

第 26 届 CPHOS 物理竞赛联考

理论试题

本试题于 2025 年 5 月 17 日 08:00 发布，最后更新于 2025 年 6 月 16 日 09:52。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

答题卡上传

2025/6/16 8:00 - 2025/6/23 12:00

阅卷

2025/6/23 12:00 - 2025/6/26 18:00

非正式成绩

2025/6/26 20:00

成绩申诉

2025/6/26 20:00 - 2025/6/27 18:00

正式成绩

2025/6/27 22:00

考生须知

1. 理论试题共 9 页，理论答题卡共 7 页，答题时间 180 分钟，试题满分 320 分。
2. 请在答题卡的指定答题区域内答题，试题和草稿纸上的内容将不会作为评分参考，不可申请答题卡加页。
3. 若发现试题存在问题，请向领队（教练）反映，由其转达至相关微信群聊。
4. 试题答案及相关分析均会在官方网站 www.cphos.cn 上发布。
5. 本次考试定位难度为高于复赛、略低于决赛。

一、（40 分）弱电离尘埃等离子体

考虑一种未磁化的局部均匀的弱电离尘埃等离子体，它由电子、一次电离的离子、带负电的尘埃粒子和分子组成；分子的浓度远大于其他带电粒子的浓度，电子和离子的浓度远大于尘埃粒子的浓度。

（1）这种弱电离尘埃等离子体处在电磁场 $E = E_0 e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ 中，只考虑碰撞，电子的玻尔兹曼方程是

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_r f - \frac{e}{m_e} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_v f + \nu_{\text{eff}} f_1 = 0$$

其中 f 为电子在相空间（位矢空间与速度空间的联合空间）中的分布函数， $-e$ 和 m_e 分别表示电子的电量和质量， ν_{eff} 是电子与分子碰撞的有效频率， f_1 是电子的速度分布相对于其平衡态分布发生的很小的偏离导致的电子在相空间（位矢空间与速度空间的联合空间）中的分布函数的偏离，电子平衡态分布满足麦克斯韦分布。

在弱场作用下，忽略磁场的作用并考虑到局部均匀的假设， N_e 和 T_e 为电子的浓度和温度，真空中的介电常数为 ϵ_0 ，计算角频率为 ω 的电磁波下的复电导率。

（2）下面同时考虑碰撞和充电对尘埃等离子体电导率的贡献。忽略尘埃等离子体的内部扰动所引起的电荷密度变化。在电场扰动产生的影响中，与电子相比，离子的电流贡献可忽略不计。假定尘埃粒子的大小和电量均相同， N_d 是尘埃粒子的浓度， r_d 是尘埃粒子半径，考虑到尘埃粒子有较大的惯性，忽略尘埃粒子在高频电场作用下的运动。

（2.1）求出在电场 E 作用下的电子充电电流，已知电子对尘埃粒子的充电截面为 σ_e 。

(2.2) 由充电平衡条件以及尘埃等离子体的准中性条件, 假设电子温度与离子温度相同, 电子与尘埃粒子的碰撞截面为一个只与尘埃粒子半径有关的定值, 离子与尘埃粒子的碰撞截面为 $\pi r_d^2 \left(1 - \frac{e\phi_0}{T_i}\right)$, ϕ_0 为平衡态尘埃的电势, T_i 为离子温度。尘埃粒子可以视为球型导体, Z 是未受电场扰动时尘埃粒子的电荷数, $|I_{e0}|$ 是带电粒子处于充电平衡时的电子电流大小, 求出尘埃粒子的充电频率 ν_{ch} , 即无电场微扰下单位时间放电量与带电量的比值。已知尘埃粒子满足充电方程 $\frac{\partial q}{\partial t} = I_e + I_i$, I_e 和 I_i 分别为电子电流和离子电流, q 为尘埃粒子电荷量, 当无外电场时, 充电方程可化简为 $\frac{\partial q}{\partial t} + \nu_{ch} q = 0$, 答案中不要含有 ϕ_0, T_i 。

