

第 25 届 CPHOS 物理竞赛联考

理论试题参考答案及评分标准

本文件于 2025 年 3 月 17 日 08:00 发布，最后更新于 2025 年 4 月 6 日 22:25。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

一、(40 分) 偶极子的定点转动

(1) 已知空间中 $x > 0$ 且 $y > 0$ 的区域为真空，其余区域为导体，即导体表面为 xOz 平面和 yOz 平面。在真空中 (a, b, c) 处固定一个点电荷 q ，体系已达到静电平衡。

(1.1) 求解导体表面的电场强度，即 $\vec{E}(x, +0, z)$ 与 $\vec{E}(+0, y, z)$ 。

(1.2) 同样在真空中有一个荷质比为 $\frac{Q}{m}$ 的电荷，初始与点电荷 q 的 z 轴坐标相同，并静止在原点附近，坐标为 (A, B, c) ，已知 $\frac{Q}{A^2+B^2} \ll \frac{q}{a^2+b^2}$ ，说明 $A = 2B$ 时电荷 Q 会撞到导体上还是运动到无穷远，如果会撞到导体上，请给出会撞到导体的哪个表面，并给出所用时间 t 满足的方程；如果会运动到无穷远，请判断所用时间 t 是否有限。

(2) 接 (1)，真空和导体的分布不变，将点电荷 q 替换为一个电偶极子 \vec{p}_1 ，大小为 $p_0 = qd$ ，正电荷质量为 M ，负电荷质量为 m ，将其质心固定在 $(a, a, 0)$ 处，电偶极子可绕质心在三维空间内自由转动。

(2.1) 由静电场唯一性定理，可以用像电荷等效替代导体表面的感应电荷，直接画出实际电偶极子和像电偶极子的 z 方向俯视图。

(2.2) 试求电偶极子所有可能的平衡方向（用章动角 θ 和进动角 φ 或用 xyz 坐标描述 \vec{p}_1 的方向）。

(2.3) 容易判断出 $\vec{p}_1 = p_0(0, 0, 1)$ 可以保持平衡，试分析此处的稳定性，如果稳定，求出其微振动角频率；如果不稳定，请说明理由。

补充知识(选择适合自己的方法):

① 电偶极子 \vec{p} 在相对位矢 \vec{r} 处激发的电场为 $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}}{r^3}$;

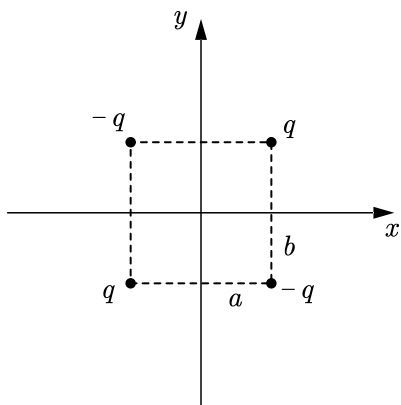
② 用 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, s$) 可得到 s 个动力学方程，其中 $L = T - V$ ， T 为系统动能， V 为系统势能， q_α 为独立的广义坐标；

③ 在章动角 $\theta = 0$ 附近展开时进动角 φ 初始值的影响并不是小量，而与扰动方向有关，可以通过适当的设定初始扰动方向消除 φ 的影响。

参考解答:

(1) 无穷大导体与无穷远等势， $U = 0$ ，边界条件为切向电场 $E_t = 0$ ，由静电场唯一性定理，可以用像电荷等效替代导体感应电荷对导体外的空间电势的贡献。

(1.1) 电像俯视图如下:



答图1.1 电像俯视图

因此导体表面电场可算出为：

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, +0, z) &= \left(-\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{r_{>}^3} + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b}{r_{<}^3} \right) \hat{y} \\ &= \frac{qb}{2\pi\epsilon_0} \left\{ [(a+x)^2 + (z-c)^2 + b^2]^{-\frac{3}{2}} - [(x-a)^2 + (z-c)^2 + b^2]^{-\frac{3}{2}} \right\} \hat{y}\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\vec{E}(+0, y, z) &= \left(-\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r_{>}^3} + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{r_{<}^3} \right) \hat{x} \\ &= \frac{qa}{2\pi\epsilon_0} \left\{ [(y+b)^2 + (z-c)^2 + a^2]^{-\frac{3}{2}} - [(y-b)^2 + (z-c)^2 + a^2]^{-\frac{3}{2}} \right\} \hat{x}\end{aligned}\quad (2)$$

(1.2) 首先有 $\frac{Q}{A^2+B^2} \ll \frac{q}{a^2+b^2}$, 所以电荷 Q 对 q 的作用力可以忽略, Q 的像电荷对 Q 的作用力也可以忽略, 其次因为电荷 Q 与 q 等高, 则不妨令 $c=0$ 并将 (1)、(2) 式在原点附近展开到一阶小量:

$$\vec{E}(x, y, 0) = \vec{E}(x, +0, 0) + \vec{E}(+0, y, 0) = -\frac{3qab}{\pi\epsilon_0(a^2+b^2)^{\frac{5}{2}}} (x\hat{y} + y\hat{x})\quad (3)$$

$\vec{E}(x, y, 0)$ 无 \hat{z} 分量且电荷 Q 初始无速度所以始终在水平面上运动。

若 Q, q 同号, 可得电荷 Q 动力学方程的直角坐标分量式为

$$m\ddot{x} = -ky\quad (4)$$

$$m\ddot{y} = -kx\quad (5)$$

可令 $u_1 = x + y$ 、 $u_2 = x - y$ 去求解这个微分方程组, 得到

$$\ddot{u}_1 = -\omega^2 u_1\quad (6)$$

$$\ddot{u}_2 = \omega^2 u_2\quad (7)$$

其中 $k = \frac{3Qqab}{\pi\epsilon_0(a^2+b^2)^{\frac{5}{2}}}$, $\omega = \sqrt{\frac{3Qqab}{\pi\epsilon_0(a^2+b^2)^{\frac{5}{2}}m}}$ 。初始条件为

$$\begin{cases} u_1|_{t=0} = A+B \\ \dot{u}_1|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2|_{t=0} = A-B \\ \dot{u}_2|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

所以解得

$$u_1 = (A+B) \cos \omega t, \quad u_2 = (A-B) \cosh \omega t$$

最后可得电荷的轨迹参数方程为

$$x = \frac{1}{2}[(A+B)\cos\omega t + (A-B)\cosh\omega t] \quad (8)$$

$$y = \frac{1}{2}[(A+B)\cos\omega t - (A-B)\cosh\omega t] \quad (9)$$

易知 $A = 2B$ 时坐标 x 会随时间增大, y 会随时间减小, 电荷会落到 xOz 平面上, 落到导体上所需时间 t 满足的方程为

$$3\cos\omega t = \cosh\omega t \quad (10)$$

若 Q, q 异号, 可得电荷 Q 动力学方程的直角坐标分量式为

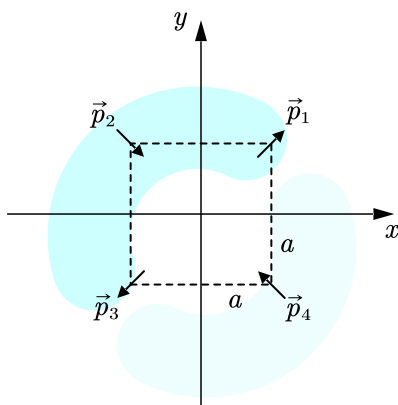
$$m\ddot{x} = ky \quad (4')$$

$$m\ddot{y} = kx \quad (5')$$

仍可令 $u_1 = x + y$ 、 $u_2 = x - y$ 去求解这个微分方程组, 但是也可以直接判断出发散。

坐标 x, y 都会随时间增大, 电荷趋于无穷远, 当 x, y 很大时 q 及其像电荷可以看作一个净电荷为 0 的点电荷, Q 受力趋于 0, 在无穷远的速度趋于常数, 所以用时 t 发散。而不会和 q 相撞, Q 至多会趋于绕 q 转圈, 而不会落到导体上。

(2) (2.1) 由点电荷的电像法可得电偶极子的电像如下图:



答图1.2 偶极子电像示意图

可以写出四个电偶极子的直角坐标形式:

$$\vec{p}_1 = p_0(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$\vec{p}_2 = p_0(\alpha, -\beta, -\gamma)$$

$$\vec{p}_3 = p_0(-\alpha, -\beta, \gamma)$$

$$\vec{p}_4 = p_0(-\alpha, \beta, -\gamma)$$

其中 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ 。

【解法一 (力法)】

(2.2) \vec{p}_1 的平衡条件即受力矩为零, 电偶极子所受力矩公式为 $\vec{M} = \vec{p}_1 \times \vec{E}_1$, 即平衡时 $\vec{p}_1 \parallel \vec{E}_1$, \vec{E}_1 为 \vec{p}_1 处的外电场, 求得

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\sum_{i=2}^4 \frac{3(\vec{p}_i \cdot \hat{r}_i)\hat{r}_i - \vec{p}_i}{r_i^3} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3\vec{p}_2 \cdot \hat{x}\hat{x} - \vec{p}_2}{8a^3} + \frac{3\vec{p}_4 \cdot \hat{y}\hat{y} - \vec{p}_4}{8a^3} + \frac{3\vec{p}_3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} \right) - \vec{p}_3}{16\sqrt{2}a^3} \right) \quad (11) \end{aligned}$$

$$= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{8a^3} \left(\begin{bmatrix} 2p_{2x} - p_{4x} \\ -p_{2y} + 2p_{4y} \\ -p_{2z} - p_{4z} \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} \frac{p_{3x} + 3p_{3y}}{2} \\ 3p_{3x} + p_{3y} \\ -p_{3z} \end{bmatrix} \right) \quad (11')$$

$$= \frac{p_0}{32\pi\epsilon_0 a^3} \begin{bmatrix} \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)\alpha - \frac{3\sqrt{2}\beta}{8} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{8}\alpha + \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)\beta \\ \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\gamma \end{bmatrix} \quad (12)$$

