

第 26 届 CPHOS 物理竞赛联考

理论试题参考答案及评分标准

本文件于 2025 年 6 月 24 日 12:00 发布，最后更新于 2025 年 6 月 24 日 11:45。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

一、(40 分) 弱电离尘埃等离子体

考虑一种未磁化的局部均匀的弱电离尘埃等离子体，它由电子、一次电离的离子、带负电的尘埃粒子和分子组成；分子的浓度远大于其他带电粒子的浓度，电子和离子的浓度远大于尘埃粒子的浓度。

(1) 这种弱电离尘埃等离子体处在电磁场 $E = E_0 e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ 中，只考虑碰撞，电子的玻尔兹曼方程是

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r f - \frac{e}{m_e} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_v f + \nu_{\text{eff}} f_1 = 0$$

其中 f 为电子在相空间（位矢空间与速度空间的联合空间）中的分布函数， $-e$ 和 m_e 分别表示电子的电量和质量， ν_{eff} 是电子与分子碰撞的有效频率， f_1 是电子的速度分布相对于其平衡态分布发生的很小的偏离导致的电子在相空间（位矢空间与速度空间的联合空间）中的分布函数的偏离，电子平衡态分布满足麦克斯韦分布。

在弱场作用下，忽略磁场的作用并考虑到局部均匀的假设， N_e 和 T_e 为电子的浓度和温度，真空中的介电常数为 ϵ_0 ，计算角频率为 ω 的电磁波下的复电导率。

(2) 下面同时考虑碰撞和充电对尘埃等离子体电导率的贡献。忽略尘埃等离子体的内部扰动所引起的电荷密度变化。在电场扰动产生的影响中，与电子相比，离子的电流贡献可忽略不计。假定尘埃粒子的大小和电量均相同， N_d 是尘埃粒子的浓度， r_d 是尘埃粒子半径，考虑到尘埃粒子有较大的惯性，忽略尘埃粒子在高频电场作用下的运动。

(2.1) 求出在电场 E 作用下的电子充电电流，已知电子对尘埃粒子的充电截面为 σ_e 。

(2.2) 由充电平衡条件以及尘埃等离子体的准中性条件，假设电子温度与离子温度相同，电子与尘埃粒子的碰撞截面为一个只与尘埃粒子半径有关的定值，离子与尘埃粒子的碰撞截面为 $\pi r_d^2 \left(1 - \frac{e\phi_0}{T_i}\right)$ ， ϕ_0 为平衡态尘埃的电势， T_i 为离子温度。尘埃粒子可以视为球型导体， Z 是未受电场扰动时尘埃粒子的电荷数， $|I_{e0}|$ 是带电粒子处于充电平衡时的电子电流大小，求出尘埃粒子的充电频率 ν_{ch} ，即无电场微扰下单位时间放电量与带电量的比值。已知尘埃粒子满足充电方程 $\frac{\partial q}{\partial t} = I_e + I_i$ ， I_e 和 I_i 分别为电子电流和离子电流， q 为尘埃粒子电荷量，当无

外电场时，充电方程可化简为 $\frac{\partial q}{\partial t} + \nu_{ch} q = 0$ ，答案中不要含有 ϕ_0, T_i 。

(2.3) 我们假设 $\sigma_e = \pi r_d^2$ ，电磁波波数为 k ，同时考虑碰撞和充电时，求出弱电离尘埃等离子体的复电导率，本问答案无需代入 ν_{ch} 表达式。

(3) 求电磁波在弱电离尘埃等离子体传播过程中，波数 k 满足的方程，本问答案无需代入 ν_{ch} 表达式。

参考解答:

(1) 将 $f_1 = f - N_e \left(\frac{m_e}{2\pi k T_e} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_e v^2}{2k T_e}}$ 代入玻尔兹曼方程

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{eE}{m_e} \frac{\partial \left(N_e \left(\frac{m_e}{2\pi k T_e} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_e v^2}{2k T_e}} \right)}{\partial v_x} + v_{\text{eff}} f_1 = 0 \quad (1)$$

f_1 随电场按 $e^{i\omega t}$ 规律变化, $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$ 。由电流密度定义知

$$j = -e \int_0^\pi 2\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{+\infty} -v^3 \frac{eEN_e v}{2^{\frac{3}{2}} m_e \pi^{\frac{3}{2}} (i\omega + v_{\text{eff}})} \left(\frac{m_e}{k T_e} \right)^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{m_e v^2}{2k T_e}} dv = \frac{N_e e^2 E}{m_e (i\omega + v_{\text{eff}})} \quad (2)$$

由欧姆定律可得

$$j = \sigma E \quad (3)$$

$$\sigma = (v_{\text{eff}} - i\omega) \frac{e^2 N_e}{(\omega^2 + v_{\text{eff}}^2) m_e} \quad (4)$$

(2) (2.1) 尘埃运动忽略, 电子充电电流由定义计算

$$I_{e1} = -\sigma_e j \quad (5)$$

$$I_{e1} = -\frac{N_e e^2 \sigma_e E}{m_e (i\omega + v_{\text{eff}})} \quad (6)$$

(2.2) 平衡态尘埃粒子的充电方程是

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v_{ch} q = 0 \quad (7)$$

v_{ch} 源于平衡附近对电流的扰动

$$\begin{cases} \delta I_e = \frac{\partial I_e}{\partial q} \delta q \\ \delta I_i = \frac{\partial I_i}{\partial q} \delta q \end{cases} \quad (8)$$

尘埃粒子的电容

$$C = 4\pi\epsilon_0 r_d \quad (9)$$

设尘埃电势为 ϕ , 利用链式法则

$$\begin{cases} \delta I_e = \frac{\frac{\partial I_e}{\partial \phi} \delta q}{C} \\ \delta I_i = \frac{\frac{\partial I_i}{\partial \phi} \delta q}{C} \end{cases} \quad (10)$$

由麦克斯韦方程组, 对电子

$$I_e = -4\pi e \sigma_e \int_{\sqrt{\frac{2e\phi}{m_e}}}^{+\infty} v^3 N_e \left(\frac{m_e}{2\pi k T_e} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_e v^2}{2k T_e}} dv \quad (11)$$

解得

$$I_e = -e N_e \sigma_e \sqrt{\frac{8k T_e}{\pi m_e}} e^{\frac{e\phi}{k T_e}} \quad (12)$$

对离子，吸引力，无需考虑速度下限

$$I_i = eN_i\pi r_d^2 \left(1 - \frac{e\phi}{kT_i}\right) \sqrt{\frac{8kT_i}{\pi m_i}} \quad (13)$$

具体求解

$$\frac{\delta I_e}{\delta q} = \frac{-e|I_{e0}|}{4\pi\epsilon_0 r_d kT_e} \quad (14)$$

$$\frac{\delta I_i}{\delta q} = -\frac{e^2 N_i \pi r_d^2 \sqrt{\frac{8kT_i}{\pi m_i}}}{4\pi\epsilon_0 r_d kT_i} = \frac{-e|I_{i0}|}{4\pi\epsilon_0 r_d kT_e \left(1 - \frac{e\phi_0}{kT_i}\right)} \quad (15)$$

由尘埃等离子体的准中性条件

$$|I_{i0}| = |I_{e0}| \quad (16)$$

根据电容的假设

$$\phi_0 = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r_d} \quad (17)$$

$$v_{ch} = -\frac{\delta I_e + \delta I_i}{\delta q} = \frac{e|I_{e0}|}{4\pi\epsilon_0 r_d} \left(\frac{1}{kT_e} + \frac{1}{kT_e - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_d}} \right) \quad (18)$$

(2.3) 忽略离子电流，尘埃粒子的充电方程是

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v_{ch}q = I_{e1} \quad (19)$$

q 随电场按 $e^{i\omega t}$ 规律变化，可解得

$$q = \frac{I_{e1}}{v_{ch} + i\omega} \quad (20)$$

充电引起的电流

$$j_{d1} = \frac{N_d q \omega}{k} \quad (21)$$

I_{e1} 已由 (2.1) 求出，由欧姆定律，得到充电导致的电导率

$$\sigma_{ed} = \frac{N_e N_d \pi r_d^2 e^2 \omega}{m_e k (\omega^2 + v_{ch}^2) (\omega^2 + v_{eff}^2)} (\omega^2 - v_{eff} v_{ch} + i\omega v_{eff} + i\omega v_{ch}) \quad (22)$$

同时考虑碰撞和充电时，弱电离子尘埃等离子体的复电导率为

$$\sigma_c = \frac{N_e N_d \pi r_d^2 e^2 \omega}{m_e k (\omega^2 + v_{ch}^2) (\omega^2 + v_{eff}^2)} (\omega^2 - v_{eff} v_{ch} + i\omega v_{eff} + i\omega v_{ch}) + (v_{eff} - i\omega) \frac{e^2 N_e}{(\omega^2 + v_{eff}^2) m_e} \quad (23)$$

(3) 复介电常数与复电导率的关系

$$\epsilon_c = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\sigma_c}{i\omega\epsilon_0} \right) \quad (24)$$

对于入射电磁波

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \quad (25)$$

得到

$$k^3 - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{e^2 N_e}{\epsilon_0 m_e (\omega^2 + v_{eff}^2)} - i \frac{v_{eff} e^2 N_e}{\omega \epsilon_0 m_e (\omega^2 + v_{eff}^2)} \right) k - i \frac{\omega^2 N_e N_d \pi r_d^2 e^2}{m_e c^2 \epsilon_0 (\omega - i v_{ch}) (\omega - i v_{eff})} = 0 \quad (26)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第(1)问6分：(2)(4)式各2分，(1)(3)式1分；