(2.3) 我们假设 $\sigma_e = \pi r_d^2$, 电磁波波数为 k , 同时考虑碰撞和充电时, 求出弱电离尘埃等离子体的复电导率, 本问答案无需代入 ν_{ch} 表达式。

(3) 求电磁波在弱电离尘埃等离子体传播过程中, 波数 k 满足的方程, 本问答案无需代入 ν_{ch} 表达式。

二、(30分)

本题将探讨匀强电场下介质球壳的极化, 并计算极限情况下的近似。

(1) 作为引入, 在本问中考虑理想的导体情况。如图2.1所示, 在电场强度为 \vec{E}_0 的均匀外场中放置一理想导体球壳, 内径为 R_1 , 外径为 R_2 ($R_2 > R_1$)。试求空间中的电场强度分布 $\vec{E}(r, \theta)$, 规定极坐标系中 $\theta = 0$ 的方向为外电场方向, r 为空间中一点与球心的距离。

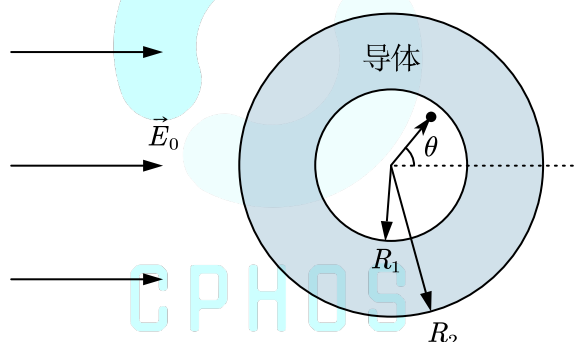


图2.1 理想导体球壳在均匀外场中

(2) 在电场强度为 \vec{E}_0 的均匀外场中放置一均匀各向同性线性电介质球壳, 相对介电常数为 ϵ_r 。若该球壳的厚度远小于半径 (如图2.2), 求出空心球腔内部的电场强度分布 \vec{E}'_{in} ; 若该球壳内径为0 (如图3.3, 即为实心球体), 求出介质内部的电场强度分布 \vec{E}''_{in} 。(答案仅用 \vec{E}_0, ϵ_r 表示)

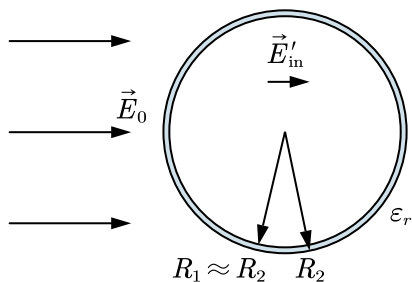


图2.2 薄介质球壳情况示意图

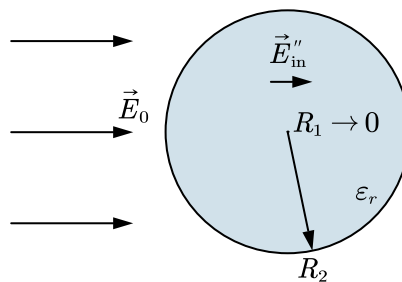


图2.3 实心介质球情况示意图

(3) 接(2)问, 注意到薄介质球壳情况和导体球壳情况下得到的答案有所矛盾, 本问希望建立更为复杂的模型来进行分析。若介质球壳的内径为 R_1 , 外径为 R_2 ($R_2 > R_1$), 相对介电

常数为 ϵ_r ，试求球腔内部（即 $r < R_1$ 处）的电场强度分布 \vec{E}_{in} 。

（4）接（3）问，我们知道理想导体等价于相对介电常数 $\epsilon_r \rightarrow +\infty$ 时的极限。分别计算当 $R_1 \rightarrow R_2$ 和 $\epsilon_r \rightarrow +\infty$ 的极限下球腔内部的电场分布 \vec{E}_{in} ，验证（1）（2）问中答案的正确性，并解释前文中提到的当 $R_1 \rightarrow R_2$ ， $\epsilon_0 \rightarrow +\infty$ 同时趋近极限时的“矛盾”现象。