所以 $\vec{p}_1 \parallel \vec{E}_1$ ，即平衡所满足条件为

$$\frac{\frac{24 - \sqrt{2}}{2}\alpha - \frac{3}{2}\sqrt{2}\beta}{\alpha} = \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{2}\alpha + \frac{24 - \sqrt{2}}{2}\beta}{\beta} = \frac{(8 - \sqrt{2})\gamma}{\gamma} \quad (13)$$

允许的平衡位形为

i) $\alpha = \beta = 0, \gamma = \pm 1$

ii) $\gamma = 0$ 且 $\alpha = \beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\gamma = 0$ 且 $\alpha = -\beta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

共六种平衡情况，并通过计算力矩分析 $\alpha = \beta = 0, \gamma = 1$ 这种情况的稳定性。

$$\vec{M} = \vec{p}_1 \times \vec{E}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} p_y E_z - p_z E_y \\ p_z E_x - p_x E_z \\ p_x E_y - p_y E_x \end{bmatrix}$$

(2.3) $\gamma \approx 1, \alpha, \beta$ 为一阶小量，力矩只需保留一阶小量，可以得到

$$\vec{p}_1 \approx p_0 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_1 \approx \frac{p_0}{128\pi\epsilon_0 a^3} \begin{bmatrix} \frac{24 - \sqrt{2}}{2}\alpha - \frac{3}{2}\sqrt{2}\beta \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2}\alpha + \frac{24 - \sqrt{2}}{2}\beta \\ 8 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\vec{M} \approx \frac{p_0^2}{128\pi\epsilon_0 a^3} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2}\alpha - \left(4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\beta \\ \left(4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\alpha - \frac{3\sqrt{2}}{2}\beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

可以通过微元法或者根据 \vec{p}_1 大小不变的条件求得此时转动角速度与 $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ 的关系：

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = p_0(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}) = \vec{\omega} \times \vec{p}_1 = p_0(\omega_y, -\omega_x, 0)$$

严格计算需要将力矩向惯量主轴投影，但是可以发现投影的贡献是二阶小量，所以可以忽略：

$$I_0 \begin{bmatrix} -\ddot{\beta} \\ \ddot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{p_0^2}{128\pi\epsilon_0 a^3} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2}\alpha - \left(4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\beta \\ \left(4 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\alpha - \frac{3\sqrt{2}}{2}\beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

其中 $I_0 = \frac{Mmd^2}{M+m}$, 令 $\omega_0 = \frac{p_0}{\sqrt{128\pi\epsilon_0 a^3 I_0}}$ 可得

$$\ddot{\alpha} = \omega_0^2 \left[\left(4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \alpha - \frac{3\sqrt{2}}{2} \beta \right] \quad (17)$$

$$\ddot{\beta} = \omega_0^2 \left[\left(4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \beta - \frac{3\sqrt{2}}{2} \alpha \right] \quad (18)$$

类似于求简正模的操作, 令 $\alpha = Ae^{i\omega t}$, $\beta = Be^{i\omega t}$, 振幅有非零解的条件是系数行列式为零:

$$\begin{vmatrix} \left(4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} & \left(4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

解得

$$\omega_{\pm}^2 = - \left(4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \omega_0^2 \quad (20)$$

ω_{\pm} 为虚数, 此处不稳定。

【解法二 (能量法)】

(2.2) 平衡条件即势能取极值, 电荷体系一般电势能公式为 $V = \sum \frac{1}{2} q_i U_i$, 因为感应电荷在导体上电势为 0, 则总的静电能为

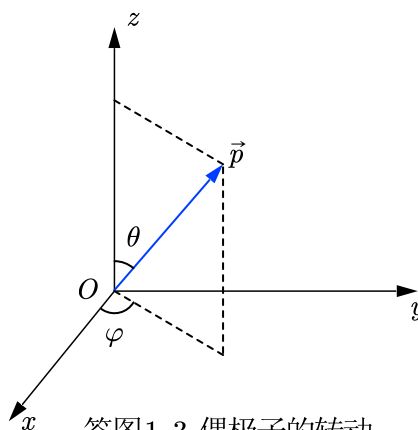
$$V = -\frac{1}{2} \vec{p}_1 \cdot \vec{E}_1 \quad (11^*)$$

$$\vec{E}_1 = \frac{p_0}{32\pi\epsilon_0 a^3} \begin{bmatrix} \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{8} \right) \alpha - \frac{3\sqrt{2}\beta}{8} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{8} \alpha + \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{8} \right) \beta \\ \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \gamma \end{bmatrix} \quad (12^*)$$

同法一所求, 可得系统电势能为

$$\begin{aligned} V &= -\frac{p_0^2}{64\pi\epsilon_0 a^3} \left[\left(3 - \frac{\sqrt{2}}{8} \right) (\alpha^2 + \beta^2) - \frac{3\sqrt{2}}{4} \alpha\beta + \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \gamma^2 \right] \\ &= -\frac{p_0^2}{64\pi\epsilon_0 a^3} \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{8} \right) (\alpha^2 + \beta^2) - \frac{3\sqrt{2}}{4} \alpha\beta \right] + V_0 \end{aligned} \quad (13^*)$$

用章动角 θ 和进动角 φ 来描述电偶极子的转动:



答图1.3 偶极子的转动

$$\vec{\omega} = (-\sin \varphi \dot{\theta}, \cos \varphi \dot{\theta}, \dot{\varphi})$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

可得转动动能为

$$T = \frac{1}{2} I_0 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) \quad (14^*)$$

由拉格朗日函数 $L = T - V$ 可得平衡条件即

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

其中 $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = I_0 \dot{\varphi} \sin^2 \theta$, $\frac{\partial L}{\partial \theta} = I_0 \dot{\theta}$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = - \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \right) \quad (15^*)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = I_0 \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta - \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right) \quad (16^*)$$

又因为

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = - \frac{p_0^2}{64\pi\epsilon_0 a^3} \left[\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \alpha - \frac{3\sqrt{2}}{4} \beta \right] \quad (17^*)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = - \frac{p_0^2}{64\pi\epsilon_0 a^3} \left[\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \beta - \frac{3\sqrt{2}}{4} \alpha \right] \quad (18^*)$$

最后得

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = - \frac{3\sqrt{2}p_0^2}{256\pi\epsilon_0 a^3} \sin^2 \theta \cos 2\varphi = 0 \quad (19^*)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = I_0 \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{p_0^2}{128\pi\epsilon_0 a^3} \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{4} \sin 2\varphi \right) \sin 2\theta = 0 \quad (20^*)$$

上述偏导数也可先将 α, β 用 θ, φ 代换再求, 最后平衡位置为

i) $\theta = 0$ 或 π ii) $\theta = \frac{\pi}{2}$ 且 $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ 或 $\frac{3}{4}\pi$ 或 $\frac{5}{4}\pi$ 或 $\frac{7}{4}\pi$ 。

(2.3) 根据提示③, 不妨考虑 $\dot{\varphi}$ 恒为 0 的情况, 这会对 φ 有一定约束。在 $\theta = 0$ 附近展开再使用

拉氏方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}$ 等号两边同时保留最小非零阶项, 得到动力学方程:

$$0 = \sin^2 \theta \cos 2\varphi \quad (21^*)$$

$$I_0 \ddot{\theta} = \frac{p_0^2}{64\pi\epsilon_0 a^3} \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{4} \sin 2\varphi \right) \theta \quad (22^*)$$

因为 θ 不为零, 式(21*)可以给出 φ 的要求。

$\varphi = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5}{4}\pi$ 时:

$$I_0 \ddot{\theta} = \frac{p_0^2}{64\pi\epsilon_0 a^3} \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \theta \quad (23^*)$$

$\varphi = \frac{3}{4}\pi$ 或 $\frac{7}{4}\pi$ 时:

$$I_0 \ddot{\theta} = \frac{p_0^2}{64\pi\epsilon_0 a^3} (2 + \sqrt{2}) \theta \quad (24^*)$$

力矩非回复，可以证明这两种情况与解法一的结果一致，都为不稳定平衡。

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 12 分：(1) (2) 式各 2 分，(3) (6) (7) (8) (9) (10) 式各 1 分， q, Q 异号的情况写出 t 发散或不与导体相撞即给 2 分；

第 (2) 问 28 分：

第 (2.1) 问 2 分：俯视图 2 分；

第 (2.2) 问 11 分：

【解法一】(11) 式 2 分，(12) (13) 式各 3 分，i) 式不占分，ii) 式四种情况算出任意一种即给 3 分；

【解法二】(11*) 式 2 分，(12*) 式 3 分，(13*) (19*) (20*) 式各 1 分，i) 式不占分，ii) 式四种情况算出任意一种即给 3 分；

第 (2.3) 问 15 分：

【解法一】(14) (16) 式各 1 分，(15) (17) (18) (19) 式各 2 分，(20) 式 4 分，判断不稳定 1 分；

【解法二】(22*) 2 分，(21*) (23*) (24*) 式各 4 分，算对系数才给分，判断不稳定 1 分。

二、(40 分) 电离层中电磁波的传播

本题将考虑电磁波在地球电离层中的传播并进一步研究其中存在的磁致旋光效应。

地球的电离层可以视为完全电离的电子和离子。其中的自由电子的数密度记为 n ，电荷量为 $-e$ ，质量为 m 。同时地球表面实际上存在着均匀的地磁场，设其沿 z 方向，即有 $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$ 。本题将讨论电离层中沿着磁场方向传播平面电磁波，设其角频率为 ω ，从而电磁波的电场可以写为 $\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{ikx - i\omega t}$ ，其中复振幅 \vec{E}_0 仅仅包含 xy 方向的分量。