第(2)问29分：

第(2.1)问3分：(5)式1分，(6)式2分；

第(2.2)问17分：(7)(9)(13)(14)(15)(17)(10)式1分，(8)(11)(12)(16)(18)式2分；

第(2.3)问9分：(19)式1分，(20)(21)(22)(23)式2分；

第(3)问5分：(25)式1分，(24)(26)式2分。

二、(30分)

本题将探讨匀强电场下介质球壳的极化，并计算极限情况下的近似。

(1) 作为引入，在本问中考虑理想的导体情况。如图2.1所示，在电场强度为 \vec{E}_0 的均匀外场中放置一理想导体球壳，内径为 R_1 ，外径为 R_2 ($R_2 > R_1$)。试求空间中的电场强度分布 $\vec{E}(r, \theta)$ ，规定极坐标系中 $\theta = 0$ 的方向为外电场方向， r 为空间中一点与球心的距离。

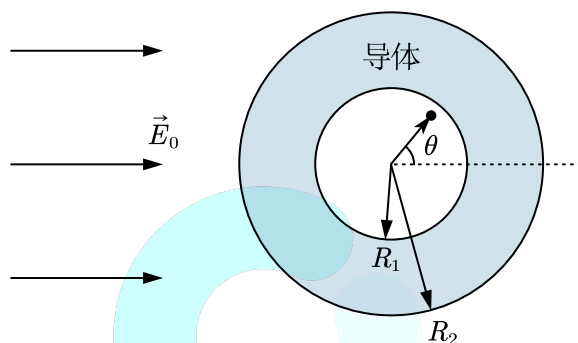


图2.1 理想导体球壳在均匀外场中

(2) 在电场强度为 \vec{E}_0 的均匀外场中放置一均匀各向同性线性电介质球壳，相对介电常数为 ϵ_r 。若该球壳的厚度远小于半径（如图2.2），求出空心球腔内部的电场强度分布 \vec{E}'_{in} ；若该球壳内径为0（如图3.3，即为实心球体），求出介质内部的电场强度分布 \vec{E}''_{in} 。（答案仅用 \vec{E}_0, ϵ_r 表示）

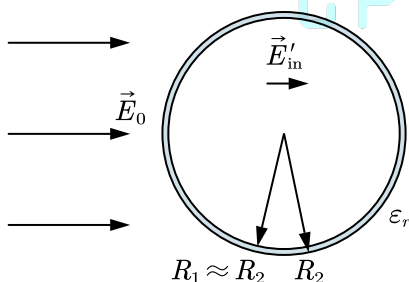


图2.2 薄介质球壳情况示意图

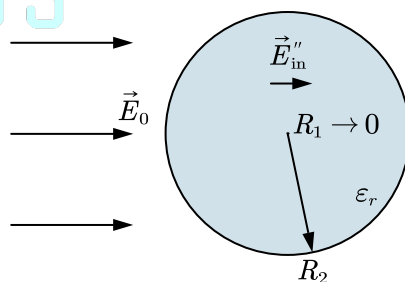


图2.3 实心介质球情况示意图

(3) 接(2)问，注意到薄介质球壳情况和导体球壳情况下得到的答案有所矛盾，本问希望建立更为复杂的模型来进行分析。若介质球壳的内径为 R_1 ，外径为 R_2 ($R_2 > R_1$)，相对介电常数为 ϵ_r ，试求球腔内部（即 $r < R_1$ 处）的电场强度分布 \vec{E}_{in} 。

(4) 接(3)问，我们知道理想导体等价于相对介电常数 $\epsilon_r \rightarrow +\infty$ 时的极限。分别计算当 $R_1 \rightarrow R_2$ 和 $\epsilon_r \rightarrow +\infty$ 的极限下球腔内部的电场分布 \vec{E}_{in} ，验证(1)(2)问中答案的正确性，并解释前文中提到的当 $R_1 \rightarrow R_2, \epsilon_r \rightarrow +\infty$ 同时趋近极限时的“矛盾”现象。

参考解答：

(1) 设球壳外表面的电荷面密度分布为 $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ ，由于理想导体内部电场强度为零，

有

$$\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0} = E_0 \quad (1)$$

所以

$$\sigma(\theta) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (2)$$

该感应电荷分布确保 $r < R_2$ 的空间中电场强度为零。对于球壳外部，感应电荷等效于一对偶极子，电偶极矩为

$$p = \frac{4}{3}\pi R_2^3 \cdot \sigma_0 = 4\pi\varepsilon_0 E_0 R_2^3 \quad (3)$$

由于电偶极子产生电场为 $\vec{E}(r, \theta) = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \hat{r} + \frac{p \sin \theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \hat{\theta}$ ，所以电场强度分布在极坐标系下表达为

$$\vec{E}(r, \theta) = \begin{cases} \vec{0}, & r < R_2 \\ E_0 \left(1 + \frac{2R_2^3}{r^3}\right) \cos \theta \hat{r} - E_0 \left(1 - \frac{R_2^3}{r^3}\right) \sin \theta \hat{\theta}, & r > R_2 \end{cases} \quad (4)$$

(2) 若球壳厚度远小于半径：根据 (1) 问的启发，猜测内外球壳上的电荷面密度分别为

$$\sigma_1(\theta) = \sigma_1 \cos \theta, \quad \sigma_2(\theta) = \sigma_2 \cos \theta \quad (5)$$

解得空间电场分布为

$$\vec{E}(r, \theta) = \begin{cases} \left(E_0 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3\varepsilon_0}\right) \cos \theta \hat{r} - \left(E_0 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3\varepsilon_0}\right) \sin \theta \hat{\theta}, & r < R_1 \\ \left(E_0 - \frac{\sigma_2}{3\varepsilon_0} + \frac{2\sigma_1 R_1^3}{3\varepsilon_0 r^3}\right) \cos \theta \hat{r} - \left(E_0 - \frac{\sigma_2}{3\varepsilon_0} - \frac{\sigma_1 R_1^3}{3\varepsilon_0 r^3}\right) \sin \theta \hat{\theta}, & R_1 < r < R_2 \\ \left(E_0 + \frac{2(\sigma_1 R_1^3 + \sigma_2 R_2^3)}{3\varepsilon_0 r^3}\right) \cos \theta \hat{r} - \left(E_0 - \frac{\sigma_1 R_1^3 + \sigma_2 R_2^3}{3\varepsilon_0 r^3}\right) \sin \theta \hat{\theta}, & r > R_2 \end{cases} \quad (6)$$

由电介质的边界条件知

$$\begin{cases} \sigma_1(\theta) = P_r(R_1^-, \theta) - P_r(R_1^+, \theta) = -(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E_r(R_1^+, \theta) \\ \sigma_2(\theta) = P_r(R_2^-, \theta) - P_r(R_2^+, \theta) = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E_r(R_2^-, \theta) \end{cases} \quad (7)$$

代入 $\sigma_1(\theta), \sigma_2(\theta), \vec{E}(r, \theta)$ ，并利用 $\frac{R_1}{R_2} \approx 1$ 可得

$$\begin{cases} \sigma_1 = -(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \left(E_0 + \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3\varepsilon_0}\right) \\ \sigma_2 = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \left(E_0 + \frac{2\sigma_1 R_1^3/R_2^3 - \sigma_2}{3\varepsilon_0}\right) \approx (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \left(E_0 + \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3\varepsilon_0}\right) \end{cases} \quad (8)$$

两式相加，易得 $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ ，所以

$$\vec{E}'_{\text{in}} = \vec{E}(r < R_1, \theta) = \vec{E}_0 \quad (9)$$

若球壳内径为 0：类似地，设外表面电荷面密度分布为 $\sigma(\theta) = \sigma_2 \cos \theta$ ，则空间电场分布为

$$\vec{E}(r, \theta) = \begin{cases} \left(E_0 - \frac{\sigma_2}{3\varepsilon_0}\right) \cos \theta \hat{r} - \left(E_0 - \frac{\sigma_2}{3\varepsilon_0}\right) \sin \theta \hat{\theta}, & r < R_2 \\ \left(E_0 + \frac{2\sigma_2 R_2^3}{3\varepsilon_0 r^3}\right) \cos \theta \hat{r} - \left(E_0 - \frac{\sigma_2 R_2^3}{3\varepsilon_0 r^3}\right) \sin \theta \hat{\theta}, & r > R_2 \end{cases} \quad (10)$$

利用电介质的边界条件知

$$\sigma(\theta) = P_r(R_2^-, \theta) - P_r(R_2^+, \theta) = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \left(E_0 - \frac{\sigma_2}{3\varepsilon_0}\right) \cos \theta \quad (11)$$

上式也可直接利用 (8) 式中取极限 $R_1 \rightarrow 0$ 得到。解得

$$\sigma_2 = \frac{3(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} \varepsilon_0 E_0 \quad (12)$$

故介质内部的电场强度为

$$\vec{E}_{\text{in}}'' = \vec{E}(r < R_2, \theta) = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} \vec{E}_0 \quad (13)$$