三、（50分）下落粘性液柱的形状

日常生活中有个现象，在重力作用下自由下落形成的稳定液柱，越往下液柱越细，如示意图3.1所示。本题通过建模来定量得出液柱的半径随下落高度的变化关系。

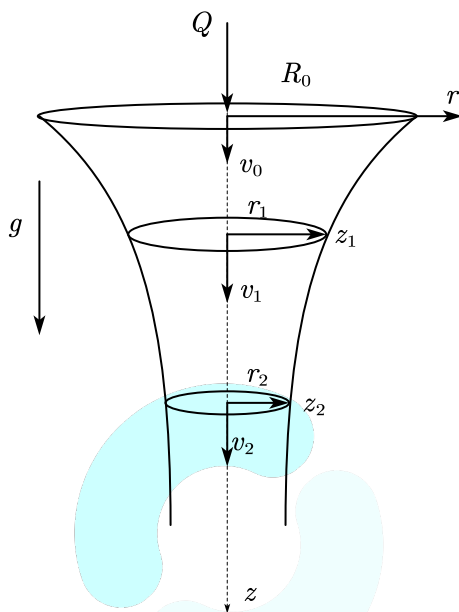


图3.1 重力下自由下落的稳定液面

（1）首先需要找能用上的方程，例如，无粘性流体中的流速、压强和高度的伯努利方程是从能量的角度得到的。那么本题考虑粘性流体，粘滞系数为 η ，表面张力系数为 γ ，已知这种情况下的伯努利方程可以写为

$$p + \frac{\alpha}{2} \rho v^2 - \rho g z + \gamma \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right) + w_{\text{loss}} = \text{Const}$$

其中是 V 液体体积， A 是液体表面积。 α 是与横截面上流速分布有关的常数，例如若横截面上流速均匀， $\alpha = 1$ ，若横截面上流速为抛物线分布（例如泊肃叶定律中所描述的圆管中流动的粘性流体）， $\alpha = 2$ ，本题结果表达式中就用 α 表示即可。第四项和第五项分别是考虑到表面能和粘滞损耗。实际上下落的粘性液柱在截面上的速度分布为从表面极薄的一部分作抛物线分布急剧过渡到内部绝大部分均匀分布，在本题中若无特别说明，均考虑任意截面速度均匀，设某处液柱半径为 r 。

（1.1）取一段微元可以认为液柱形状为圆柱，给出 $\gamma \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)$ 的表达式（此处 $\left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)$ 定义为 $\left(\frac{\partial A}{\partial V} \right) = \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)_z / \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_z + \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_r / \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_r$ ）。

（1.2）考虑泊肃叶定律所研究的情形来给出粘滞损耗项的表达式，泊肃叶定律所研究的情形下，认为压强梯度 $\frac{dp}{dz}$ 为常数，流体的速度只沿 z 方向，流速随半径的分布为抛物线关系，最外侧流速为零，用截面平均速度 v 来表征流动特征量，可以求出 w_{loss} 正比于 v ，但由于实际流速分布情形为题干中所描述的那样，所以在所求结果上需再乘修正因子 δ 。据此给出 w_{loss} 的

表达式。(w_{loss}为损耗的能量的绝对值)

(2) 利用(1)问中得到的伯努利方程得到一个关于流速、下落高度和半径的微分方程。已知 v 和 r 的变化都很缓慢,保留到各个效应的最低阶影响。

提示:可以认为各个高度处的压强相等。

(3) 定义无量纲数——Froude 数、Weber 数、Reynolds 数如下

$$Fr = \frac{v_0^2}{2R_0g}, We = \frac{2R_0\rho v_0^2}{\gamma}, Re = \frac{2R_0\rho v_0}{\eta}$$

