光轴的距离有关,这就是球面像差的来源。

(1.1) 先考虑光轴上一个点光源 s 对于球面的成像情况,试利用费马原理证明对于任意入射角,像点与物点之间都满足关系

$$\frac{n_1}{l_o} + \frac{n_2}{l_i} = \frac{1}{R} \left(\frac{n_2 s_i}{l_i} - \frac{n_1 s_o}{l_o} \right)$$

如图5.1所示,其中 s_i 和 s_o 分别是物点和像点距离球面顶点的距离, R 是球面半径, l_o 和 l_i 分别是物点和像点到球面顶点处的距离, n_1 和 n_2 分别是物点处和像点处介质的折射率。

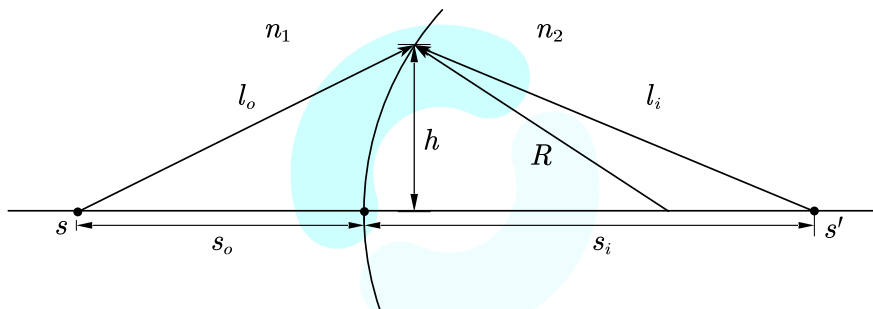


图5.1 球面成像光路图

(1.2) 若认为光线入射球面上的点到光轴的距离 h 为小量,试对上一问所得的结果中 l_o 和 l_i 对 h 取一阶近似和二阶近似,求出一阶近似下(即傍轴成像公式)和二阶近似下的成像公式。

(结果用 n_1, n_2, s_i, s_o, R, h 表示)

(1.3) 上一问的结果表明入射光线距光轴越远其成像点越近,即折射光线偏折的程度越高,如果想要减小球面像差,就需要减小远离光轴处入射光线的偏折角度。现考虑将一束平行光入射到一薄平凸透镜上,试利用上面的思路说明图5.2中平凸透镜的哪一种放置方式产生的球面像差更小。

提示:可考虑利用最小偏向角的相关知识来说明。

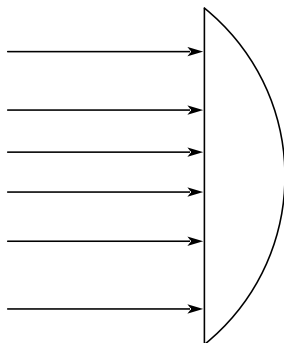


图5.2(a) 平行光背面入射平凸透镜

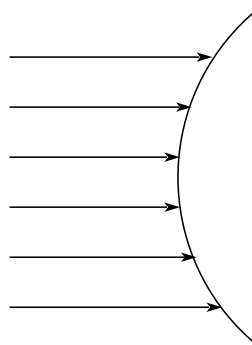


图5.2(b) 平行光正面入射平凸透镜

(2) 色差: 由于材料的折射率跟入射光的波长是相关的,因此当非单色光入射时会成像在

不同的位置处，这就是色差的来源。而如果采用两种不同的材料做成焦距不同的两个透镜并组合起来形成一个消色差的组合透镜，那么我们就可以在一定程度上减小色差对于成像质量的影响。为简单起见，本问只考虑平行光入射的情况且忽略球面像差的影响。

(2.1) 先考虑单色光的情况，一薄透镜放置于空气中，设该薄透镜对于该单色光的折射率为 n ，薄透镜左右两端的半径分别为 R_1 和 R_2 ，推导透镜焦距 f 的表达式。