(1) 考虑原点附近的一个自由电子，设其在 x_0 附近运动，仅考虑电磁波的电场 $\vec{E}(x, t)$ 和恒定地磁场 \vec{B}_0 对电子的作用，试写出电子的运动方程，表达式中可以包含 \vec{E}_0 ， \vec{B}_0 和 \vec{r} 及其对时间的导数。

(2) 在本问题中，假定入射电磁波的偏振是左旋或右旋圆偏振将有助于求解上问得到的运动方程。设 $\hat{e}_\pm = \hat{x} \pm i\hat{y}$ ，分别令 $\vec{E}_0 = \vec{E}_0 \hat{e}_\pm$ ，试给出稳态解 \vec{r}_\pm 。

(3) 试利用第 (2) 问中结论，给出 $\vec{E}_0 = \vec{E}_0 \hat{e}_\pm$ 时对应极化强度 \vec{P}_\pm ，表达式中仅允许出现 $B_0, E_0, \hat{e}_\pm, \omega$ 和其他常数。

(4) 试进一步给出以左旋、右旋电磁波入射时等效相对介电常数 $\epsilon_{r,\pm}(\omega)$ 作为 ω 的函数，表达式中仅能出现 $\omega, \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}, \omega_c = \frac{eB_0}{m}$ 。

(5) 电场沿 x 向的线偏振波可以视为是左旋平面波和右旋平面波的叠加，即有 $\vec{E}_0 = E_0 \hat{x} = \frac{1}{2} E_0 \hat{e}_+ + \frac{1}{2} E_0 \hat{e}_-$ 。现考虑一束电场沿 x 向，沿 z 向传播的线偏振波，试在弱磁场近似（即 $\omega_c \ll \omega$ ）下计算在传播了 L 的距离后其左右旋分量的相位差 $\Delta\varphi_+ = \varphi_+ - \varphi_-$ 表达式中仅能出现 $\omega, \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}, \omega_c = \frac{eB_0}{m}, L, c$ 。

(6) 左右旋分量的相位差将会导致电场方向的改变，试求出电场旋转角度 $\Delta\varphi$ ，逆时针为正，表达式中仅能出现 $\omega, \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}, \omega_c = \frac{eB_0}{m}, L, c$ 。

参考解答：

(1) 自由电子受电场力和洛伦兹力共同作用，因此有

$$m\ddot{\vec{r}} = -e(\vec{E}_0 e^{ikx_0 - i\omega t} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}_0) \quad (1)$$

(2) 试探 $\vec{r}_\pm = r_0 \hat{e}_\pm e^{-i\omega t}$ ，则有

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} \times \vec{B}_0 &= B_0 r_0 e^{-i\omega t} (-i\omega)(\hat{x} \pm i\hat{y}) \times \hat{z} \\ &= B_0 r_0 \omega e^{-i\omega t} (-i)(-\hat{y} \pm i\hat{x}) \\ &= \pm B_0 r_0 \omega e^{-i\omega t} \hat{e}_\pm \end{aligned} \quad (2)$$

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega^2 r_0 \hat{e}_\pm e^{-i\omega t} \quad (3)$$

因此代入 (1) 式可得

$$-m\omega^2 r_0 \hat{e}_\pm \pm eB_0 r_0 \omega \hat{e}_\pm = -eE_0 e^{ikx_0} \hat{e}_\pm \quad (4)$$

解得

$$r_0 = \frac{-eE_0 e^{ikx_0}}{\pm eB_0 \omega - m\omega^2} \quad (5)$$

即

$$\vec{r}_\pm = \frac{-eE_0}{\pm eB_0 \omega - m\omega^2} \hat{e}_\pm e^{ikx_0 - i\omega t} \quad (6)$$

(3) 对一个自由电子，其位移产生的电偶极矩为

$$\vec{p}_\pm = -e\vec{r}_\pm = \frac{e^2}{\pm eB_0 \omega - m\omega^2} E_0 \hat{e}_\pm e^{ikx_0 - i\omega t} \quad (7)$$

因此在该处的极化强度矢量为

$$\vec{P}_\pm = n\vec{p}_\pm = \frac{ne^2}{\pm eB_0 \omega - m\omega^2} E_0 \hat{e}_\pm e^{ikx_0 - i\omega t} \quad (8)$$

(4) 改写 (8) 式可以得到

$$\vec{P}_\pm = \epsilon_0 \vec{E}(x, t) \frac{\omega_p^2}{\pm \omega_c \omega - \omega^2} \quad (9)$$

因此

$$\epsilon_{r,\pm}(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\pm \omega_c \omega - \omega^2} \quad (10)$$

(5) 先计算波数差

$$\begin{aligned}
\Delta k_{\pm} &= k_{+} - k_{-} \\
&= \frac{\omega}{c} \left(\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega}\right)}} - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \left(1 + \frac{\omega_c}{\omega}\right)}} \right) \\
&= - \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega^2 c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}
\end{aligned} \tag{11}$$

因此在传播了 L 距离后, 有

$$\Delta \varphi_{\pm} = \Delta k_{\pm} L = - \frac{\omega_p^2 \omega_c L}{\omega^2 c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \tag{12}$$

(6) 相当于此时有

$$\begin{aligned}
\vec{E}_0 &= \frac{1}{2} E_0 e^{i\Delta \varphi_{\pm}} \hat{e}_{+} + \frac{1}{2} E_0 \hat{e}_{-} \\
&= \frac{1}{2} E_0 [e^{i\Delta \varphi_{\pm}} (\hat{x} + i\hat{y}) + (\hat{x} - i\hat{y})] \\
&= \frac{1}{2} E_0 \left[(1 + \cos \Delta \varphi_{\pm} + i \sin \Delta \varphi_{\pm}) \hat{x} + (-\sin \Delta \varphi_{\pm} - i(1 - \cos \Delta \varphi_{\pm})) \hat{y} \right] \\
&= E_0 e^{\frac{i\Delta \varphi_{\pm}}{2}} \left(\cos \frac{\Delta \varphi_{\pm}}{2} \hat{x} - \sin \frac{\Delta \varphi_{\pm}}{2} \hat{y} \right)
\end{aligned} \tag{13}$$

因此

$$\Delta \varphi = - \frac{\Delta \varphi_{\pm}}{2} \tag{14}$$

代入 (12) 可得

$$\Delta \varphi = \frac{\omega_p^2 \omega_c L}{2 \omega^2 c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \tag{15}$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 3 分: (1) 式 3 分;

第 (2) 问 12 分: (2) 式 3 分, (3) (4) (5) 式各 2 分, (6) 式 3 分;

第 (3) 问 5 分: (7) 式 2 分, (8) 式 3 分;

第 (4) 问 4 分: (9) 式 1 分, (10) 式 3 分;

第 (5) 问 6 分: (11) (12) 式各 3 分;

第 (6) 问 10 分: (13) 式 4 分, (14) (15) 式各 3 分。

注: 题目关于电磁波传播方向的表述错误 (电场矢量在 xy 平面上时电磁波应沿 z 向传播), 即

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{ikx - i\omega t}$$

应该修改为

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{ikz - i\omega t}$$

由于此错误对考生解题影响较小, 考试过程中收到反馈后立即更正。评分时, 若考生将参考解答表达式中 e^{ikx_0} 写为 e^{ikz_0} 也可以得分。

三、(40 分) 塞曼效应

把原子放入一个均匀外磁场 B_{out} 中, 原子的能级会发生劈裂, 这就是塞曼效应。严谨的塞曼效应要采用量子力学微扰论进行计算, 在本题中, 我们将利用索末菲量子化条件提出近似求解在均匀外磁场下的塞曼效应的方法。假设电子的运动满足牛顿方程, 同时需要满足索末菲的量子化条件。

已知对沿封闭轨道运行的粒子, 索末菲量子化条件为:

$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{r} = 2\pi n \hbar$$

其中 n 为一个正整数, \hbar 为约化普朗克常量, 积分沿着封闭轨道运行。假设电子的质量为 m , 电量为 $-e$, 认为质子的质量远远大于电子质量, 并且忽略电子的自旋。

(1) 试通过索末菲量子化条件求解一个无外场的氢原子的能级 E_n 。

(2) 现在考虑一个处在均匀弱外场 \vec{B} 中的氢原子, 电子在平面内绕质子作圆周运动, 外磁场的方向与电子的运动平面垂直, 如图 3.1 所示:

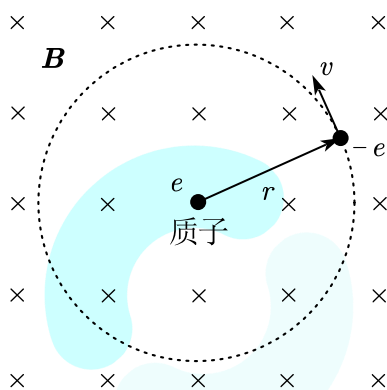


图3.1 原子在外磁场中

通过代换 $\vec{p} \rightarrow \vec{p} + q\vec{A}$ (其中 \vec{A} 是矢势, q 为粒子所带的电荷) 可以推广索末菲量子化条件。请用推广后的索末菲量子化条件近似计算相较于无外场时的能级变化 ΔE_n 和轨道半径变化 Δr_n , 注意都只保留到 \vec{B} 的最低阶非零项。