(3) 上问中薄球壳情况下球腔中的电场强度与 ε_r 无关, 因此令 $\varepsilon_r \rightarrow +\infty$ 时, 内部电场大小仍为 \vec{E}_0 , 与直接利用理想导体算出的结果为0不一致, 为解释此矛盾, 本问将严格地解出内、外半径分别为 R_1, R_2 , 介电常数为 ε_r 时球腔中的电场强度。

仍然设内外球壳上的电荷面密度分别为 $\sigma_1(\theta) = \sigma_1 \cos \theta, \sigma_2(\theta) = \sigma_2 \cos \theta$ 。则不经近似的(8)式仍成立,

$$\begin{cases} \sigma_1 = -(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \left(E_0 + \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3\varepsilon_0} \right) \\ \sigma_2 = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \left(E_0 + \frac{2\sigma_1 R_1^3/R_2^3 - \sigma_2}{3\varepsilon_0} \right) \end{cases} \quad (14)$$

解得

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{2(\varepsilon_r - 1)^2(1 - R_1^3/R_2^3)}{3\varepsilon_r + \frac{2}{3}(\varepsilon_r - 1)^2(1 - R_1^3/R_2^3)} \varepsilon_0 E_0 \quad (15)$$

代入(6)式, 得到球腔内部的电场强度为

$$\vec{E}_{\text{in}} = \frac{9\varepsilon_r}{9\varepsilon_r + 2(\varepsilon_r - 1)^2(1 - R_1^3/R_2^3)} \vec{E}_0 \quad (16)$$

(4) 容易计算

$$\lim_{R_1 \rightarrow R_2} \vec{E}_{\text{in}} = \vec{E}_0 \quad (17)$$

$$\lim_{\varepsilon_r \rightarrow +\infty} \vec{E}_{\text{in}} = \vec{0} \quad (18)$$

可以发现取极限的结果与前问的结果相符。并且由(16)式可看出由于 $R_1 \rightarrow R_2, \varepsilon_r \rightarrow +\infty$ 的累次极限依赖于求极限的次序, 所以会出现前文提到的“矛盾”结果。在物理上, 由于无限薄的球壳无法提供足够的自由电子以成为导体, 二者的极限无法同时取到。

评分标准: 本题满分30分。

第(1)问6分: (1) (2) 式各1分, (3) (4) 式各2分;

第(2)问13分: (5) (7) (8) (11) (12) 式各1分, (6) (9) (10) (13) 式各2分;

第(3)问8分: (14) 式2分, (15) (16) 式各3分;

第(4)问3分: (17) (18) 式各1分, 解释1分。

三、(50分) 下落粘性液柱的形状

日常生活中有个现象, 在重力作用下自由下落形成的稳定液柱, 越往下液柱越细, 如示意图3.1所示。本题通过建模来定量得出液柱的半径随下落高度的变化关系。

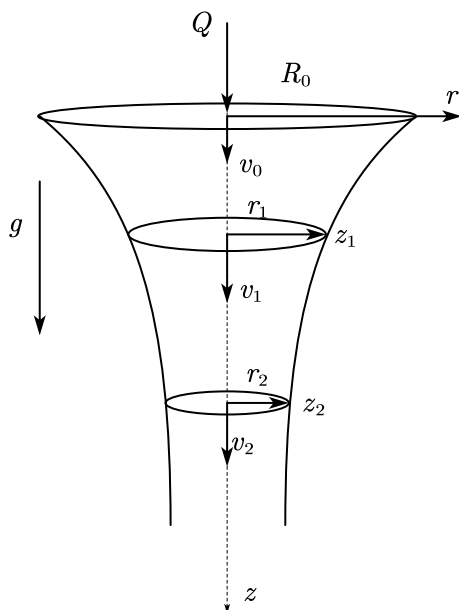


图3.1 重力下自由下落的稳定液面

(1) 首先需要找能用上的方程, 例如, 无粘性流体中的流速、压强和高度的伯努利方程是从能量的角度得到的。那么本题考虑粘性流体, 粘滞系数为 η , 表面张力系数为 γ , 已知这种情况下的伯努利方程可以写为

$$p + \frac{\alpha}{2} \rho v^2 - \rho g z + \gamma \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right) + w_{\text{loss}} = \text{Const}$$

其中是 V 液体体积, A 是液体表面积。 α 是与横截面上流速分布有关的常数, 例如若横截面上流速均匀, $\alpha = 1$, 若横截面上流速为抛物线分布 (例如泊肃叶定律中所描述的圆管中流动的粘性流体), $\alpha = 2$, 本题结果表达式中就用 α 表示即可。第四项和第五项分别是考虑到表面能和粘滞损耗。实际上下落的粘性液柱在截面上的速度分布为从表面极薄的一部分作抛物线分布急剧过渡到内部绝大部分均匀分布, 在本题中若无特别说明, 均考虑任意截面速度均匀, 设某处液柱半径为 r 。

(1.1) 取一段微元可以认为液柱形状为圆柱, 给出 $\gamma \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)$ 的表达式 (此处 $\left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)$ 定义为 $\left(\frac{\partial A}{\partial V} \right) = \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)_z / \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_z + \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_r / \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_r$)。

(1.2) 考虑泊肃叶定律所研究的情形来给出粘滞损耗项的表达式, 泊肃叶定律所研究的情形下, 认为压强梯度 $\frac{dp}{dz}$ 为常数, 流体的速度只沿 z 方向, 流速随半径的分布为抛物线关系, 最外侧流速为零, 用截面平均速度 v 来表征流动特征量, 可以求出 w_{loss} 正比于 v , 但由于实际流速分布情形为题干中所描述的那样, 所以在所求结果上需再乘修正因子 δ 。据此给出 w_{loss} 的表达式。(w_{loss} 为损耗的能量的绝对值)

(2) 利用 (1) 问中得到的伯努利方程得到一个关于流速、下落高度和半径的微分方程。已知 v 和 r 的变化都很缓慢, 保留到各个效应的最低阶影响。

提示: 可以认为各个高度处的压强相等。

(3) 定义无量纲数——Froude 数、Weber 数、Reynolds 数如下

$$Fr = \frac{v_0^2}{2R_0 g}, W_e = \frac{2R_0 \rho v_0^2}{\gamma}, Re = \frac{2R_0 \rho v_0}{\eta}$$

利用以上无量纲数以及连续性方程, 令约化参量 $\tilde{v} = \frac{v}{v_0}$, $\tilde{z} = \frac{z}{R_0}$, $\tilde{r} = \frac{r}{R_0}$, 下标 0 的参量为初始参量, 给出化简后的关于约化流速和约化下落高度的微分方程。(从此问以下均考虑的是约化参量)

(4) 给出在无穷远处的流速 \tilde{v}_∞ 和半径 \tilde{r}_∞ 的渐进表达式。

(5) 按照第 (3) 问的思路, 给出关于液柱半径和下落高度的微分方程, 并积分得到结果 (结果中可用 \tilde{r}_∞ 化简表达式)。

(6) 若重力因素比粘性因素影响大得多, 即 $\frac{Re}{Fr} \gg 32\delta$, 给出 (5) 问积分之后结果的展开表达式。

(7) 在 (6) 的基础上, 若重力因素的影响也远远大于表面因素的, 即 $\frac{We}{Fr} \gg 1$, 给出最终的表达式。

参考解答:

(1) (1.1) 考虑半径为 r , 高度为 z 的圆柱体, 体积为

$$V = \pi r^2 z \quad (1)$$

侧面积为

$$A = 2\pi r z \quad (2)$$

题目给出的偏微分的展开表达式为

$$\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right) = \left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)_z \left/\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_z\right. + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_r \left/\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_r\right. \quad (3)$$

在 (3) 式中右边的各偏微分根据 (1) (2) 式可得为

$$\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)_z = 2\pi z \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_z = 2\pi r z \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)_r = 2\pi r \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_r = \pi r^2 \quad (7)$$

将 (4) (5) (6) (7) 式代入 (3) 式可得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right) = \frac{3}{r} \quad (8)$$

于是本题所求表达式为

$$\gamma \left(\frac{\partial A}{\partial V}\right) = \frac{3\gamma}{r} \quad (9)$$

(1.2) 考虑半径为 r , 长度为 z 的圆管内流动的粘性液体, 管两端有压强差 Δp , 由粘性定律可以列出

$$\Delta p \cdot \pi R^2 = -\eta \cdot 2\pi R z \frac{dv}{dR} \quad (10)$$

化简为

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\eta z} R dR \quad (11)$$

于是得到速度随半径的分布

$$v(R) = \frac{\Delta p}{4\eta z}(r^2 - R^2) \quad (12)$$

于是平均速度为

$$v = \frac{\int_0^r v(R) \cdot 2\pi R dR}{\pi r^2} = \frac{\Delta p r^2}{8\eta z} \quad (13)$$

考虑正负号问题后，本题所求结果可以写为

$$w_{\text{loss}} = \delta \Delta p = \frac{8\delta \eta v}{r^2} z \quad (14)$$

(2) 命上下两截面分别为 1、2，按照 (1) 的结果可以给出 1、2 两处的守恒关系式

$$p_1 + \frac{\alpha}{2} \rho v_1^2 - \rho g z_1 + \frac{3\gamma}{r_1} = p_2 + \frac{\alpha}{2} \rho v_2^2 - \rho g z_2 + \frac{3\gamma}{r_2} - \frac{8\delta \eta v}{r^2} (z_1 - z_2) \quad (15)$$