(2.2) 现有两个由不同材料制成的薄透镜，将其密接形成一消色差的组合透镜。现入射一连续的复色光，其波长的范围为 $\Delta\lambda = 170.0\text{nm}$ ，两个透镜对于入射的复色光的平均折射率和平均的色散率分别为 $n_1 = 1.499$ ， $\frac{dn_1}{d\lambda} = -4.74 \times 10^{-5} \text{nm}^{-1}$ ，以及 $n_2 = 1.610$ ， $\frac{dn_2}{d\lambda} = -9.76 \times 10^{-5} \text{nm}^{-1}$ 。试证明为了消除色差使得 $\Delta\lambda$ 范围内的入射光近似成像于同一点，这两个透镜的焦距必须满足

$$\frac{\Delta_1}{f_1} + \frac{\Delta_2}{f_2} = 0$$

其中这两个透镜在平均折射率 n_1 和 n_2 下的焦距分别为 f_1 和 f_2 ， Δ 为

$$\Delta = \frac{1}{n-1} \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda$$

即

$$\Delta_1 = \frac{1}{n_1-1} \frac{dn_1}{d\lambda} \Delta\lambda, \quad \Delta_2 = \frac{1}{n_2-1} \frac{dn_2}{d\lambda} \Delta\lambda$$

提示：你可以直接使用密接透镜的焦距公式： $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$

(2.3) 试根据上一小问中所求得的结果说明，若想使得组合的消色差透镜具有会聚透镜的作用， f_1 和 f_2 分别该是凸透镜还是凹透镜，以及它们的焦距的绝对值该满足什么样的大小关系。

解：(1)

(1.1) 从 s 到 s' 的光程为

$$L = n_1 l_o + n_2 l_i \quad (1)$$

由几何关系可以得到

$$l_o^2 = (s_o + R - \sqrt{R^2 - h^2})^2 + h^2 \quad (2)$$

$$l_i^2 = (s_i + R - \sqrt{R^2 - h^2})^2 + h^2 \quad (2)$$

费马原理要求

$$\delta L = 0 \quad (4)$$

代入(2)和(3)即可得到

$$\begin{aligned} \delta L &= n_1 \delta l_o + n_2 \delta l_i \\ &= \frac{n_1}{l_o} \left[(s_o + R - \sqrt{R^2 - h^2}) \frac{h}{\sqrt{R^2 - h^2}} + h \right] \delta h + \\ &\quad \frac{n_2}{l_i} \left[(s_i + R - \sqrt{R^2 - h^2}) \frac{-h}{\sqrt{R^2 - h^2}} + h \right] \delta h = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

整理一下即可得到

$$\frac{n_1}{l_o} + \frac{n_2}{l_i} = \frac{1}{R} \left(\frac{n_2 s_i}{l_i} - \frac{n_1 s_o}{l_o} \right) \quad (6)$$

(1.2) 对(2)和(3)进行展开并保留到 h^2 项，可以得到

$$\begin{aligned}
 l_0^2 &= \left(s_0 + R - \sqrt{R^2 - h^2}\right)^2 + h^2 \\
 &= \left[s_0 + R - R\left(1 - \frac{h^2}{2R^2}\right)\right]^2 + h^2 = \left(s_0 + \frac{h^2}{2R^2}\right)^2 + h^2
 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 l_o &= \sqrt{\left(s_0 + \frac{h^2}{2R^2}\right)^2 + h^2} = s_o \sqrt{1 + \frac{1}{s_o} \left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R}\right) h^2} \\
 &= s_o \left[1 + \frac{1}{2s_o} \left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R}\right) h^2\right]
 \end{aligned} \quad (8)$$

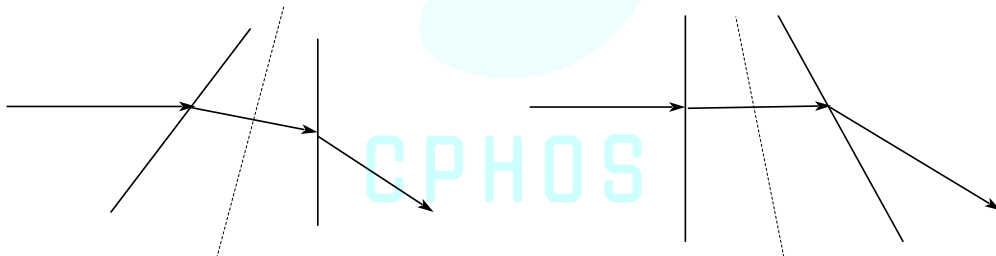
$$\begin{aligned}
 l_i &= \sqrt{\left(s_i + \frac{h^2}{2R^2}\right)^2 + h^2} = s_i \sqrt{1 + \frac{1}{s_i} \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{R}\right) h^2} \\
 &= s_i \left[1 + \frac{1}{2s_i} \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{R}\right) h^2\right]
 \end{aligned} \quad (9)$$