参考解答:

(1) 对于无外场的氢原子来说, 索末菲量子化条件化为:

$$\int_0^{2\pi} p_n r_n d\theta = 2\pi L_n = 2\pi n \hbar \quad (1)$$

其中 L_n 为电子的角动量。同时写出电子的运动方程:

$$m \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2} \quad (2)$$

电子的能量表达式:

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} \quad (3)$$

联立 (1) (2) (3) 式可得:

$$E_n = -\frac{1}{2} m \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \right)^2 \frac{1}{n^2} \quad (4)$$

(2) 该体系所对应的矢势为:

$$\vec{A} = Bx\hat{y} \quad (5)$$

带入推广以后的索末菲量子化条件:

$$2\pi L_n + e \cdot \pi r_n^2 B = 2\pi n \hbar \quad (6)$$

电子的运动方程:

$$m \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2} - e v_n B \quad (7)$$

联立 (6) (7) 式消去 v_n :

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{m e^2} \left(n^2 \hbar^2 - \frac{1}{4} e^2 B^2 r_n^4 \right) = r_n \quad (8)$$

由于 B 是一个小量, 因此可以先忽略等式左边含 B 的项, 得到 0 阶近似解:

$$r_n^{(0)} = \frac{4\pi\epsilon_0}{m} \left(\frac{n\hbar}{e} \right)^2 \quad (9)$$

再将 0 阶近似解代入 (8) 式左侧, 得到 1 阶近似解:

$$r_n^{(1)} = \frac{4\pi\epsilon_0}{m} \left(\frac{n\hbar}{e} \right)^2 - \frac{\pi\epsilon_0 B^2}{m^5} (4\pi\epsilon_0)^4 \left(\frac{n\hbar}{e} \right)^8 \quad (10)$$

轨道变化

$$\Delta r_n = - \frac{\pi\epsilon_0 B^2}{m^5} (4\pi\epsilon_0)^4 \left(\frac{n\hbar}{e} \right)^8 \quad (11)$$

联立 (3) (6) (7) 式:

$$E_n = \frac{1}{2m} \left(\frac{n\hbar}{r} \right)^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} + \frac{n\hbar}{2m} e B + \frac{e^2 r^2 B^2}{8m} \quad (12)$$

由于轨道的变化 $\Delta r_n \propto B^2$, 在保留到 B 的最低阶项的近似下可认为 $r_n = r_n^{(0)}$, 因此

$$\Delta E_n = \frac{n\hbar}{2m} e B \quad (13)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 12 分: (1) (2) (3) (4) 式各 3 分;

第 (2) 问 28 分: (5) 式 2 分 (写其他可行的矢势也算对), (6) (7) (9) (11) (12) (13) 式各 3 分, (8) (10) 式 4 分。

四、光弹性 (40 分)

当光束射入各向异性晶体时, 会分解为两束沿着不同方向传播的光, 这样的现象叫做**双折射**。双折射分为永久双折射和暂时双折射两类。对于方解石等晶体, 这种各向异性的性质是其固有属性, 称为永久双折射; 所谓暂时双折射是指在通常情况下不出现双折射, 但在外界作用下会出现双折射现象, 例如亚克力材料等, 他们在没有应力存在时并不具有双折射的性质, 但是当材料受到应力的作用后, 它们就如同晶体一样表现出各向异性的性质, 从而产生双折射现象。应力是用来描述外界载荷作用后模型内部某一点处产生的内力的强弱, 定义为 $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$, 式中 ΔS 代表模型上取一小面积, ΔF 代表作用在 ΔS 上的内力。

由应力引起的双折射是暂时的, 应力消除即消失, 这一现象往往称之为**光弹性**。

类似于折射率椭球, 我们也可以使用应力椭球描述应力状况。实验证明, 透明固体材料由应力引起的双折射效应, 其主折射率与对应的主应力在方向上是重合的。数值上:

$$n_1 - n_0 = A\sigma_1 + B(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (1)$$

$$n_2 - n_0 = A\sigma_2 + B(\sigma_3 + \sigma_1) \quad (2)$$

$$n_3 - n_0 = A\sigma_3 + B(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3)$$

其中 A 、 B 为常数， n_0 为应力为0时材料的折射率， σ_1 、 σ_2 、 σ_3 为主应力， n_1 、 n_2 、 n_3 为对应的主折射率。

光弹性实验的最基本观测装置为平面偏振光系统，它是由光源和一对正交偏振片组成的，装置示意图如图4.1所示。设入射光为单色光，波长为 λ ，经过起偏器后成为平面偏振光，设其振幅为 a ，光弹性模型厚度为 d 。假设两向应力作用的情况下（即 $\sigma_3 = 0$ ），光垂直入射到光弹性模型上的 O 点。设 O 点应力主轴的方向分别为图中所示的 x 、 y ，其中 x 与检偏器光轴之间的夹角为 θ 。

(1) 当光入射模型表面任意一点后，由于双折射，会沿着应力主轴方向分解为两个分振动，推导通过模型后两个分振动之间的相位差 α 的表达式。

(2) 推导通过检偏器后的光强 I 的表达式。

(3) 分析使光强 I 为0的条件，并说明光强为0的条件与主应力大小或方向之间的关系。

(4) 结合计算结果说明：

a. 为什么同时转动起偏镜和检偏镜，部分暗条纹随着转动而改变位置；部分暗条纹可能随着载荷的增减而变化

b. 使用白色光作为光源时同一种颜色条纹上的点应力有何特点？

(5) 对原装置进行改装，将两个四分之一波片分别放入起偏器和模型及检偏器和模型之间，两个四分之一波片的快慢轴分别相互垂直（即波片1的快轴方向与波片2的快轴方向垂直，与波片2慢轴方向平行），且与两偏振轴均呈 45° ，重解(2)问。

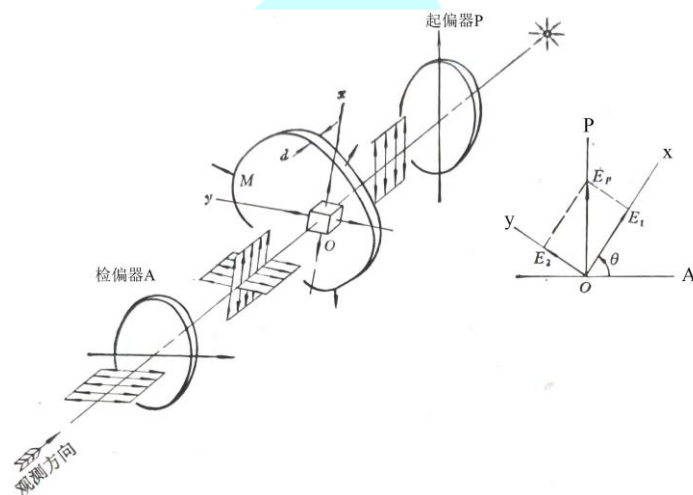


图4.1光测弹性学装置示意图

参考解答：

(1) 折射率差值：

$$n_1 - n_2 = A(\sigma_1 - \sigma_2) - B(\sigma_1 + \sigma_2) = (A - B)(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1)$$

光程差：

$$R = d(n_1 - n_2) = d(A - B)(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (2)$$

相位差：

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} R = \frac{2\pi}{\lambda} (A - B)d(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (3)$$

(2) 光源发出的光经起偏镜成为平面偏振光，即为 $E_p = a \sin \omega t$ 。入射到模型表面后分别沿主应力方向分解为两个分振动

$$E_1 = a \sin \omega t \sin \theta \quad (4)$$

$$E_2 = a \sin \omega t \cos \theta \quad (5)$$

这两个分振动在模型内的传播速度不同，通过模型后他们之间产生位相差，相位差记为 α 。

$$E_3 = a \sin(\omega t + \alpha) \sin \theta \quad (6)$$

$$E_4 = a \sin \omega t \cos \theta \quad (7)$$

当 E_3, E_4 到达检偏镜后，只有平行于检偏镜偏振轴的振动分量才能通过，经过检偏镜后的合成光波为

$$E_A = E_3 \cos \theta - E_4 \sin \theta \quad (8)$$

带入计算可得

$$E_A = a \sin 2\theta \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\alpha}{2} \right) \quad (9)$$

可见合成的光波仍为平面偏振光，振幅为 $a \sin 2\theta \sin \frac{\alpha}{2}$ ，光强为：

$$I = k a^2 \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (10)$$

由于光强的既是 θ 也是 α 的函数，这也就意味着干涉花样中包含两类条纹。

(3) 暗纹条件：

$$\sin 2\theta = 0 \quad (11)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = 0 \quad (12)$$

当 $\sin 2\theta = 0$ 时，满足暗纹条件，即 $\theta = 0, \pi/2$ 时。由于 θ 代表的是应力主轴与偏振轴之间夹角，因此说明只要模型上某点的主应力方向与偏振轴重合，则这个点一定是暗点，一系列暗点构成一条暗线，线上每点的主应力倾角相同。

当 $\sin \frac{\alpha}{2} = 0$ 时，满足暗纹条件，要求 $\alpha = 2n\pi$ ，即 $\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n\lambda}{(A-B)d}$ 。因此说明只要模型上某点的主应力差值为特定值时，这些点一定是暗点，一系列暗点构成一条暗线，线上每点的主应力差值相同。

(4)

- a. 同时转动起偏镜和检偏镜，由 θ 决定的暗纹随之转动。由 α 决定的暗纹随着载荷变化。
- b. 当白光作为光源时，根据之前的推导可知由 α 决定的“暗纹”与波长有关。对于白光，可认为是多种色光混合，某一种色光满足消光条件时，其他色光并不被消光，因此会呈现彩色条纹。凡是主应力差值相同的点形成同一种颜色的条纹，因此，同一种颜色代表主应力差值相同。