代入极限有

$$z_2 = z_1 + dz, r_2 = r_1 + dr, v_2 = v_1 + dv \quad (16)$$

将 (16) 式代入 (15) 式再小量近似可以得到

$$\alpha v \frac{dv}{dz} = g + \frac{3\gamma}{\rho} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dz} - \frac{8\delta \eta}{\rho} \frac{v}{r^2} \quad (17)$$

(3) 连续性方程为

$$r^2 v = \text{Const} \quad (18)$$

由此可得化简后的微分方程

$$\alpha \tilde{v} \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{z}} = \frac{1}{2Fr} - \frac{1}{We} \frac{3}{\sqrt{\tilde{v}}} \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{z}} - \frac{16\delta}{Re} \tilde{v}^2 \quad (19)$$

(4) 无穷远处有

$$\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{z}} = 0 \quad (20)$$

代入即得

$$\tilde{v}_\infty = \sqrt{\frac{Re}{32\delta \cdot Fr}} \quad (21)$$

$$\tilde{r}_\infty = \left(\frac{32\delta \cdot Fr}{Re} \right)^{1/4} \quad (22)$$

(5) 按照 (3) 问的思路可得

$$-2\alpha \frac{1}{\tilde{r}^5} \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{z}} = \frac{1}{2Fr} + \frac{1}{We} \frac{6}{\tilde{r}^2} \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{z}} - \frac{16\delta}{Re} \frac{1}{\tilde{r}^4} \quad (23)$$

积分并代入 $z = 0$ 处的边界条件可得

$$\tilde{z} = \frac{3}{B_0 \tilde{r}_\infty} \left[2 \arctan \frac{\tilde{r}_\infty}{\tilde{r}} - 2 \arctan \tilde{r}_\infty - \ln \left(\frac{\tilde{r} - \tilde{r}_\infty}{\tilde{r} + \tilde{r}_\infty} \frac{1 + \tilde{r}_\infty}{1 - \tilde{r}_\infty} \right) \right] - \frac{\alpha \cdot Fr}{\tilde{r}_\infty^4} \ln \frac{1 - \left(\frac{\tilde{r}_\infty}{\tilde{r}} \right)^4}{1 - \tilde{r}_\infty^4} \quad (24)$$

其中 $B_0 = \frac{We}{Fr}$ 。

(6) 将 (24) 式小量展开即得

$$\tilde{z} = \frac{12}{B_0} \left(\frac{1}{\tilde{r}} - 1 \right) + \alpha \cdot Fr \left(\frac{1}{\tilde{r}^4} - 1 \right) \quad (25)$$

(7) 将 (25) 式按照题目的要求保留可得

$$\tilde{z} = \alpha \cdot Fr \left(\frac{1}{\tilde{r}^4} - 1 \right) \quad (26)$$

评分标准：本题满分 50 分。

第 (1) 问 18 分：

第 (1.1) 小问 8 分：(1) (2) (4) (5) (6) (7) 式 1 分，(8) 式 2 分；

第 (1.2) 小问 10 分：(11) 式 1 分，(10) (12) (13) 式 2 分，(14) 式 3 分；

第 (2) 问 8 分：(15) (16) 式 2 分，(17) 式 4 分；

第 (3) 问 6 分：(18) 式 2 分，(19) 式 4 分；

第 (4) 问 5 分：(21) 式 1 分，(20) (22) 式 2 分；

第 (5) 问 9 分：(23) 式 3 分，(24) 式 6 分；

第 (6) 问 2 分：(25) 式 2 分；

第 (7) 问 2 分：(26) 式 2 分。

四、(40 分) 相变传热

一个半无限长的柱形容器，截面积为 S ，左端位于 $x = 0$ 处且温度固定为 T_1 ， x 轴沿容器方向延伸。在 $t = 0$ 时刻，使容器中充满纯冰，冰的温度恰好为冰的熔点 T_0 ，且 $T_1 > T_0$ 。已知水的傅里叶热传导系数为 κ ，密度为 ρ ，比热容为 c ，单位质量相变潜热为 h 。假设水中的温度分布只与 x 和 t 有关，且容器完全绝热。设 t 时刻冰和水的分界线位于 $s(t)$ 处。

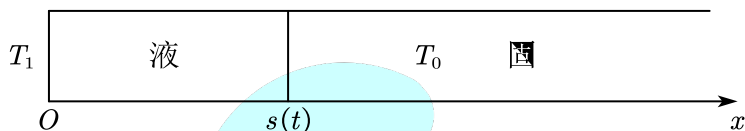


图 4.1 半无限长容器中冰的熔化

(1) 考虑简化近似，假设水的比热容 c 很小，以至于水中的温度分布在任意时刻都可以看作是关于 x 线性分布的，求 $s(t)$ 的表达式。

(2) 一般情况下水中的温度分布并不能看作是线性的，接下来我们进行具体的研究。

(2.1) 已知水中的温度分布 $T(x, t)$ 满足热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

试求出 a 的值，并写出 $x = 0$ 处和 $x = s(t)$ 处 T 的值作为边界条件。

(2.2) 列出 $\frac{ds}{dt}$ 满足的表达式，用已知参量和 $T(x, t)$ 在 $s(t)$ 处的导数表示。

(2.3) 已知热传导方程的一种解可能为

$$T(x, t) = A + B \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

其中 A 和 B 为待定系数。注意到误差函数中宗量的形式，不妨假设 $s(t)$ 与 (1) 中具有相似的形式，即 $s(t) = 2\lambda\sqrt{at}$ 。代入边界条件，求出 A 和 B 的表达式，用已知参量和 λ 表示。

(2.4) 求出 λ 所满足的方程，用 $f(\lambda) = C$ 的形式表示；并证明在比热容 c 很小时 $s(t)$ 和 (1) 中求得的相同。

数学提示：误差函数 $\operatorname{erf}(x)$ 定义为

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

参考解答：

(1) 由于假设水中的温度分布是线性的，可以写出温度梯度为

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_0 - T_1}{s(t)} \quad (1)$$

单位时间传递的热量为

$$\frac{dQ}{dt} = -\kappa S \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa S \frac{T_1 - T_0}{s(t)} \quad (2)$$

单位时间吸收的相变潜热为

$$\frac{dQ}{dt} = \rho h S \frac{ds(t)}{dt} \quad (3)$$

联立得

$$\rho h S \frac{ds(t)}{dt} = \kappa S \frac{T_1 - T_0}{s(t)} \quad (4)$$

考虑到初始条件

$$s(0) = 0 \quad (5)$$

解得

$$s(t) = \sqrt{\frac{2\kappa(T_1 - T_0)}{\rho h} t} \quad (6)$$

(2)

(2.1) 考虑位于 $x \sim x + dx$ 的一段水的微元, 吸收的热量与温度变化的关系为

$$\frac{dQ}{dt} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} S dx \quad (7)$$

根据傅里叶热传导定律, 这段微元吸收的热量为

$$\frac{dQ}{dt} = \kappa S \left(\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x+dx} - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x \right) = \kappa S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \quad (8)$$

联立得

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (9)$$

因此

$$a = \frac{\kappa}{\rho c} \quad (10)$$

边界条件为

$$T(0, t) = T_1 \quad (11)$$

$$T(s(t), t) = T_0 \quad (12)$$

(2.2) $s(t)$ 处单位时间传递的热量为

$$\frac{dQ}{dt} = -\kappa S \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{s(t)} \quad (13)$$

单位时间内吸收的相变潜热为

$$\frac{dQ}{dt} = \rho h S \frac{ds(t)}{dt} \quad (14)$$

联立得

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\frac{\kappa}{\rho h} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{s(t)} \quad (15)$$

(2.3) 代入边界条件得到方程

$$A = T_1 \quad (16)$$

$$A + B \operatorname{erf}(\lambda) = T_0 \quad (17)$$

解得

$$B = \frac{T_0 - T_1}{\operatorname{erf}(\lambda)} \quad (18)$$

(2.4) 根据 $s(t) = 2\lambda\sqrt{at}$, 求导得

$$\frac{ds(t)}{dt} = \lambda\sqrt{\frac{a}{t}} \quad (19)$$

在 $s(t)$ 处温度对 x 的导数为

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{s(t)} = \frac{T_0 - T_1}{\operatorname{erf}(\lambda)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{s(t)^2}{4at}} \frac{1}{2\sqrt{at}} = \frac{T_0 - T_1}{\operatorname{erf}(\lambda)} \frac{e^{-\lambda^2}}{\sqrt{\pi at}} \quad (20)$$

代入 (15) 式得到 λ 满足的方程

$$\lambda e^{\lambda^2} \operatorname{erf}(\lambda) = \frac{\kappa(T_1 - T_0)}{\rho h a \sqrt{\pi}} = \frac{c(T_1 - T_0)}{l \sqrt{\pi}} \quad (21)$$

在 c 很小的情况下, λ 也是一个小量, 方程的左边可以近似为

$$\lambda e^{\lambda^2} \operatorname{erf}(\lambda) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lambda^2 = \frac{\kappa(T_1 - T_0)}{\rho l a \sqrt{\pi}} \quad (22)$$

即

$$\lambda = \sqrt{\frac{\kappa(T_1 - T_0)}{2\rho l a}} \quad (23)$$

$$s(t) = 2\sqrt{\frac{\kappa(T_1 - T_0)}{2\rho l a}} \sqrt{at} = \sqrt{\frac{2\kappa(T_1 - T_0)}{\rho h}} t \quad (24)$$