再代入(6)中, 结果分别保留至0次项和 h^2 项, 可以得到

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (10)$$

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + h^2 \left[\frac{n_1}{2s_o} \left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{n_2}{2s_i} \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{R}\right)^2 \right] \quad (11)$$

(1.3) 若将 h 处附近入射光线所经过的透镜区域看作是一个非常小的三棱镜的话, 那么我们希望出射光偏折的角度减小, 即希望入射光的方向接近于这个小三棱镜最小偏向角所对应的入射方向附近。由于最小偏向角所对应的入射光线与出射光线关于三棱镜对称, 由图5.1可知凸面朝左的放置方式所产生的球面像差更小。



答图5.1(a) 背面入射平凸透镜光路

答图5.1(b) 正面入射平凸透镜光路

(2)

(2.1) 由(1.2)的结果可知, 薄透镜两次成像为

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i'} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad (12)$$

$$\frac{n_2}{-s_i'} + \frac{n_1}{s_i} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} \quad (13)$$

两式联立即可得到

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_1}{s_i} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (14)$$

代入题目中的参数并令 $s_o \rightarrow +\infty$, 可以得到

$$f = \frac{1}{(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \quad (15)$$

或写成

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (16)$$

(2.2) 从(15)可以看出,薄透镜的焦距与折射率是相关的,为了得到透镜焦距在折射率变化范围较小的区间内的改变量,对(16)进行微分可以得到

$$\frac{\Delta f}{f^2} = - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{dn}{d\lambda} \right) \Delta \lambda = - \frac{1}{(n-1)f} \frac{dn}{d\lambda} \Delta \lambda = - \frac{\Delta}{f} \quad (17)$$

对题目所给的密接透镜的焦距公式也进行微分,可以得到

$$\frac{\Delta f}{f^2} = \frac{\Delta f_1}{f_1^2} + \frac{\Delta f_2}{f_2^2} \quad (18)$$

我们要求密接透镜对于入射光近似成像于一点,即要求

$$\Delta f = 0 \quad (19)$$

因此把(17)代入到(18)中即可得到

$$\frac{\Delta_1}{f_1} + \frac{\Delta_2}{f_2} = 0 \quad (20)$$

(2.3) 由题目所给数据可以计算得到,

$$\Delta_1 = \frac{1}{n_1 - 1} \frac{dn_1}{d\lambda} \Delta \lambda = 0.0161 > 0 \quad (21)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{n_2 - 1} \frac{dn_2}{d\lambda} \Delta \lambda = 0.0272 > 0 \quad (22)$$

$$\Delta_2 > \Delta_1 \quad (23)$$

因此为了满足(20)的要求,两个透镜必须一凸一凹且

$$|f_1| < |f_2| \quad (24)$$

又由于两个透镜的组合透镜必须是会聚透镜,因此由题给的公式

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (25)$$

可知, f_1 必须是凸透镜, f_2 必须是凹透镜, 并且 f_1 的焦距需要小于 f_2 的焦距。

评分标准: 本题满分 40 分。

第(1)问 20 分:

第(1.1)问 6 分: (2)(3) 式各 1, (5)(6) 式各 2 分;

第(1.2)问 10 分: (8)(9)(10) 式各 2 分, (11) 式 4 分;

第(1.3)问 4 分: 言之有理即可得满分;

第(2)问 20 分:

第(2.1)问 4 分: (14)(15) 式各 2 分;

第(2.2)问 8 分: (17)(18)(19)(20) 式各 2 分, 只有(20)式不得分;

第(2.3)问 8 分: (21)(22) 式各 1 分, (24) 式 2 分 (25) 式 1 分, 结论 3 分。

六、光学切趾 (40 分)

光学切趾术 (optical apodization) 是一种通过改变光学系统衍射孔径函数, 以提高光学系统分辨本领的方法。我们下面讨论一个简单的例子。如图 6.1 所示是一个典型的狭缝衍射装置, 波长为 λ 的平行光入射长为 b 的狭缝, 在距离 L 后的屏上观察到条纹, 为方便我们认为 L 远大于要考虑的条纹范围的尺度。