(5) 光源发出的光经起偏镜成为平面偏振光，即为 $E_p = a \sin \omega t$ 。入射到四分之一波片后

$$E_1 = a \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \cos 45^\circ \quad (13)$$

$$E_2 = a \sin \omega t \sin 45^\circ \quad (14)$$

设主应力方向与 1/4 波片快（慢）轴之间夹角为 β ，记 $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ，则可进行投影：

$$E_3 = E_1 \cos \beta - E_2 \sin \beta = b \cos \beta \cos \omega t - b \sin \beta \sin \omega t = b \cos(\omega t + \beta) \quad (15)$$

$$E_4 = E_1 \sin \beta + E_2 \cos \beta = b \sin \beta \cos \omega t + b \cos \beta \sin \omega t = b \sin(\omega t + \beta) \quad (16)$$

通过模型表面后：

$$E_5 = b \cos(\omega t + \beta - \alpha) \quad (17)$$

$$E_6 = b \sin(\omega t + \beta) \quad (18)$$

通过第二个四分之一波片后：

$$E_7 = b \cos \beta \cos(\omega t + \beta - \alpha) + b \sin \beta \sin(\omega t + \beta) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} E_8 &= -b \sin \beta \cos\left(\omega t + \beta - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) + b \cos \beta \sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= b \sin \beta \sin(\omega t + \beta - \alpha) + b \cos \beta \cos(\omega t + \beta) \end{aligned} \quad (20)$$

通过检偏镜后：

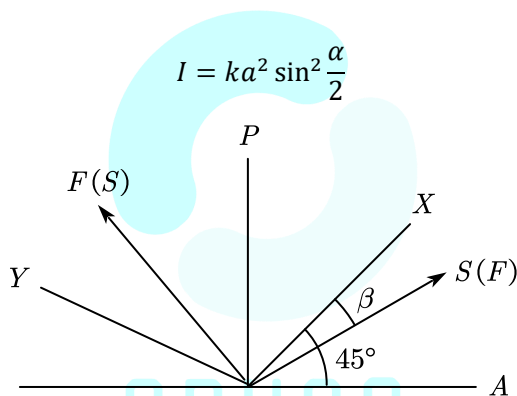
$$E_A = E_7 \cos 45^\circ - E_8 \cos 45^\circ \quad (21)$$

带入计算得：

$$E_A = a \sin \frac{\alpha}{2} \sin(\omega t + 2\beta - \alpha) \quad (22)$$

光强为：

$$I = k a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (23)$$



答图4.1 各轴之间相对位置参考图

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 4 分：(1) 式 2 分，(3) 式 2 分；

第 (2) 问 8 分：(6) (7) (8) 式各 1 分，(9) 式 4 分，(10) 式 1 分；

第 (3) 问 8 分：(11) (12) 式各 2 分。文字解释每段两分，意思正确即可给分，答案中反映应力和条纹之间的关系可酌情给分；

第 (4) 问 6 分：a、b 问各 3 分，意思正确即可给分；

第 (5) 问 14 分：(13) (14) (17) (18) (19) (20) 式各 1 分，(15) (16) (22) (23) 式各 2 分。

五、(40 分) 甩动的鞭子

在用力甩动一根鞭子时，往往会发出清脆的声响。这是由于鞭子的末梢速度达到甚至超过音速而产生的音爆，本题尝试对这一现象进行一些定量的计算。

(1) 先考虑一根长为 l 的匀质软绳，绳子不可伸长，其初始时成一直线并静止在光滑水平面上。如图 5.1 所示，人手拉住其静止时的左端（图中的 A 端）使之向右做速度为 v 的匀速运动，我们设未甩开部分占全绳的比例为 λ （即图中的 BC 段长度为 λl ），绳子各点都仅做一维

运动，求右端点 C 的速度 u ，用 λ, v 表示，并求出当 $\lambda \rightarrow 0$ 时末端速度 u 的极限。

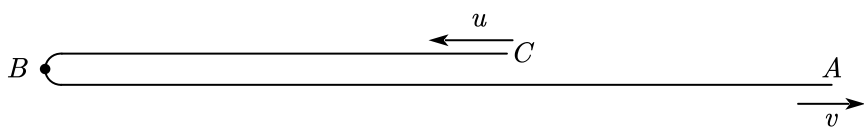


图5.1 软绳运动示意图

(2) 事实上，鞭子末端可以达到极高速度的另一个原因在于其质量分布的不均匀，鞭子的末端往往会更细。在本问中，鞭子可视为不可伸长的非匀质软绳。同时，人手对鞭子前端的作用可近似为一瞬时的冲量。

(2.1) 先来分析一般的绳子形状，当冲量施加过后，绳子上具有速度分布，为了方便讨论，我们建立沿绳的自然坐标系，则速度可由绳上的法向与切向速度场 $v_r(s), v_t(s)$ 描述，其中 s 为线长参数，绳的形状由其曲率半径 $\rho(s)$ 描述，正方向如图 5.2 所示。请求出绳不可伸长这一约束的数学表达式，用 $v_r(s), v_t(s), \rho(s)$ 及其一阶导数表示。

(2.2) 考虑一根铺在光滑水平桌面上的软绳，其初始时静止并形成半径为 R 的半圆形，建立角坐标 θ 来描述绳子上的点，绳子的质量线密度分布为 $\lambda(\theta) = \lambda_0 e^{-\alpha\theta}$ ($\alpha > 0, \theta \in [0, \pi]$)。现用手在其 $\theta = 0$ 一端施加瞬时冲量 I_0 ，冲量 I_0 方向与 A 端切向成 θ_0 角，求出施加冲量后瞬时绳子另一端 (B 点) 的法向速度 $v_r(\pi)$ 与切向速度 $v_t(\pi)$ ，以及 A 端的切向速度 $v_t(0)$ ，用 $\theta_0, \alpha, v_0 = \frac{I_0}{\lambda_0 R}$ 表示。

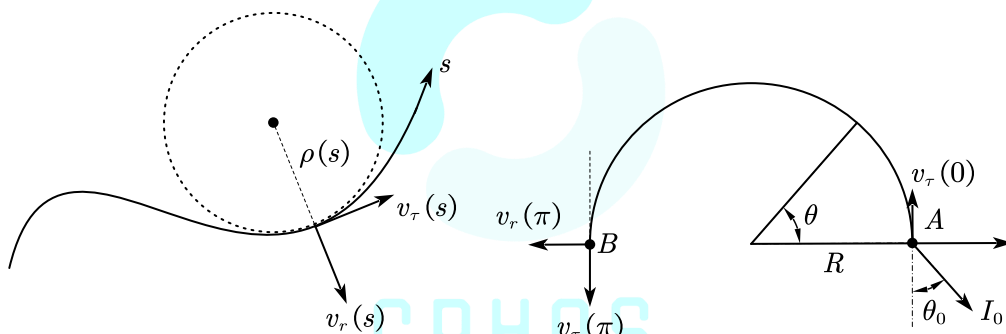


图5.2 沿绳自然坐标系

图5.3 建立沿绳角坐标系

参考解答：

(1) 【解法一】

设绳的质量线密度为 μ 。 B 点向左移动的速度为：

$$v_B = \frac{1}{2}(u + v) \quad (1)$$

则 BC 段的绳子在 B 处会发生两次速度突变，前一次速度突变由 BC 绳的张力引起，故 B 点对 BC 段绳的拉力为：

$$T_{BC} = \frac{1}{4}\mu(u + v)^2 \quad (2)$$

故由牛顿第二定律， BC 段绳的加速度为：

$$\dot{u} = \frac{1}{4\lambda l}(u + v)^2 \quad (3)$$

注意到：

$$\frac{d\lambda}{dt}l = -\frac{1}{2}(u + v) \quad (4)$$

代入得到：

$$-2\ddot{\lambda} = \frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda} \Rightarrow 2\frac{d\dot{\lambda}}{\dot{\lambda}} + \frac{d\lambda}{\lambda} = 0 \quad (5)$$

积分即得：

$$\dot{\lambda}^2 \lambda \equiv \frac{1}{4l^2} (u+v)^2 \lambda = \left(\frac{v}{2l}\right)^2 \cdot 1 = \left(\frac{v}{2l}\right)^2 \quad (6)$$

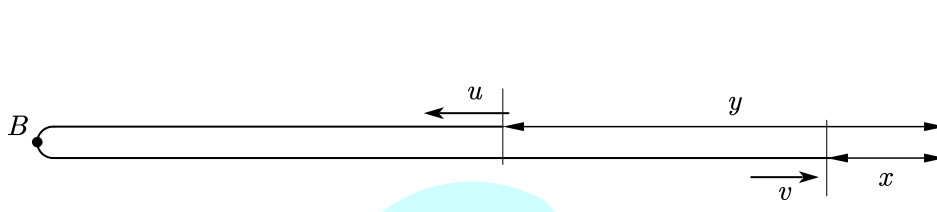
$$u(\lambda) = v \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 1 \right) \quad (7)$$

当 $\lambda \rightarrow 0$ 时，有

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} u(\lambda) = +\infty \quad (8)$$

【解法二】

如图设长度 x, y ，将其作为系统的广义坐标：



答图5.1 广义坐标 x, y 示意图

我们考虑绳的动能：

$$T = \frac{1}{2} \mu l [\lambda u^2 + (1-\lambda)v^2] = \frac{1}{4} \mu l [(l+x-y)\dot{y}^2 + (l-x+y)\dot{x}^2] \quad (9)$$