确实退化为了第 (1) 问中的近似情况。

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 12 分: (1) (2) (3) (4) (5) (6) 式各 2 分;

第 (2) 问 28 分:

第 (2.1) 小问 8 分: (7) (8) (10) 式各 2 分, (11) (12) 式各 1 分;

第 (2.2) 小问 6 分: (13) (14) (15) 式各 2 分;

第 (2.3) 小问 6 分: (16) (17) (18) 式各 2 分;

第 (2.4) 小问 8 分: (19) (20) (21) 式各 2 分, 验证 2 分。

五、(40分) 玻尔-索莫菲模型

我们知道, 为了解释实验上得到的氢原子光谱的里德伯公式:

$$\lambda(n_1, n_2)^{-1} = R \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad (1)$$

(其中 R 为里德伯常数), 玻尔提出了三个基本假设:

① 定态假设: 氢原子的核外电子在库仑引力场的作用下, 绕原子核在若干确定的轨道上做匀速圆周运动, 轨道所有参数由量子数 n 表征, E_n 为量子数为 n 的轨道能量;

② 跃迁假设: 电子在不同定态轨道之间跃迁时发出光子的频率满足:

$$h\nu(n_1 \rightarrow n_2) = E_{n_1} - E_{n_2} \quad (2)$$

③ 角动量量子化条件: 所有定态轨道的角动量为定值:

$$L_n = n\hbar \quad (3)$$

在量子力学以后的发展中, 人们意识到角动量量子化条件可以用更基本的**对应原理**导出。

对应原理: 对于任意量子力学系统, 当量子数 $n \rightarrow \infty$ 时, 量子化的能级将趋于经典的连续能量。在氢原子的情境下, 当量子数 $n \rightarrow \infty$ 时, 电子在相邻能级间跃迁发出的光子频率等于电子做匀速圆周运动的频率。

(1) 考虑氢原子核外电子, 设电子质量为 m , 带电量为 $-e$, 在库仑引力场的作用下, 绕原子核作圆周运动 (不考虑原子核的运动)。请从对应原理出发, 利用里德伯公式和玻尔的前两个假设, 推证电子轨道角动量的量子化条件 $L_n = n\hbar$ 。

(2) 索莫菲在他所提出的理论中完成了三项工作:

① 保留玻尔第一、二个假定, 将圆形轨道推广为椭圆轨道, 并且轨道参数由 (n_r, n_θ) 两个量子数决定;

② 两个量子化条件, 对电子单个运动周期积分得:

$$\oint p_r dr = n_r h, \oint p_\theta d\theta = n_\theta h \quad (n_r, n_\theta \in N, n_\theta \neq 0) \quad (4)$$

其中 p_r 分别为电子动量的径向分量, p_θ 为电子的角动量;

(2.1) 依据索莫菲前两个推广假定, 从牛顿时学的角度, 推导椭圆轨道半长轴 $a(n_r, n_\theta)$ 、半短轴 $b(n_r, n_\theta)$ 、离心率 $\epsilon(n_r, n_\theta)$ 、能级 $E(n_r, n_\theta)$ 的表达式以及能级简并度 $g(n_r, n_\theta)$ 。

③ 引入狭义相对论修正: 氢原子核外电子能级可表示为:

$$E = c \sqrt{p_r^2 + p_\theta^2/r^2 + m^2 c^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - mc^2 \quad (5)$$

其中 m 表示电子静质量。

(2.2) 对于类氢原子, 假设电子绕氢原子核在一个平面上作椭圆运动, 设电子静止质量为 m , 带电量为 $-e$, 原子核带电量为 Ze , 请在考虑相对论修正的情况下推导能级 $E(n_r, n_\theta)$ 的表达式。(答案表达式中可含有精细结构常数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$)

可能用到的积分公式:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^2 \sin^2 \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} d\theta = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} - 1 \right) \quad (6)$$

参考解答:

(1) 电子在库仑力的作用下绕原子核运动:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \quad (1)$$

能级能量为:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (2)$$

电子圆周运动的频率为:

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}} \quad (3)$$

根据玻尔的辐射理论:

$$h\nu = E_n - E_{n'} \quad (4)$$

与里德伯公式对比可得:

$$E_n = -\frac{Rhc}{n^2} \quad (5)$$

$$\nu = Rc \frac{n'^2 - n^2}{n'^2 n^2} = Rc \frac{(n' + n)(n' - n)}{n'^2 n^2} \quad (6)$$

当 n 很大时, 对于相邻能级之间的跃迁, 可认为:

$$\nu \approx \frac{2Rc}{n^3} \quad (7)$$

根据对应原理：

$$f = \nu \quad (8)$$

不难得出：

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{16\pi^2 R^2 c^2 m_e}} n^2 \quad (9)$$

$$R = \frac{2\pi^2 e^4 m_e}{(4\pi\epsilon_0)^2 c h^3} \quad (10)$$

带入R可得：

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} n^2 \quad (11)$$

电子角动量为：

$$L_n = m_e v r = m_e \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}} r = \sqrt{\frac{m_e e^2 r}{4\pi\epsilon_0}} \quad (12)$$

带入表达式即可得到：

$$L_n = n\hbar \quad (13)$$

(2) (2.1) 由比耐公式：

$$l^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{F}{m} \quad (14)$$

其中 $l = r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{m}$, $u = \frac{1}{r}$ 。由量子化条件 $\oint p_\theta d\theta = n_\theta h$ ，可以得到：

$$L = n_\theta \hbar \quad (15)$$

将 (14) 式变形，带入 (15) 式与 F 的表达式可得：

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{m e^2}{4\pi\epsilon_0 (n_\theta \hbar)^2} \quad (16)$$

则解的标准形式为：

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\theta} \quad (17)$$

ϵ 即为离心率， a 为半长轴。与 (16) 式对比可得：

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 (n_\theta \hbar)^2}{m e^2 (1-\epsilon^2)} \quad (18)$$

对 (17) 式求导可得：

$$dr = \frac{a(1-\epsilon^2)\epsilon\sin\theta}{(1+\epsilon\cos\theta)^2} d\theta \quad (19)$$

利用量子化条件 $\oint p_r dr = n_r h$ ，整理可得：

$$n_r h = L \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^2 \sin^2 \theta}{(1+\epsilon\cos\theta)^2} d\theta = 2\pi L \left(\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - 1 \right) \quad (20)$$

于是：

$$\epsilon(n_r, n_\theta) = \sqrt{1 - \frac{n_\theta^2}{(n_r + n_\theta)^2}} \quad (21)$$

显然，半长轴、半短轴为：

$$a(n_r, n_\theta) = \frac{4\pi\epsilon_0 (n_r + n_\theta)^2 \hbar^2}{m e^2} \quad (22)$$

$$b(n_r, n_\theta) = a\sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 n_\theta (n_r + n_\theta) \hbar^2}{me^2} \quad (23)$$

机械能守恒给出:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2(4\pi\epsilon_0)^2 EL^2}{me^2}} \quad (24)$$

代入 (21) 式, 得到

$$E(n_r, n_\theta) = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2(n_r + n_\theta)^2\hbar^2} \quad (25)$$

显然在能量一定时, 量子数 (n_r, n_θ) 仅能取到 $(0, n_r + n_\theta) \sim (n_r + n_\theta - 1, 1)$, 则简并度为:

$$g(n_r, n_\theta) = n_r + n_\theta \quad (26)$$

(2.2) 引入 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$, 则代入题干中能量表达式 (5) 得到:

$$E = -Z\alpha\hbar cu + \sqrt{L^2 c^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] + m^2 c^4} \quad (27)$$

进一步化简得到:

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 = \frac{(E + Z\alpha\hbar cu)^2 - m^2 c^4}{L^2 c^2} \quad (28)$$

两边对 u 求导得到:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left[1 - \left(\frac{Z\alpha\hbar}{L} \right)^2 \right] u = \frac{Z\alpha\hbar E}{L^2 c} \quad (29)$$

则由 (29) 式解得:

$$u = A \cos \left(\sqrt{1 - \left(\frac{Z\alpha\hbar}{L} \right)^2} \theta \right) + \frac{Z\alpha\hbar E}{L^2 c \left[1 - \left(\frac{Z\alpha\hbar}{L} \right)^2 \right]} \quad (30)$$

由量子化条件 $\oint p_\theta d\theta = n_\theta \hbar$ 同样可得:

$$L = n_\theta \hbar \quad (31)$$

引入 $\epsilon = \frac{\hbar c A}{Z\alpha E} (n_\theta^2 - \alpha^2)$, $k = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{n_\theta^2}}$, 由 (30) 式化简得:

$$r(\theta) = \frac{\epsilon}{A(1 + \epsilon \cos k\theta)} \quad (32)$$

利用量子化条件 $\oint p_r dr = n_r \hbar$, 且

$$p_r = m\dot{r} = \frac{p_\theta \dot{r}}{r^2 \dot{\theta}} = \frac{p_\theta}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \quad (33)$$

整理可得:

$$\oint p_r dr = \int \frac{p_\theta}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \frac{dr}{d\theta} d\theta = k p_\theta \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^2 \sin^2(k\theta) d(k\theta)}{[1 + \epsilon \cos(k\theta)]^2} = n_r \hbar \quad (34)$$