(1) 首先讨论单纯的狭缝, 试计算衍射屏上的光强分布。

(2) 在狭缝中插入装置, 复振幅透射率为 $t = \cos \frac{\pi x}{b}$, 再计算衍射屏上的光强分布。

(3) 根据前两问的结论, 给出 n 级极小在插入装置后移动的距离, 再分别计算 0 级和 1 级条

纹强度大小之比 $\frac{I}{I_0}$ ，说明切趾术是否提升了分辨本领，并简述理由。

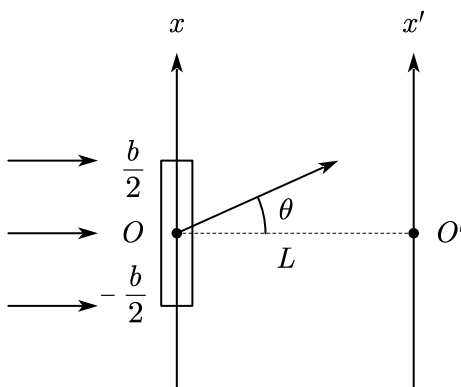


图6.1 狭缝衍射示意图

解：（1）入射光单位长度复振幅记为 $\frac{U_0}{b}$ ，经过衍射屏后复振幅为

$$U = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{U_0}{b} e^{\frac{2\pi i \sin \theta x}{\lambda}} dx \quad (1)$$

计算得到

$$U = U_0 \operatorname{sinc} \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \quad (2)$$

利用 $x' \approx L \sin \theta$ ，我们得到光强分布为

$$I = |U|^2 = I_0 \left(\operatorname{sinc} \frac{\pi b x'}{\lambda L} \right)^2 \quad (3)$$

（2）入射光单位长度复振幅记为 $\frac{U_0}{b}$ ，经过衍射屏后复振幅为

$$U = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{U_0}{b} \cos \frac{\pi x}{b} e^{\frac{2\pi i \sin \theta x}{\lambda}} dx \quad (4)$$

计算得到

$$U = \frac{2\pi U_0}{\left(\frac{2\pi b \sin \theta}{\lambda}\right)^2 - \pi^2} \cos \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \quad (5)$$

得到光强分布为

$$I = |U|^2 = I_0 \left(\frac{2\pi \cos \frac{\pi b x'}{\lambda L}}{\left(\frac{2\pi b x'}{\lambda L}\right)^2 - \pi^2} \right)^2 \quad (6)$$

（3）根据式（3）可以得到 n 级极小的位置

$$x'_1 = \frac{n\lambda L}{b} \quad (7)$$

而根据式（6）可以得到 n 级极小的位置

$$x'_2 = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\lambda L}{b} \quad (8)$$

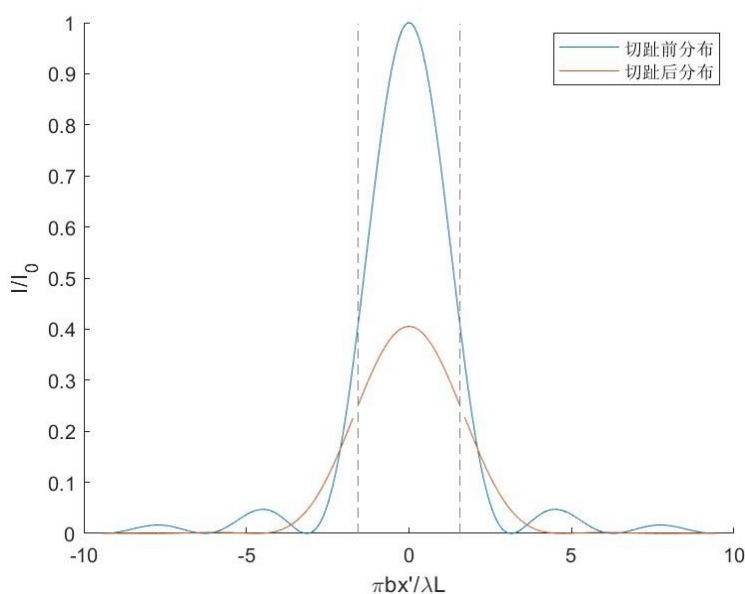
移动的距离即为

$$\delta = x'_2 - x'_1 = \frac{\lambda L}{2b} \quad (9)$$

移动的方向是远离中心。再根据式 (3) (6) 得到强度大小之比分别为

$$\begin{cases} \left(\frac{I_1}{I_0}\right)_1 \approx 0.0472 \\ \left(\frac{I_1}{I_0}\right)_2 \approx 0.0050 \end{cases} \quad (10)$$