A端速度恒为 v ，故虚位移 $\delta x \equiv 0$ ，只需考虑广义坐标 y 的拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

代入即得：

$$(l+x-y)\ddot{y} - \frac{1}{2}(\dot{y}+v)^2 = 0 \quad (11)$$

由 $\lambda l = \frac{1}{2}(l+x-y)$ ，则有：

$$\ddot{\lambda} \lambda + \frac{1}{2} \dot{\lambda}^2 = 0 \Rightarrow 2\frac{d\dot{\lambda}}{\dot{\lambda}} + \frac{d\lambda}{\lambda} = 0 \quad (12)$$

这样便得到了(5)式的结果，后续过程与(6)到(8)式相同。

(2.1) 绳不可伸长的条件为：

$$\hat{t} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = 0 \quad (13)$$

展开：

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial s} = \frac{\partial v_r}{\partial s} \hat{r} + \frac{\partial v_\tau}{\partial s} \hat{t} + \frac{\partial \hat{r}}{\partial s} v_r + \frac{\partial \hat{t}}{\partial s} v_\tau \quad (14)$$

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial s} = \frac{\hat{t}}{\rho}, \quad \frac{\partial \hat{t}}{\partial s} = -\frac{\hat{r}}{\rho} \quad (15)$$

则绳不可伸长的条件可表示为：

$$\frac{\partial v_\tau}{\partial s} + \frac{v_r}{\rho} = 0 \quad (16)$$

(2.2) 设绳上的冲量分布为 $I(\theta)$, 软绳的冲量只能沿绳。

在绳子除了两个端点的其他部分, 有

$$v_r(\theta) = \frac{1}{R\lambda(\theta)} \cdot \frac{dI(\theta)}{d\theta}, \quad v_r(\theta) = -\frac{I(\theta)}{R\lambda(\theta)} \quad (17)$$

代入约束式 (16):

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\lambda(\theta)} \frac{dI(\theta)}{d\theta} \right) - \frac{I(\theta)}{\lambda(\theta)} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 I(\theta)}{d\theta^2} + \alpha \frac{dI(\theta)}{d\theta} - I(\theta) = 0 \quad (18)$$

其通解为:

$$I(\theta) = C_+ e^{\lambda_+ \theta} + C_- e^{\lambda_- \theta}, \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4} \right) \quad (19)$$

边界条件由 A, B 两端点给出, 首先, 对 B 端点, 由于其为自由端, 故其不能受冲量, 有:

$$I(\pi) = C_+ e^{\lambda_+ \pi} + C_- e^{\lambda_- \pi} = 0 \quad (20)$$

考虑 A 端所受的冲量, 全绳的法向速度可写为:

$$v_r(\theta) = -\frac{I(\theta)}{R\lambda(\theta)} + \frac{I_0}{R\lambda(\theta)} \delta(\theta) \quad (21)$$

事实上, A 端有无限大的法向速度, 其切向速度有有限大的突变, 故 A 端的切向速度必须有限, 故 A 端给出的边界条件为:

$$I(0) = C_+ + C_- = I_0 \cos \theta_0 \quad (22)$$

解得:

$$\begin{cases} C_+ = -\frac{I_0 \cos \theta_0}{e^{\pi\sqrt{\alpha^2+4}} - 1} \\ C_- = \frac{I_0 \cos \theta_0}{1 - e^{-\pi\sqrt{\alpha^2+4}}} \end{cases} \quad (23)$$

对 B 端点, 有

$$\begin{cases} v_r(\pi) = -\frac{I(\pi)}{R\lambda(\pi)} = 0 \\ v_r(\pi) = \frac{1}{R\lambda(\pi)} \cdot \left(\frac{dI(\theta)}{d\theta} \right)_{\theta=\pi} = -\frac{\exp\left(\frac{\pi}{2}(\alpha + \sqrt{\alpha^2+4})\right) \sqrt{\alpha^2+4} \cos \theta_0}{e^{\pi\sqrt{\alpha^2+4}} - 1} v_0 \end{cases} \quad (24)$$

对 A 端点, 切向速度有突变, 则

$$\begin{aligned} v_r(0) - \frac{1}{R\lambda_0} \cdot \left(\frac{dI(\theta)}{d\theta} \right)_{\theta=0^+} &= \frac{I_0 \sin \theta_0}{R\lambda_0} \\ v_r(0) &= v_0 \left(\sin \theta_0 - \cos \theta_0 \cdot \frac{\alpha (e^{\pi\sqrt{\alpha^2+4}} - 1) + \sqrt{\alpha^2+4} (e^{\pi\sqrt{\alpha^2+4}} + 1)}{e^{\pi\sqrt{\alpha^2+4}} - 1} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

评分标准: 本题共 40 分。

第 (1) 问 14 分: 【解法一】(1) (2) (3) (4) (5) (7) (8) 式各 2 分;

【解法二】(7) (8) 式各 2 分, (9) (11) 式各 4 分, (12) 式 2 分;

第 (2.1) 问 6 分: (13) (16) 式各 3 分;

第 (2.2) 问 20 分: (18) 式 4 分, (19) (20) (22) (23) 式各 2 分, (24) (25) 式各 4 分。

六、(40 分) 打气中的做功

我们平时在给球或轮胎打气的时候会采取不同的方式, 有的人喜欢将打气筒一次性压到底再拉回顶端, 有的人则是压到中间就拉回顶端, 而有的人则是随心所欲, 怎样舒服怎样来。那么, 从物理上考虑, 怎样的打气方式最省力, 也就是做功最少呢? 本题将对这一问题进行

具体的计算。

首先将打气的模型简化为图 6.1 中所示：两个气阀 A, B 只能向左侧打开。需要打气的容器体积为 V ，打气筒的有效体积为 $V_0 \ll V$ 。大气压强与容器中气体的初始压强为 p_0 。大气温度为 T_0 。空气视为双原子分子理想气体。忽略容器因压强的变化产生的形变与所有摩擦。所有容器壁导热良好。假定打气的速度足够慢，以至于可以视为准静态过程。初始活塞处于最右侧。

(1) 一位同学十分规矩地打气，将打气筒一次性压到底再拉回顶端，如此重复 N 次，计算此时左侧气室内气体的压强 p_N 与这位同学总做功 W_{tot} 。

(2) 如果你也想打气到气体的压强变为 p_N ，但想要尽量省力。请说明做功最少的打气方案，并计算总做功 W'_{tot} 。

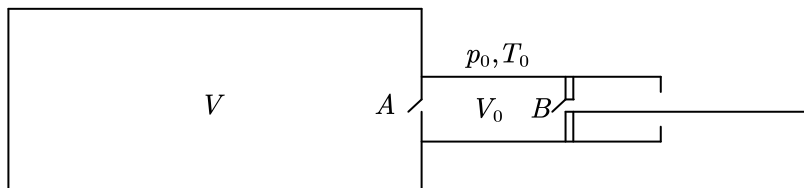


图6.1 打气筒模型示意图

参考解答：

(1) 每一次循环中，都要经过三个阶段： A, B 关闭，右侧气室等温压缩直至压强与左侧气室相同； A 打开， B 关闭，整体等温压缩直至活塞到达最左侧； A 关闭， B 打开，空气进入右侧气室，活塞自然移动至最右侧。

设第 k 次循环结束后，左侧气室内气体压强为 p_k 。下一次循环中，右侧气室体积为 V_k 时 A 打开，之后整体等温压缩至压强为 p_{k+1} 。

第一阶段：

$$p_0 V_0 = p_k V_k \quad (1)$$

$$W_{k1} = p_0 V_0 \ln \frac{p_k}{p_0} - p_0 (V_0 - V_k) \quad (2)$$

第二阶段：

$$p_k (V_k + V) = p_{k+1} V \quad (3)$$

$$W_{k2} = p_k (V_k + V) \ln \frac{p_{k+1}}{p_k} - p_0 V_k \quad (4)$$

第三阶段：

$$W_{k3} = 0 \quad (5)$$

由 (1) (3) 式得

$$p_{k+1} = p_k + \frac{p_0 V_0}{V} \quad (6)$$

进一步得到

$$p_N = p_0 + \frac{N p_0 V_0}{V} \quad (7)$$

由 (2) (4) (5) 式得

$$\begin{aligned} W_k &= W_{k1} + W_{k2} + W_{k3} \\ &= p_0 V_0 \ln \left[1 + (k+1) \frac{V_0}{V} \right] + (p_0 V + k p_0 V_0) \ln \frac{1 + (k+1) \frac{V_0}{V}}{1 + k \frac{V_0}{V}} - p_0 V_0 \end{aligned} \quad (8)$$

小量近似有（注意保留至 V_0 的二阶小量）

$$W_k \approx \frac{1}{2}(2k+1)p_0 \frac{V_0^2}{V} \quad (9)$$

总做功为

$$W_{tot} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2}(2k+1)p_0 \frac{V_0^2}{V} = \frac{1}{2}N^2 \frac{p_0 V_0^2}{V} \quad (10)$$

(2) 假设每次打气将活塞压到最左侧。在 (1.1) 的基础上稍作变化, 计算某次打气后左侧气室压强为 $p_0 + \Delta p_{tot}$ ($\Delta p_{tot} \ll p_0$), 并且将活塞拉至右侧气室体积为 V_i 后, 下一次打气的情况。