即:

$$2\pi n_r \hbar = 2\pi k n_\theta \hbar \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} - 1 \right) \quad (35)$$

从而:

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{n_\theta^2 - \alpha^2 Z^2}{\left(n_r + \sqrt{n_\theta^2 - \alpha^2 Z^2}\right)^2}} \quad (36)$$

代入 $\epsilon = \frac{\hbar c A}{Z \alpha E} (n_\theta^2 - \alpha^2)$, 得到:

$$u = \frac{Z \alpha E}{\hbar c (n_\theta^2 - \alpha^2 Z^2)} \left[\sqrt{1 - \frac{n_\theta^2 - \alpha^2 Z^2}{\left(n_r + \sqrt{n_\theta^2 - \alpha^2 Z^2}\right)^2}} \cos \left(\sqrt{1 - \left(\frac{Z \alpha \hbar}{L}\right)^2} \theta \right) + 1 \right] \quad (37)$$

代入 (28) 式化简得到 E 的表达式:

$$E = mc^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha Z}{n_r + \sqrt{n_\theta^2 - \alpha^2 Z^2}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - mc^2 \quad (38)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 13 分: (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) 式各 1 分;

第 (2) 问 27 分:

第 (2.1) 小问 13 分: (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) (23) (24) (25) (26) 每式各 1 分;

第 (2.2) 小问 14 分: (27) (28) (29) (30) (31) (32) (33) (34) (35) (36) (37) 式各 1 分, (38) 式 3 分。由于题目计算方法不唯一, 只要在完整且清晰的推导下得出 (38) 式, 本题即可给满分。

六、(60 分) 折断丛雨丸

在知名视觉小说《千恋*万花》中, 男主有地将臣折断了镶嵌在石头中的丛雨丸并因此卷入到一系列事件中。在本题中, 我们将探究折断丛雨丸的原理。



图6.1 男主折断丛雨丸及其示意图

作为合理的近似, 我们将丛雨丸视作一块厚度为 b , 宽度为 d 的薄板 ($b \ll d$)。断裂力学的研究表明金属的断裂一般是由于较小的裂纹扩大而成, 裂纹任意处的宽度都远小于薄板的厚度。忽视重力的影响。

(1) 我们首先通过粗糙的方式对折断丛雨丸所需的力进行估算。丛雨丸材料的表面能为 γ , 若在折断时裂口处裂纹宽度为 a , 男主施力位置与裂纹距离为 l , 计算至少所需施力大小 F 。

下面我们将细致的分析裂纹处的应力，对于弹性体内一个三维体积元，其受压力 σ 和剪切力 τ ，在图 2 中细致展示了各分量对应的应力。在无体力的情况下应力平衡方程为：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = 0$$

而材料应变 ε 与应力之间的本构关系为：

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \end{cases}, \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{\tau_{ij}}{2G}$$

其中 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ， E 为杨氏模量， G 为切变模量， ν 为泊松

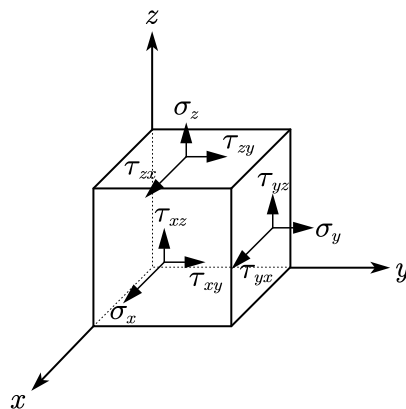


图6.2 应力方向示意图

比。

(2) 我们可以认为在垂直板面方向(z 轴朝向)上对板的应变为0，也即 $\varepsilon_z = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$ ，此时该问题被简化为二维问题。

(2.1) 已知二维情况下应变与 x, y 方向上几何位移 U, V 之间满足几何关系：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

试根据几何关系给出 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ 之间满足的偏微分方程，这被称作相容关系。

(2.2) 原则上该问题只需要求解上述偏微分方程组，但我们可以引入一个函数 $\phi(x, y)$ 来简化求解。取 $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ ，试给出 ϕ 满足的方程，并将 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 用 ϕ 表示出来。

(3) 现在我们考察裂缝附近处的应力场，在裂缝附近以图 3 方式建立坐标系并认为板子无穷大，裂缝极其细小以至于可以忽视夹角大小。在裂缝边缘处角向应力和剪切应力显然为

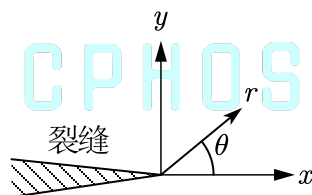


图6.3 裂缝处坐标系

0。在该边界条件下，可以采用分离变量法求解 ϕ ，令 $\phi = r^{1+\lambda} F_\lambda(\theta)$ 。试求解裂缝处的奇性应力函数 ϕ （当 $r \rightarrow 0$ 时应力大小发散）的表达式，可以包含常量。

提示：在极坐标下 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 为

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

(4) 根据(3)问的结果明显可以发现其包含了两种应力场的叠加，这两种应力场对应的位移场示意图绘制在图 4 中，下面我们仅讨论 I 型裂缝。在裂缝尖端附近材料将会发生塑性形变，不再满足此前计算的应力分布，而根据 Mises 屈服准则我们可以估计尖端附近塑性区的尺寸和形状。Mises 屈服准则即当主应力分别为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 时（即在合适的坐标架下剪切应力为0时），发生塑性形变的区域满足：

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \geq 2\sigma_e^2$$

其中 σ_e 为常量，试给出塑性形变区的边界方程 $r_p(\theta)$ 并绘制 $\nu = 0.3$ 时的示意图。

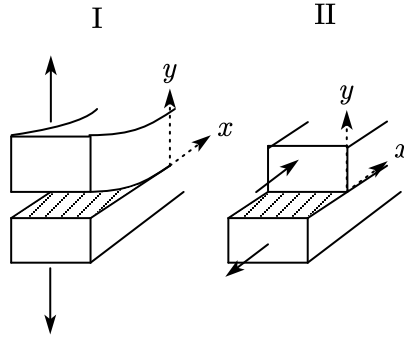


图6.4 裂缝处的两种位移场

提示：极坐标与直角坐标系之间应力变换为

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

参考解答：

(1) 完全折断时表面能的变化为

$$\Delta A = 2bd\gamma \quad (1)$$

这完全是由外界做功导致的，也即

$$\Delta A = Fl\theta \quad (2)$$

根据几何关系有

$$a = d\theta \quad (3)$$

因此可以得到所需施力大小

$$F = \frac{2d^2b\gamma}{al} \quad (4)$$

(2) (2.1) 对 ε_{xy} 满足的式子两边求导得到

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \right) \quad (5)$$

(2.2) 根据应力平衡方程可以得到

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_x = -\frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} \\ \frac{\partial}{\partial y} \sigma_y = -\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} \end{cases} \quad (6)$$

不难得到

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (7)$$

由本构关系可以得到

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \nu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) = \nu \nabla^2 \phi \quad (8)$$

将本构关系代入相容关系得到

$$\frac{E}{G} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + 2\nu \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

代入 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 化简得到

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \quad (10)$$

由此得到

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^4 \phi = 0 \quad (11)$$

(3) 将 $\phi = r^{1+\lambda} F_\lambda(\theta)$ 代入 (10) 式中, 可以得到

$$F_\lambda''''(\theta) + 2(\lambda^2 + 1)F_\lambda''(\theta) + (\lambda^2 - 1)^2 F_\lambda(\theta) = 0 \quad (12)$$

其通解为

$$F_\lambda(\theta) = A \cos(\lambda + 1)\theta + B \sin(\lambda + 1)\theta + C \cos(\lambda - 1)\theta + D \sin(\lambda - 1)\theta \quad (13)$$

应力可以表示成

$$\begin{cases} \sigma_r = r^{\lambda-1}(F_\lambda'' + (\lambda + 1)F_\lambda) \\ \sigma_\theta = r^{\lambda-1}\lambda(\lambda + 1)F_\lambda \\ \tau_{r\theta} = -r^{\lambda-1}\lambda F_\lambda' \end{cases} \quad (14)$$

(13) 式代入到边界条件当中可以得到

$$F_\lambda(\pm\pi) = 0, F_\lambda'(\pm\pi) = 0 \quad (15)$$

由 (12) (14) 式得到

$$\begin{cases} A \cos \lambda\pi + C \cos \lambda\pi = 0 \\ A(\lambda + 1) \sin \lambda\pi + C(\lambda - 1) \sin \lambda\pi = 0 \\ B \sin \lambda\pi + D \sin \lambda\pi = 0 \\ B(\lambda + 1) \cos \lambda\pi + D(\lambda - 1) \cos \lambda\pi = 0 \end{cases} \quad (16)$$

根据方程组 (15) 存在非零解的条件有

$$\sin 2\lambda\pi = 0 \quad (17)$$

根据 (14) 式裂纹尖端的奇性力场对应 $\lambda - 1 < 0$, 则有

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad (18)$$

此时得到最终结果

$$\phi = Cr^{\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3\theta}{2} \right) - Dr^{\frac{3}{2}} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (19)$$