极小的移动方向是远离中心，而非主级光强占比下降，这都有利于提升中间像的清晰程度而减少了衍射造成的影响。



答图6.1 光学切趾前后光强分布示意图

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 9 分：(1) (2) (3) 式 3 分；

第 (2) 问 9 分：(4) (5) (6) 式 3 分；

第 (3) 问 22 分：(7) (8) (9) (10) 式 5 分，从衍射环远离中心和更多光聚集在主极强上两方面解释更清晰的原因 2 分。

七、(40 分)

静长同为 l_0 的三个飞船在惯性系 S 中按如图 7.1 的方式作匀速直线运动，相对 S 系速度分别为 $v_1 = 0.6c$, $v_2 = 0.5c$, $v_3 = 0.8c$ 。在 S 系 $t = 0$ 时刻，飞船 1、2、3 头部各自位于图示 P_1 , P_2 , P_3 位置，飞船 1 头部与飞船 2 尾部、飞船 2 头部与飞船 3 尾部各相距 L ，飞船 1、2、3 分别将自己头部的时钟拨到本系内的时间零点。

设此时，即 S 系 $t = 0$ 时刻，各飞船之间按照 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 的顺序发射电磁波信号，各船均于船头发射电磁波，于船尾接收电磁波。在飞船 3 参考系中，此信号被其尾部接收的同时，恰好其头部发出信号；而飞船 2 参考系中，头部发射信号相较于尾部接收信号存在延时 $\frac{1.5l_0}{c}$ ，

其中 c 为真空中光速。

(1) 求在飞船 2 参考系中飞船 1、3 的速度 v'_1, v'_3 。

(2) 将飞船 3 测得的其尾部接收到电磁波信号的时刻记为 t'_{3r} ，飞船 1 测得的其尾部接收到电磁波信号的时刻记为 T'_{1r} ，试求 t'_{3r} 与 T'_{1r} 。

(3) 已知飞船 1 测得发出的电磁波信号功率为 P_0 ，三个飞船在本系中发射与接收的信号强度相同，求飞船 1 测得接收的电磁波信号功率 P 。

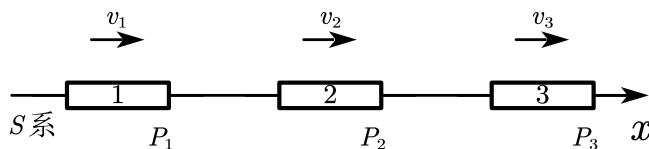


图7.1 飞船位置示意图

解：(1) 由相对论速度变换公式，

$$v'_1 = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{1}{7}c \quad (1)$$

$$v'_3 = \frac{v_3 - v_2}{1 - \frac{v_3 v_2}{c^2}} = \frac{1}{2}c \quad (2)$$

(2) 首先确定 S 系测得的飞船 3 头部发出的时间 t_{3h} ：

记 S 系飞船 2 尾部接收信号时间为 t_{2r} ，飞船 2 头部发出信号时间为 t_{2h} ，有

$$t_{2r} = 0 + \frac{L}{c - v_2} = \frac{2L}{c} \quad (3)$$

$$t_{2h} = t_{2r} + \frac{\Delta t'_2 + \frac{v_2}{c^2} \Delta x'_2}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}, \beta_2 = \frac{v_2}{c} = \frac{1}{2} \quad (4)$$