我们同样可以得到压强的增加量为

$$\Delta p_i = \frac{p_0 V_i}{V} \quad (11)$$

但是此时做功为

$$\begin{aligned} W_i &= p_0 V_i \ln \left(1 + \frac{\Delta p_{tot}}{p_0} \right) + [p_0 V_i + (p_0 + \Delta p_{tot})V] \ln \frac{p_0 + \Delta p_{tot} + \Delta p_i}{p_0 + \Delta p_{tot}} - p_0 V_i \\ &\approx \frac{p_0 V_i^2}{2V} + \Delta p_{tot} V_i \end{aligned} \quad (12)$$

也可表示为

$$W_i = (\Delta p_i^2 + 2\Delta p_{tot}\Delta p_i) \frac{V}{2p_0} \quad (13)$$

可以发现, 结果与 V_i 无关。

$$\begin{aligned} W_{tot}' &= \frac{V}{2p_0} \sum_i \Delta p_i^2 + 2\Delta p_{tot}\Delta p_i = \frac{V}{2p_0} \sum_i \left(\Delta p_i^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^{i-1} \Delta p_j \right) \Delta p_i \right) \\ &= \frac{V}{2p_0} \left(\sum_i \Delta p_i \right)^2 = \frac{V}{2p_0} \left(\frac{Np_0 V_0}{V} \right)^2 = W_{tot} \end{aligned} \quad (14)$$

如果打气时不将活塞压到最左侧, 此时可将 (11) (12) 式中的 V 修正为 V' , V' 为即将拉回活塞时整个气室的体积。由于 $V' > V$, 根据 (13) 式, 为了达到同样的压强增量 Δp_i , W_i 会增大。

因此, 这位同学的打气方案即为最省力的方案。

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 23 分: (1) (3) (5) (6) (7) (10) 式各 2 分, (2) (4) 式各 3 分, (9) 式 5 分;
第 (2) 问 17 分: (11) 式 2 分, (12) (13) 式各 3 分, (14) 式 4 分 (证明总做功与每次活塞回拉量无关即可得这 4 分), 说明不将活塞压到最左侧可将 V 修正为 V' , 导致 W_i 增大 4 分, 给出最省力的方案 1 分。

七、(40 分) 金星对水星的摄动

我们都知道, 水星近日点的进动为广义相对论提供了观测证据。然而, Le Verrier 等人当初观测到水星的近日点有 5600 角秒/世纪的进动角速度 ($1 \text{ 角秒} = \frac{1}{3600} \text{ 度}$)。其中, 有 5025 角秒/世纪由地球的岁差引起, 有 532 角秒/世纪由其他天体对水星的摄动引起, 剩下的 43 角秒/世纪才成为了广义相对论的观测证据。本题以金星为例, 探讨其他行星对水星的引力摄动。

在 Le Verrier 等人计算这一问题时，认为金星对水星的摄动在多个周期内的平均可以近似等效为将金星的质量平均分布于其轨道上对水星的作用（事实上，这一近似非常粗糙）。假设水星的质量为 m ，其轨道的离心率为 e 、半长轴为 a ；金星的质量为 M' ，其轨道为一圆轨道，半径为 R ；太阳的质量为 M_s ；万有引力常数为 G 。在我们所考虑的精度范围内，可以认为 $\frac{a}{R} \ll 1$ ，所有结果保留至 $\frac{a}{R}$ 系数不为 0 的最低阶项即可。

(1) 不考虑金星引力的情况下，求水星的机械能 E 、轨道角动量 L ；在极坐标系中，以太阳为原点，写出水星的轨道方程 $r = r(\theta)$ ，其中 $\theta = 0$ 处为近日点。

(2) 求金星对水星的引力 F 与水星到太阳的距离 r 的函数关系。

(3) 求水星的进动角速度的表达式，并代入以下数据得到结果。

已知： $m = 3.301 \times 10^{23} \text{ kg}$ ， $e = 0.2056$ ， $a = 4.6 \times 10^{10} \text{ m}$ ， $M' = 4.867 \times 10^{24} \text{ kg}$ ， $R = 1.074 \times 10^{11} \text{ m}$ ， $M_s = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$ ， $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ 。

提示：

Runge-Lenz 矢量的表达式为：

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - GM_s m^2 \hat{r}$$

其中， \vec{p} 和 \vec{L} 分别为水星的动量和水星相对于太阳的轨道角动量， \hat{r} 为从太阳指向水星的单位矢量。

数学提示：

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{(1 + e \cos \theta)^3} d\theta = \frac{3\pi e}{(1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (e < 1)$$

参考解答：

(1) 我们熟知：

$$E = -\frac{GM_s m}{2a} \quad (1)$$

通径：

$$p = a(1 - e^2) \quad (2)$$

故：

$$L = m\sqrt{GM_s p} = m\sqrt{GM_s a(1 - e^2)} \quad (3)$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (4)$$

(2) 考虑将金星等效为一个质量均匀分布的圆环，设 P 点在其轴线上与圆心的距离为 z ，故 P 点的引力加速度为：

$$g_z(z) = -\int_0^{2\pi} G \frac{M'}{2\pi} d\theta \frac{z}{R^2 + z^2 \sqrt{R^2 + z^2}} = -\frac{GM'z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

负号表示其方向指向环心。如答图 7.1 所示，取一高为 dz 、底面半径为 r 的圆柱形高斯面：

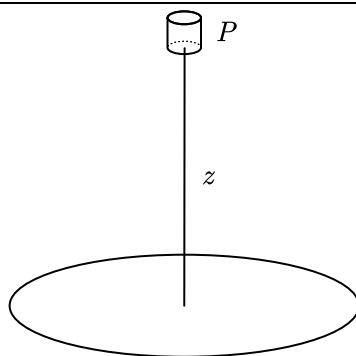


图7.1 圆柱形高斯面示意图

则在圆环的轴线附近，其径向的引力加速度场 $g_r(r, z)$ 满足：

$$g_r \cdot 2\pi r dz + g_z(z + dz) \cdot \pi r^2 - g_z(z) \cdot \pi r^2 = 0 \quad (6)$$

得：

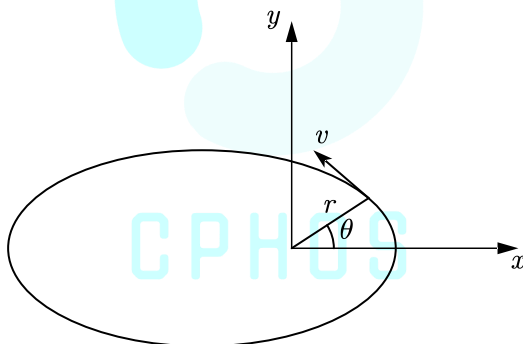
$$g_r(r, z) = \frac{GM'r}{2} \frac{R^2 - 2z^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (7)$$

取 $z = 0$ ，有：

$$F(r) = mg_r(r, 0) = \frac{GM'mr}{2R^3} \quad (8)$$

其方向沿着太阳与水星的连线方向指向水星。

(3) 如答图 7.2 所示建立一直角坐标系和极坐标系：



答图7.2 平面直角坐标系示意图

在 $\theta = 0$ 处，先计算出 Runge-Lenz 矢量：

$$v(\theta = 0) = \sqrt{\frac{2}{m} \left(-\frac{GM_s m}{2a} + \frac{GM_s m}{a(1-e)} \right)} = \sqrt{\frac{GM_s}{a} \frac{1+e}{1-e}} \quad (9)$$

$$A = m^2 v^2 a(1-e) - GM_s m^2 = GM_s m^2 e \quad (10)$$

其方向沿 x 轴方向。考虑 Runge-Lenz 矢量随时间的变化率：

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(-\frac{GM_s m}{r^2} \hat{r} + \frac{GM'mr}{2R^3} \hat{r} \right) \times \vec{L} - GM_s m^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \quad (11)$$

利用：

$$\vec{L} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{z} \quad (12)$$

化简得：

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{GM'mLr}{2R^3} \hat{\theta} \quad (13)$$

考虑 Runge-Lenz 矢量的变化率在一个周期内求平均：

$$\left\langle \frac{d\vec{A}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\vec{A}}{dt} dt \quad (14)$$

有：

$$\hat{\theta} = \sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} \quad (15)$$

根据对称性，易知：

$$\left\langle \frac{dA_x}{dt} \right\rangle = 0 \quad (16)$$

有：

$$\left\langle \frac{dA_y}{dt} \right\rangle = -\frac{1}{T} \frac{GM'mL}{2R^3} \int_0^T r \cos \theta dt \quad (17)$$

考虑：

$$dt = \frac{mr^2}{L} d\theta \quad (18)$$

化简得：

$$\left\langle \frac{dA_y}{dt} \right\rangle = -\frac{GM'm^2p^3}{2TR^3} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{(1 + e \cos \theta)^3} d\theta \quad (19)$$

根据所给的数学提示：

$$\left\langle \frac{dA_y}{dt} \right\rangle = -\frac{3\pi eGM'm^2p^3}{2TR^3(1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (20)$$

进动角速度为：

$$\omega = \frac{1}{A} \left| \left\langle \frac{dA_y}{dt} \right\rangle \right| = \frac{3\pi M'p^3}{2TR^3M_s(1 - e^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (21)$$

代入 p 以及：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_s}} \quad (22)$$

得：

$$\omega = \frac{3M'\sqrt{1 - e^2}}{4R^3} \sqrt{\frac{Ga^3}{M_s}} \quad (23)$$

代入数值，得到：

$$\omega = 1.648 \times 10^{-13} \text{ rad/s} = 107.2 \text{ 角秒/世纪} \quad (24)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 6 分：(1) (2) 式各 1 分，(3) (4) 式各 2 分；

第 (2) 问 10 分：(5) (7) 式各 2 分，(6) (8) 式各 3 分；

第 (3) 问 24 分：(11) (12) (14) (15) (16) (17) (18) (19) 式各 1 分，(9) (10) (13) (20) (21) (22) (23) (24) 式各 2 分。