(4) 将 (19) 式代入到 (14) 式中得到

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{C}{4\sqrt{r}} \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{D}{4\sqrt{r}} \left(-5 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_\theta = \frac{C}{4\sqrt{r}} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{3D}{4\sqrt{r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{r\theta} = \frac{C}{4\sqrt{r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{D}{4\sqrt{r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right) \end{cases} \quad (20)$$

根据 (20) 式在 $\theta = 0$ 方向上定性分析可知, 含 C 部分存在向外侧张开的应力, 含 D 部分存在向内推的剪应力, 因此含 C, D 部分分别代表 I, II 型裂缝。对于 I 型裂缝有

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{C}{4\sqrt{r}} \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_\theta = \frac{C}{4\sqrt{r}} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{r\theta} = \frac{C}{4\sqrt{r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{cases} \quad (21)$$

代入变换后计算得到

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{C}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y = \frac{C}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{C}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (22)$$

根据 (8) 式则可以得到

$$\sigma_z = \frac{2\nu C}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2}, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (23)$$

主应力满足方程

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

可以解得

$$\sigma_{1,2} = \frac{C}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 \pm \sin \frac{\theta}{2} \right), \sigma_3 = \frac{2\nu C}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (25)$$

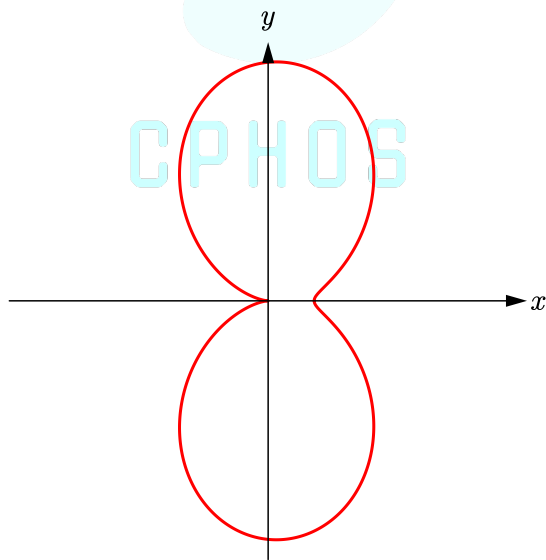
代入 Mises 屈服准则得到边界为

$$r_p(\theta) = \frac{C^2}{2\sigma_e^2} \left[\frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) \right] \quad (26)$$

在 $\nu = 0.3$ 时边界为

$$r_p(\theta) = \frac{C^2}{2\sigma_e^2} \left[\frac{3}{2} \sin^2 \theta + \frac{4}{25} (1 + \cos \theta) \right] \quad (27)$$

示意图如答图6.1所示



答图6.1 塑性形变区示意图

评分标准：本题满分 60 分。

第 (1) 问 5 分：(1) (2) (3) 式 1 分，(4) 式 2 分；

第 (2) 问 15 分：

第 (2.1) 问 2 分：(5) 式 2 分；

第 (2.2) 问 13 分：(6) (7) (8) (9) (10) 式 2 分，(11) 式 3 分；

第 (3) 问 20 分：(13) (15) (17) (18) (19) 式 2 分，(12) (14) 式 3 分，(16) 式 4 分；

第(4)问20分:(23)(24)式2分,(21)(22)(25)(26)式3分,答图4分。

七、(60分)双折射

本题旨在用两种方法推导各向异性介质内的折射定律。如图,一束入射角为 i 的平行光从真空入射到一块单轴晶体,设电矢量为 p 方向,其振幅为 A_p ,反射光、折射光振幅分别为 A_p^r, A_p^t ,晶体光轴在入射面内,和真空-晶体界面夹角为 β ,射线方向和光轴夹角为 ξ 。晶体参数为:偏振沿光轴方向(e 光)的折射率为 n_e ,偏振垂直光轴方向(o 光)的折射率为 n_o 。我们试图利用几何光学和电磁理论求出折射角。

(1) 从普通折射定律获得的启示:

考虑将真空-晶体界面换为介质1-介质2界面,设折射角为 γ ,认为 i, γ 相互独立,其中两个介质均各向同性,电容率为 $\epsilon_1 = \epsilon_0 n_1^2, \epsilon_2 = \epsilon_0 n_2^2$ 。写出两个电磁场边界条件及其数学表达式(用 $A_p, A_p^r, A_p^t, \mu_0, \epsilon_1, \epsilon_2, i, \gamma$ 表示);并利用两个边界条件,独立地得到折射定律($i - \gamma$ 关系)。

(2) 惠更斯作图法(如图7.1):以光轴为 y 轴正方向建立直角坐标系。 e 光波面为旋转椭球面, O, A 为入射点。仅考虑 e 光的折射, O 点发出椭圆波面 Δt 的时间先于 A ,椭圆波面长短轴分别为 $v_e \Delta t, v_o \Delta t$ ($v_e = \frac{c}{n_e}, v_o = \frac{c}{n_o}$),过 A 做切面 AP 即为波法面,切点 P 为射线端点。射线角 ξ 、法线角 θ (如图 \hat{n}, y 轴正方向之间的夹角),以及各个重要的波矢量均被标在图中。

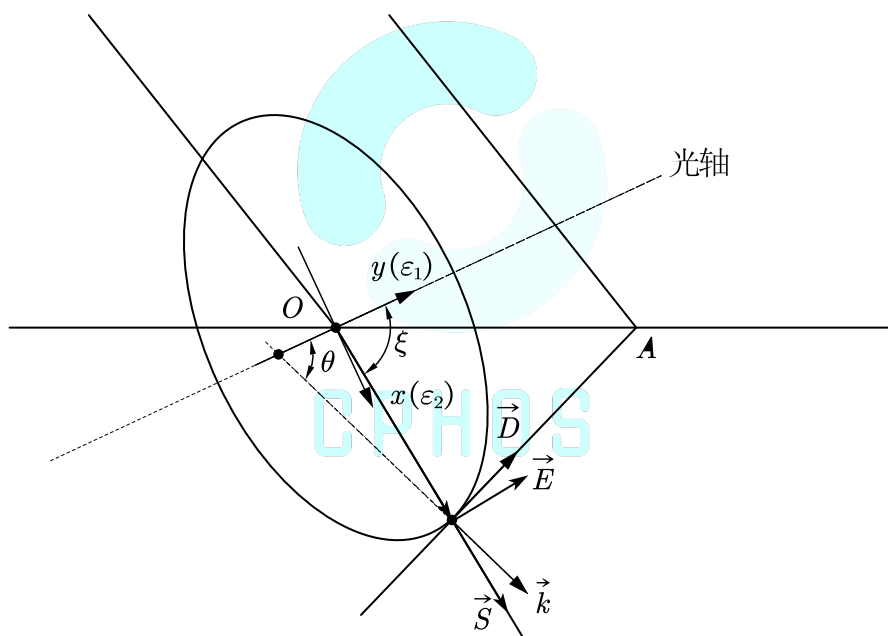


图7.1 惠更斯作图法示意图

(2.1) 求射线角 ξ , 法线角 θ 之间的关系(用 n_e, n_o 表示)。

(2.2) 利用图(1)几何关系与解析几何知识,证明法线角 θ 由下式给出:

$$\tan \theta = n_e^2 \frac{\sin \beta \cos \beta + \sqrt{\left(\frac{\sin i \cos \beta}{n_e}\right)^2 + \left(\frac{\sin i \sin \beta}{n_o}\right)^2 - \left(\frac{\sin^2 i}{n_o n_e}\right)^2}}{\sin^2 i - n_e^2 \sin^2 \beta} \quad (1)$$

(3) e 光折射的电磁理论

受到(1.3)启发,我们试图通过电磁场边界条件来导出(1)式,介质中的麦克斯韦方程组为:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2)$$

电磁波的振幅时谐变化，因此各个量均可以表示为平面波复振幅的形式：

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{V}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (3)$$

\hat{k} 即为波法线方向，射线方向为 $\hat{S}/\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ 。在介质2中， xOy 坐标系下本构关系：

$$D_x = \varepsilon_2 E_x = \varepsilon_0 n_0^2 E_x, \quad D_y = \varepsilon_1 E_y = \varepsilon_0 n_e^2 E_y, \quad D_z = \varepsilon_2 E_z = \varepsilon_0 n_0^2 E_z \quad (4)$$

(3.1) 求证下列关系：

$$\textcircled{1} (\hat{k} \cdot \vec{E}) \hat{k} - \vec{E} = -\mu_0 \frac{\omega^2}{k^2} \vec{D}$$

$$\textcircled{2} \vec{B} \text{垂直于} \vec{E}, \vec{D}, \vec{k}, \vec{S} \text{所共的平面。}$$

(提示：矢量分析公式 $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$)

(3.2) 利用(3.1)中关系 $\textcircled{1}$ 和 xOy 坐标系下本构关系，求出波法面速度 $v_n = \frac{\omega}{k}$ ，要求给出完整的推导过程(用 θ, v_e, v_o 表示)。

(3.3) 折射光同样为 p 偏振的，因此我们可以写出真空-晶体界面法向电位移连续和切向磁场强度连续的两个电磁场边界条件(可以用 $A_p, A_p^r, A_p^t, i, \xi, \beta, \varepsilon_2, \varepsilon_1, v_n, \mu_0$ 表达)。

(3.4) 用(1.3)问类似的方法处理(3.3)问结果来计算 $\tan \theta$ ，证明可以得到和(2.2)问相同的结果。

参考解答：

(1.1) 法向电位移连续 $D_{1n} = D_{2n}$ ：

$$\varepsilon_1 (A_p + A_p^r) \sin i = \varepsilon_2 A_p^t \sin \gamma \quad (1)$$