其中飞船 2 参考系中尾部接收信号到头部发出信号的时空间隔 $\{\Delta t'_2 = \frac{1.5l_0}{c}, \Delta x'_2 = l_0\}$ 。代入得

$$t_{2h} = \frac{2L}{c} + \frac{4\sqrt{3}l_0}{3c} \quad (5)$$

记 S 系飞船 3 尾部接收信号时间为 t_{3r} ，飞船 3 头部发出信号时间为 t_{3h} ，有

$$t_{3r} = t_{2h} + \frac{L + t_{2h}(v_3 - v_2)}{c - v_3} = \frac{10L}{c} + \frac{10\sqrt{3}l_0}{3c} \quad (6)$$

$$t_{3h} = t_{3r} + \frac{\Delta t'_3 + \frac{v_3}{c^2} \Delta x'_3}{\sqrt{1 - \beta_3^2}}, \beta_3 = \frac{v_3}{c} = \frac{4}{5} \quad (7)$$

其中 $\Delta t'_3 = 0$ ， $x'_3 = l_0$ ，得

$$t_{3h} = \frac{10L}{c} + \frac{(10\sqrt{3} + 4)l_0}{3c} \quad (8)$$

飞船 3 参考系头部用同一个时钟测量从开始（时钟调零）到接收到信号的时间间隔，即为 t'_{3h} ；同一个过程 S 系用两个静止时钟测量，即为 t_{3h} ，故有

$$t'_{3h} = \sqrt{1 - \beta_3^2} t_{3h} = \frac{6L}{c} + \frac{(10\sqrt{3} + 4)l_0}{5c} \quad (9)$$

因 $t'_{3r} = t'_{3h}$ ，即得

$$t'_{3r} = \frac{6L}{c} + \frac{(10\sqrt{3} + 4)l_0}{5c} \quad (10)$$

仿照以上过程，假想在飞船 1 参考系中，此信号被其尾部接收的同时其头部也发出信号，记 S 系测得的飞船 1 头部“发出”的时间为 T_{1h} ：

设 S 系飞船 1 尾部接收信号时间为 t_{1r} ，有

$$T_{1r} = t_{3h} + \frac{t_{3h}(v_3 - v_1) + 2L + (\sqrt{1 - \beta_1^2} + \sqrt{1 - \beta_2^2} + \sqrt{1 - \beta_3^2})l_0}{c + v_1} \quad (11)$$

代入 (8) 式，得

$$T_{1r} = \frac{25L}{2c} + \frac{65\sqrt{3} + 38}{16} \frac{l_0}{c} \quad (12)$$

S 系测得飞船 1 头部“发出”的时间为

$$T_{1h} = T_{1r} + \frac{\Delta t'_1 + \frac{v_1}{c^2} \Delta x'_1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} = t_{1r} + \frac{\beta_1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} \frac{l_0}{c}$$

即得在飞船 1 参考系测得

$$T'_{1r} = T'_{1h} = \sqrt{1 - \beta_1^2} T_{1h} = \frac{10L}{c} + \frac{13\sqrt{3} + 10}{4} \frac{l_0}{c} \quad (13)$$

(3) 设飞船 1 参考系中单位时间发出的光子角频率和光子数分别为 ω_{10} 和 n_{10} ，电磁波功率可表示为 $P_0 = n_{10} \hbar \omega_{10}$ 。电磁波经过飞船 2 等效于完全透射，功率不变，直接考虑飞船 3 的影响。在飞船 3 参考系 (S_3 系) 中，由于多普勒效应，接收到的光子角频率为

$$\omega'_3 = \omega_{10} \sqrt{\frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1}} \sqrt{\frac{1 - \beta_3}{1 + \beta_3}} \quad (14)$$

在 S 系中观察，飞船 1 单位时间发出的光子数为 n_1 ，飞船 3 单位时间接收的光子数为 n_3 ，由光子数不变 $n_1 dt = n_{10} dt_0$ ， $dt_0 = \sqrt{1 - \beta_1^2} dt$ 得

$$n_1 = n_{10} \sqrt{1 - \beta_1^2} \quad (15)$$

由追及关系得

$$n_3 = n_1 \frac{c - v_3}{c - v_1} \quad (16)$$

同理在 S_3 系中有

$$n'_3 = n_3 \sqrt{1 - \beta_3^2} = n_{10} \sqrt{\frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1}} \sqrt{\frac{1 - \beta_3}{1 + \beta_3}} \quad (17)$$

故飞船 3 测得电磁波功率

$$P_3 = n'_3 \hbar \omega'_3 = \frac{(1 + \beta_1)(1 - \beta_3)}{(1 - \beta_1)(1 + \beta_3)} P_0 \quad (18)$$