八、(40 分) PN 结

PN 结是半导体器件中常见的结构。当 P 型半导体（空穴导电）与 N 型半导体（电子导电）接触时，由于载流子浓度差的存在，P 区空穴向 N 区扩散，N 区电子向 P 区扩散，电子与空穴在 PN 区界面附近发生中和，即载流子耗尽，相应地在界面附近形成“耗尽层”。发生

接触前 P、N 区各自呈电中性，P 型半导体在空穴流失后，留下无法移动的负电中心，N 型区则相反，这些电荷产生了 PN 结的自建电场，形成对载流子的势垒，因而这部分区域又被称作“空间电荷区”、“势垒区”等。本题则通过一个简单的模型来对这一区域进行研究，以认识 PN 结的一些性质。

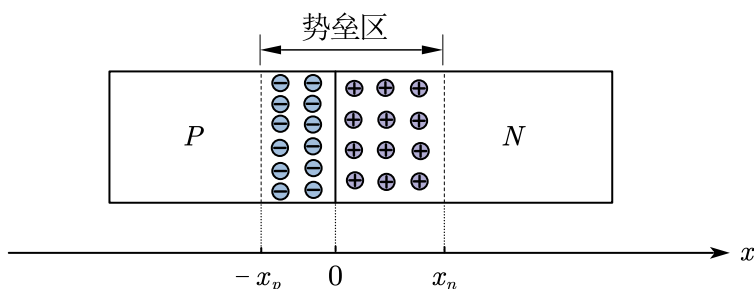


图8.1 硅PN结的突变结模型

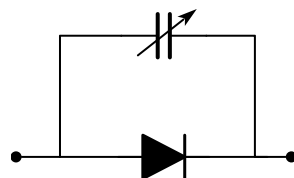


图8.2 电容效应

(1) 如图 8.1，考虑硅 PN 结的突变结模型：势垒区内载流子完全耗尽，P 型、N 型硅均为均匀掺杂，掺杂浓度分别为 N_A, N_D 且杂质全部电离（每个杂质原子只电离出一个载流子）。近似认为势垒区以外的地方不存在净电荷且电场为零，且势垒区厚度远小于横截面的线度，不考虑边缘效应。已知元电荷大小为 q ，硅的介电常数为 ϵ 。

(1.1) 以 P、N 区交界为坐标原点，写出势垒区内（边界位置分别记为 $-x_p$ 与 x_n ）的电荷体密度分布 $\rho(x)$ ，并写出为满足电中性条件， x_p, x_n 需要满足的关系；

(1.2) 承上，以 $-x_p$ 处为电势零点，计算势垒区的电势分布 $\varphi(x)$ （为统一形式，请将表达式中的 x_n 用 x_p 表示），并写出 x_n 与 $-x_p$ 处的电势差 U 与势垒区宽度 W 的关系（ $W = x_p + x_n$ ）。

(1.3) PN 结两端无外加电压时，势垒区两端电势差为自建势 V_{bi} ，当外加电压为 V （P 端为正）时可认为势垒区两端电势差变为 $V_{bi} - V$ ，而突变结耗尽近似仍然成立，不过势垒区宽度发生变化，相应地出现电荷积累的变化，表现出电容效应。已知 PN 结横截面积为 S ，试计算上述效应所造成的电容大小（此处取微分电容，即 $C = \frac{dQ}{dV}$ ）

(2) 承 (1.3) 问，考虑一个简陋的模型，可以半定量地认识电容效应的影响。如图 8.2 所示，当接入电路中时，理想 PN 结表现出二极管式的 $I-V$ 特性，即 $I = I_0 \left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1 \right)$ ，其中 k 为玻尔兹曼常数， T 为温度， q 为元电荷大小；势垒电容的效果类似于并联在二极管两端的一个压控电容。外加电压信号 $V(t)$ 为一个直流偏置与一个交流小信号的叠加，即 $V(t) = V_0 + \alpha \sin \omega t$ ，其中 $\alpha \ll V_0$ ， $kT \ll qV_0$ ，同时 $V_{bi} - V_0$ 为正且并非小量。当信号频率足够大时，电容上电流大小将能够与二极管上电流的交流部分相比拟，试计算此时的频率 f 。（本模型为一个十分粗糙的分析，故只要得出的数量级合理即可）。

参考数据： $V_{bi} = 0.7 \text{ V}$ ， $V_0 = 0.4 \text{ V}$ ， $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ， $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ， $T = 300 \text{ K}$ ，

$N_A = N_D = 1 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ， $\epsilon = 13 \times 8.85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ ， $\frac{I_0}{S} = 1 \times 10^{-10} \text{ A} \cdot \text{cm}^{-2}$ 。

参考解答：

(1) (1.1) 容易写出电荷分布为：

$$\rho(x) = \begin{cases} -qN_A, & -x_p < x < 0 \\ qN_D, & 0 < x < x_n \end{cases} \quad (1)$$

电中性条件：

$$N_A x_p = N_D x_n \quad (2)$$

(1.2) 电势分布满足泊松方程，在一维下有：

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon} \quad (3)$$

结合边界条件:

$$\begin{cases} \left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=-x_p} = 0, \\ \varphi(-x_p) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

两次积分可得:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{qN_A}{\varepsilon}(x+x_p), & -x_p < x < 0 \\ \frac{qN_D}{\varepsilon}\left(-x + \frac{N_A x_p}{N_D}\right), & 0 < x < x_n \quad \left(\text{或写 } \frac{N_A}{N_D}x_p, \text{ 下同}\right) \end{cases} \quad (5)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{qN_A}{2\varepsilon}(x+x_p)^2, & -x_p < x < 0 \\ \frac{qN_D}{\varepsilon}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{N_A}{N_D}x_p x + \frac{N_A x_p^2}{2N_D}\right), & 0 < x < x_n \end{cases} \quad (6)$$

则势垒区两端电势差:

$$U = \varphi(x_n) - 0 = \frac{qN_A(N_A + N_D)x_p^2}{2\varepsilon N_D} \quad (7)$$

由于 $W = x_p + x_n$, 结合 (2) 式可得 $x_p = \frac{N_D}{N_A + N_D}W$, 代入 (6) 式得到:

$$U = \frac{qN_A N_D W^2}{2\varepsilon(N_A + N_D)} \quad (7')$$

(1.3) 直接令 (7') 式中 $U = V_{bi} - V$, 得

$$W = \sqrt{\frac{2\varepsilon(N_A + N_D)(V_{bi} - V)}{qN_A N_D}} \quad (8)$$

“正极板”上的电荷:

$$Q = -qN_A S x_p \quad (9)$$

故

$$Q = -S \sqrt{2\varepsilon q \frac{N_A N_D}{N_A + N_D} (V_{bi} - V)} \quad (10)$$

由定义:

$$C = \frac{dQ}{dV} = S \sqrt{\frac{\varepsilon q N_A N_D}{2(N_A + N_D)(V_{bi} - V)}} \quad (11)$$

(2) 电容上的电流 (注意上题求得的电容是微分电容):

$$i_c = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dV} \frac{dV}{dt} = C \frac{dV}{dt} \quad (12)$$

式中 C 基本由直流偏置决定, 微小摆幅影响为小量, 直接忽略:

$$C \approx C_0 = S \sqrt{\frac{\varepsilon q N_A N_D}{2(N_A + N_D)(V_{bi} - V_0)}} \quad (13)$$

则

$$i_c = \omega \alpha C_0 \cos \omega t \quad (14)$$

对于二极管：

$$\frac{dI}{dV} = \frac{qI_0}{kT} e^{\frac{qV}{kT}} \quad (15)$$

其上的交流信号

$$i_d \approx \left. \frac{dI}{dV} \right|_{V=V_0} \times \alpha \sin \omega t = \frac{qI_0 \alpha}{kT} e^{\frac{qV_0}{kT}} \sin \omega t \quad (16)$$

取 i_c 与 i_d 的振幅相等作为标志（这个条件自行选取，无唯一标准），可得

$$\omega_c = \frac{qI_0}{kTC_0} e^{\frac{qV_0}{kT}} = \frac{qI_0}{kTS} e^{\frac{qV_0}{kT}} \sqrt{\frac{2(N_A + N_D)(V_{bi} - V_0)}{\epsilon q N_A N_D}} \quad (17)$$

代入数据得

$$\omega_c = 1.6 \times 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (18)$$

频率：

$$f = \frac{\omega_c}{2\pi} \approx 2.6 \times 10^5 \text{ Hz} \quad (19)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 25 分：

第（1.1）小问 5 分：（1）式 3 分，（2）式 2 分；

第（1.2）小问 12 分：（3）（4）（5）式 2 分，（6）式 3 分，（7）式 1 分，（7'）式 2 分；

第（1.3）小问 8 分：（8）（9）（10）（11）式各 2 分；

第（2）问 15 分：（12）（13）（14）式各 2 分，（15）式 1 分，（16）（17）式各 3 分，（18）（19）各 1 分。该问结果只要数量级相差 1 个以内且过程合理即可尽量给满。

版权信息

命题人

王玮珂 傅知远 刘家亦 王浩冉 任泓锦 肖慎兴 张行健 马浩然

审题人

任泓锦 王浩冉 傅知远 张行健 刘家亦 马浩然 肖慎兴 王玮珂 常皓凌 李弘浩
梁景宸 吴恒旭 付亦轩

联系方式



微信公众号
CPHOS



官方网站
www.cphos.cn



CPHOS 论坛

邮箱
service@cphos.cn

微信小程序
CPHOS 物理竞赛联考