切向磁场强度连续 $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ ：

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} (A_p + A_p^r) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}} A_p^t \quad (2)$$

(1.2) 将(1)(2)式相除得到

$$\sqrt{\varepsilon_1} \sin i = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \gamma \quad (3)$$

即为折射定律。

(2) (2.1) 设 P 点坐标 (x, y) ，则其满足椭圆方程：

$$f(x, y) = \frac{x^2}{(v_e \Delta t)^2} + \frac{y^2}{(v_o \Delta t)^2} = 1 \quad (4)$$

由几何关系，得：

$$\tan \xi = \frac{y}{x} \quad (5)$$

而 (x, y) 处的椭圆法矢量斜率为：

$$\tan \theta = k_n = \frac{\partial f(x, y) / \partial y}{\partial f(x, y) / \partial x} = \frac{n_o^2 y}{n_e^2 x} \quad (6)$$

即得：

$$\tan \theta = \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \xi = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tan \xi \quad (7)$$

(2.2) 在 xOy 坐标系中，线段 AP 和椭圆相切，由时间关系， $OA = \frac{c \Delta t}{\sin i}$ 。

则 A 点坐标为：

$$\left(\frac{c \Delta t}{\sin i} \sin \beta, \frac{c \Delta t}{\sin i} \cos \beta \right) \quad (8)$$

设直线 AP 方程为：

$$y = \frac{c\Delta t}{\sin i} \cos \beta + k \left(x - \frac{c\Delta t}{\sin i} \sin \beta \right) \quad (9)$$

如图7.1所示, 相切时有几何关系:

$$\tan \theta = -k \quad (10)$$

直线AP方程和椭圆方程联立:

$$(n_o^2 k^2 + n_e^2 \sin^2 i) \left(\frac{x}{c\Delta t} \right)^2 + 2n_o^2 k (\cos \beta - k \sin \beta) \left(\frac{x}{c\Delta t} \right) + n_o^2 (\cos \beta - k \sin \beta)^2 = \sin^2 i \quad (11)$$

相切条件 ($\Delta = 0$) 给出k满足的方程:

$$(n_e^2 \sin^2 \beta - \sin^2 i) k^2 - 2n_e^2 \sin \beta \cos \beta k + n_e^2 \left(\cos^2 \beta - \frac{\sin^2 i}{n_o^2} \right) = 0 \quad (12)$$

我们选取 $k < 0$ 的解 (符合题图几何关系):

$$k = n_e^2 \frac{\sin \beta \cos \beta + \sqrt{\left(\frac{\sin i \cos \beta}{n_e} \right)^2 + \left(\frac{\sin i \sin \beta}{n_o} \right)^2 - \left(\frac{\sin^2 i}{n_o n_e} \right)^2}}{n_e^2 \sin^2 \beta - \sin^2 i} \quad (13)$$

则题干中 (1) 式得证。

(3) (3.1) 由题给的平面波解, 不难发现对所有波矢量, 有如下数学上的代换关系:

$$\nabla \leftrightarrow i\vec{k}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega \quad (14)$$

将麦克斯韦方程组中所有式子用 (11) 式化简得:

$$\hat{k} \cdot \vec{D} = 0, \quad \hat{k} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}, \quad \vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D} \quad (15)$$

即

$$\hat{k} \perp \vec{D}, \quad \hat{k} \perp \vec{B}, \quad \vec{B} \perp \vec{E}, \quad \vec{H} \perp \vec{D} \quad (16)$$

又 $\vec{S} \perp \vec{E}, \vec{S} \perp \vec{H}$, 可得 $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{S}$ 共面且 \vec{B} 垂直于该平面。

由麦克斯韦方程组, 计算得:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) \quad (17)$$

利用 (11) 式的关系, 并利用题给矢量分析公式可以得到:

$$k^2 \vec{E} - \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) = -\mu_0 \omega (\vec{k} \times \vec{H}) \quad (18)$$

联立 (12) (13) 式得:

$$(\hat{k} \cdot \vec{E}) \hat{k} - \vec{E} = -\mu_0 \frac{\omega^2}{k^2} \vec{D} \quad (19)$$

(3.2) 将 (3.1) 中关系①左右点乘 \vec{E} , 得到:

$$v_n^2 = \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 = -\frac{(\hat{k} \cdot \vec{E})^2 - E^2}{\mu_0 \vec{D} \cdot \vec{E}} \quad (20)$$

\vec{D} 的分量:

$$D_y = \varepsilon_1 E \sin \xi, D_x = \varepsilon_2 E \cos \xi \quad (21)$$

利用题干图中几何关系, 得:

$$v_n^2 = \frac{E^2 \cos^2(\xi - \theta)}{\mu_0 (\varepsilon_1 E_y^2 + \varepsilon_2 E_x^2)} = \frac{\cos^2(\xi - \theta)}{\mu_0 (\varepsilon_1 \sin^2 \xi + \varepsilon_2 \cos^2 \xi)} \quad (22)$$

代入关系 $\tan \theta = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tan \xi$, $v_e = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_0}}$, $v_o = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_0}}$ 得:

$$v_n = \sqrt{v_o^2 \cos^2 \theta + v_e^2 \sin^2 \theta} \quad (23)$$

(3.3) 仿照 (1.1) 问, 给出两个电磁场边界条件:

$$\varepsilon_1(A_p + A_p^r) \sin i = D_{2n}, \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}(A_p + A_p^r) = H_{2\tau} \quad (24)$$

其中

$$D_{2n} = D_y \sin \beta - D_x \cos \beta = A_p^t(\varepsilon_1 \sin \xi \sin \beta - \varepsilon_2 \cos \xi \cos \beta) \quad (25)$$

$$H_{2\tau} = |\vec{H}| = \frac{\omega}{k} |\vec{D}| = v_n A_p^t \sqrt{(\varepsilon_1 \sin \xi)^2 + (\varepsilon_2 \cos \xi)^2} \quad (26)$$

即

$$\varepsilon_1(A_p + A_p^r) \sin i = A_p^t(\varepsilon_1 \sin \xi \sin \beta - \varepsilon_2 \cos \xi \cos \beta) \quad (27)$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}(A_p + A_p^r) = v_n A_p^t \sqrt{(\varepsilon_1 \sin \xi)^2 + (\varepsilon_2 \cos \xi)^2} \quad (28)$$

(3.4) 仿照 (1.1) 问, 将 (27) (28) 两式相除得:

$$\frac{(\varepsilon_1 \sin \xi)^2 + (\varepsilon_2 \cos \xi)^2}{(\varepsilon_1 \sin \beta \sin \xi - \varepsilon_2 \cos \beta \cos \xi)^2} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1 \cos^2 \theta + \varepsilon_2 \sin^2 \theta) \sin^2 i} \quad (29)$$

利用关系 $\tan \theta = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tan \xi$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 n_e^2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 n_o^2$ 进一步化简得到:

$$\left(\frac{\tan \theta + \tan \beta}{1 - \tan \theta \tan \beta} \right)^2 + 1 = \frac{n_e^2 n_o^2}{(n_o^2 \tan^2 \theta + n_e^2) \sin^2 i} \quad (30)$$

从而得到 $\tan \theta$ 满足的方程:

$$(n_e^2 \sin^2 \beta - \sin^2 i) \tan^2 \theta - 2n_e^2 \sin \beta \cos \beta \tan \theta + n_e^2 \left(\cos^2 \beta - \frac{\sin^2 i}{n_o^2} \right) = 0 \quad (31)$$

最终我们得到 (取符合题图几何关系的解):

$$\tan \theta = n_e^2 \frac{\sin \beta \cos \beta + \sqrt{\left(\frac{\sin i \cos \beta}{n_e} \right)^2 + \left(\frac{\sin i \sin \beta}{n_o} \right)^2 - \left(\frac{\sin^2 i}{n_o n_e} \right)^2}}{\sin^2 i - n_e^2 \sin^2 \beta} \quad (32)$$

这显然和惠更斯作图法的结论相同, 间接说明了电磁理论和几何光学理论的自洽性。

评分标准: 本题满分 60 分。

第 (1) 问 6 分: (1) (2) (3) 式各 2 分;

第 (2) 问 20 分:

第 (2.1) 小问 8 分: (4) (5) (6) (7) 式各 2 分;

第 (2.2) 小问 12 分: (8) (9) (10) (11) (12) (13) 式各 2 分;

第 (3) 问 34 分:

第 (3.1) 小问 6 分: (14) (15) (16) (17) (18) (19) 式各 1 分;

第 (3.2) 小问 8 分: (20) (21) (22) (23) 式各 2 分;

第 (3.3) 小问 8 分: (25) (26) (27) (28) 式各 2 分;

第 (3.4) 小问 12 分: (29) (30) (32) 式各 2 分, (31) 式 4 分。



版权信息

命题人

常皓凌 付亦轩 金政阳 林家卫 王浩冉 吴恒旭 赵宇阳

审题人

常皓凌 付亦轩 金政阳 林家卫 王浩冉 吴恒旭 赵宇阳 李贝尔

联系方式



微信公众号
CPHOS



官方网站
www.cphos.cn



CPHOS 论坛

邮箱

service@cphos.cn

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考