同理，相对于飞船 1，飞船 3 以相同大小的速度远离，测得电磁波功率

$$P = \frac{(1 + \beta_1)(1 - \beta_3)}{(1 - \beta_1)(1 + \beta_3)} P_3 = \frac{(1 + \beta_1)^2(1 - \beta_3)^2}{(1 - \beta_1)^2(1 + \beta_3)^2} P_0 = \frac{16}{81} P_0 \quad (19)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 2 分：(1) (2) 式各 1 分；

第 (2) 问 24 分：(3) (4) (5) (6) (7) (11) 式各 2 分，(8) (9) (12) (13) 式各 3 分；

第(3)问14分：(14)(15)(16)(19)式各2分，(17)(18)式各3分。

八、氦的电离能(40分)

本题将估算氦原子两电子从基态电离所需的最小能量。下面各小问均可以认为原子核质量极大， m 为电子质量。

(1) 首先运用类似玻尔氢原子轨道模型的方法，计算基态能量 E ，为简单起见假设两个电子对称居于原子核两侧。本题中能量的数值解均以电子伏特 $\text{eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{J}$ 为单位。

(2) 量子力学告诉我们系统的能量可以用波函数 ψ 和系统的哈密顿算符 \hat{H} 在全空间的积分计算：

$$E = \int \psi^* \hat{H} \psi dV$$

氦原子系统基态的哈密顿算符是：

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 - \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

首先猜测波函数有如下形式：

$$\psi = \frac{Z^3}{\pi a^3} e^{-\frac{Z(r_1+r_2)}{a}}$$

其中 a 为玻尔半径， Z 为一参数。给出氦原子基态系统的能量的表达式。

(3) 作为估算，根据(2)的表达式说明 Z 取何值时能量最小。基态能量即为极小值，计算基态能量大小 E 。

提示：以上波函数满足如下积分式

$$\int \psi^* \psi \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_1 dV_2 = \frac{5Z}{8} m \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \right)^2$$

laplace 算子和拉普拉斯算子在球坐标系下写为

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi} \\ \nabla^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

解：(1) 系统能量的表达式为

$$E = \frac{1}{2} m v^2 \cdot 2 - \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot 2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2r} \quad (1)$$

由一个电子圆周运动的受力知

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot (2r)^2} \quad (2)$$

结合角动量量子化条件

$$m v r = \hbar \quad (3)$$

联立(1)(2)(3)式，解得基态能量为

$$E = -m \left(\frac{7e^2}{16\pi\epsilon_0 \hbar} \right)^2 \approx -83.3 \text{ eV} \quad (4)$$

(2) 将哈密顿算符分成三部分处理

$$\hat{H} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 r_1} \right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 - \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 r_2} \right) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{12} \quad (5)$$

猜测的波函数也可以视为两部分

$$\psi = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a^3}} e^{-\frac{Zr_1}{a}} \cdot \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a^3}} e^{-\frac{Zr_2}{a}} = \psi_1 \psi_2 \quad (6)$$

不难发现能量也可以分为一下三个部分计算

$$E = \int \psi_1^* \hat{H}_1 \psi_1 dV_1 + \int \psi_2^* \hat{H}_2 \psi_2 dV_2 + \int \psi^* \hat{H}_{12} \psi dV_1 dV_2 \quad (7)$$

积分得到最终表达式为

$$E = Z \left(Z - \frac{27}{8} \right) m \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \right)^2 \quad (8)$$

(3) 根据 (8) 式不难得到能量取最小值时

$$Z = \frac{27}{16} \quad (9)$$

所以基态能量即为

$$E = -m \left(\frac{27e^2}{64\pi\epsilon_0 \hbar} \right)^2 \approx -77.5 \text{ eV} \quad (10)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 16 分：(1) (2) (3) (4) 式 4 分；

第 (2) 问 16 分：(5) (6) (7) (8) 式 4 分；

第 (3) 问 8 分：(9) (10) 式 4 分。

CPHOS

版权信息

命题人

陈 炆 任宇桐 吴恒旭 徐 前

审题人

陈 炆 付亦轩 任宇桐 吴恒旭 徐 前

联系方式



微信公众号
CPHOS



官方网站
cphos.cn



CPHOS 论坛
cphos.cn/index.php/community

邮箱

service@cphos.cn

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考