利用以上无量纲数以及连续性方程,令约化参量 $\tilde{v} = \frac{v}{v_0}, \tilde{z} = \frac{z}{R_0}, \tilde{r} = \frac{r}{R_0}$,下标0的参量为初始参量,给出化简后的关于约化流速和约化下落高度的微分方程。(从此问以下均考虑的是约化参量)

(4) 给出在无穷远处的流速 \tilde{v}_∞ 和半径 \tilde{r}_∞ 的渐进表达式。

(5) 按照第(3)问的思路,给出关于液柱半径和下落高度的微分方程,并积分得到结果(结果中可用 \tilde{r}_∞ 化简表达式)。

(6) 若重力因素比粘性因素影响大得多,即 $\frac{Re}{Fr} \gg 32\delta$,给出(5)问积分之后结果的展开表达式。

(7) 在(6)的基础上,若重力因素的影响也远远大于表面因素的,即 $\frac{We}{Fr} \gg 1$,给出最终的表达式。

四、(40 分) 相变传热

一个半无限长的柱形容器,截面积为 S ,左端位于 $x = 0$ 处且温度固定为 T_1 , x 轴沿容器方向延伸。在 $t = 0$ 时刻,使容器中充满纯冰,冰的温度恰好为冰的熔点 T_0 ,且 $T_1 > T_0$ 。已知水的傅里叶热传导系数为 κ ,密度为 ρ ,比热容为 c ,单位质量相变潜热为 h 。假设水中的温度分布只与 x 和 t 有关,且容器完全绝热。设 t 时刻冰和水的分界线位于 $s(t)$ 处。



图4.1 半无限长容器中冰的熔化

(1) 考虑简化近似,假设水的比热容 c 很小,以至于水中的温度分布在任意时刻都可以看作是关于 x 线性分布的,求 $s(t)$ 的表达式。

(2) 一般情况下水中的温度分布并不能看作是线性的,接下来我们进行具体的研究。

(2.1) 已知水中的温度分布 $T(x, t)$ 满足热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

试求出 a 的值,并写出 $x = 0$ 处和 $x = s(t)$ 处 T 的值作为边界条件。

(2.2) 列出 $\frac{ds}{dt}$ 满足的表达式,用已知参量和 $T(x, t)$ 在 $s(t)$ 处的导数表示。

(2.3) 已知热传导方程的一种解可能为

$$T(x, t) = A + B \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

其中 A 和 B 为待定系数。注意到误差函数中宗量的形式,不妨假设 $s(t)$ 与(1)中具有相似的形式,即 $s(t) = 2\lambda\sqrt{at}$ 。代入边界条件,求出 A 和 B 的表达式,用已知参量和 λ 表示。

(2.4) 求出 λ 所满足的方程, 用 $f(\lambda) = C$ 的形式表示; 并证明在比热容 c 很小时 $s(t)$ 和(1)中求得的相同。

数学提示: 误差函数 $\text{erf}(x)$ 定义为

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

五、(40分) 玻尔-索莫菲模型

我们知道, 为了解释实验上得到的氢原子光谱的里德伯公式:

$$\lambda(n_1, n_2)^{-1} = R \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad (1)$$

(其中 R 为里德伯常数), 玻尔提出了三个基本假设:

- ① 定态假设: 氢原子的核外电子在库仑引力场的作用下, 绕原子核在若干确定的轨道上做匀速圆周运动, 轨道所有参数由量子数 n 表征, E_n 为量子数为 n 的轨道能量;
- ② 跃迁假设: 电子在不同定态轨道之间跃迁时发出光子的频率满足:

$$h\nu(n_1 \rightarrow n_2) = E_{n_1} - E_{n_2} \quad (2)$$

- ③ 角动量量子化条件: 所有定态轨道的角动量为定值:

$$L_n = n\hbar \quad (3)$$

在量子力学以后的发展中, 人们意识到角动量量子化条件可以用更基本的**对应原理**导出。

对应原理: 对于任意量子力学系统, 当量子数 $n \rightarrow \infty$ 时, 量子化的能级将趋于经典的连续能量。在氢原子的情境下, 当量子数 $n \rightarrow \infty$ 时, 电子在相邻能级间跃迁发出的光子频率等于电子做匀速圆周运动的频率。

(1) 考虑氢原子核外电子, 设电子质量为 m , 带电量为 $-e$, 在库仑引力场的作用下, 绕原子核作圆周运动(不考虑原子核的运动)。请从对应原理出发, 利用里德伯公式和玻尔的前两个假设, 推证电子轨道角动量的量子化条件 $L_n = n\hbar$ 。

(2) 索莫菲在他所提出的理论中完成了三項工作:

- ① 保留玻尔第一、二个假定, 将圆形轨道推广为椭圆轨道, 并且轨道参数由 (n_r, n_θ) 两个量子数决定;
- ② 两个量子化条件, 对电子单个运动周期积分得:

$$\oint p_r dr = n_r h, \oint p_\theta d\theta = n_\theta h \quad (n_r, n_\theta \in N, n_\theta \neq 0) \quad (4)$$

其中 p_r 分别为电子动量的径向分量, p_θ 为电子的角动量;

(2.1) 依据索莫菲前两个推广假定, 从**牛顿力学**的角度, 推导椭圆轨道半长轴 $a(n_r, n_\theta)$ 、半短轴 $b(n_r, n_\theta)$ 、离心率 $\epsilon(n_r, n_\theta)$ 、能级 $E(n_r, n_\theta)$ 的表达式以及能级简并度 $g(n_r, n_\theta)$ 。

- ③ 引入狭义相对论修正: 氢原子核外电子能级可表示为:

$$E = c \sqrt{p_r^2 + p_\theta^2/r^2 + m^2 c^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - mc^2 \quad (5)$$

其中 m 表示电子静质量。

(2.2) 对于**类氢原子**, 假设电子绕氢原子核在一个平面上作椭圆运动, 设电子静止质量为 m , 带电量为 $-e$, 原子核带电量为 Ze , 请在考虑相对论修正的情况下推导能级 $E(n_r, n_\theta)$ 的表达式。(答案表达式中可含有精细结构常数 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$)

可能用到的积分公式:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\epsilon^2 \sin^2 \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} d\theta = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} - 1 \right) \quad (6)$$

六、(60 分) 折断丛雨丸

在知名视觉小说《千恋*万花》中，男主有地将臣折断了镶嵌在石头中的丛雨丸并因此卷入到一系列事件中。在本题中，我们将探究折断丛雨丸的原理。



图6.1 男主折断丛雨丸及其示意图

作为合理的近似，我们将丛雨丸视作一块厚度为 b ，宽度为 d 的薄板 ($b \ll d$)。断裂力学的研究表明金属的断裂一般是由于较小的裂纹扩大而成，裂纹任意处的宽度都远小于薄板的厚度。忽视重力的影响。

(1) 我们首先通过粗糙的方式对折断丛雨丸所需的力进行估算。丛雨丸材料的表面能为 γ ，若在折断时裂口处裂纹宽度为 a ，男主施力位置与裂纹距离为 l ，计算至少所需施力大小 F 。

下面我们将细致的分析裂纹处的应力，对于弹性体内一个三维体积元，其受压力 σ 和剪切力 τ ，在图 2 中细致展示了各分量对应的应力。在无体力的情况下应力平衡方程为：

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = 0$$

而材料应变 ε 与应力之间的本构关系为：

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \end{cases}, \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{\tau_{ij}}{2G}$$

其中 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ， E 为杨氏模量， G 为切变模量， ν 为泊松

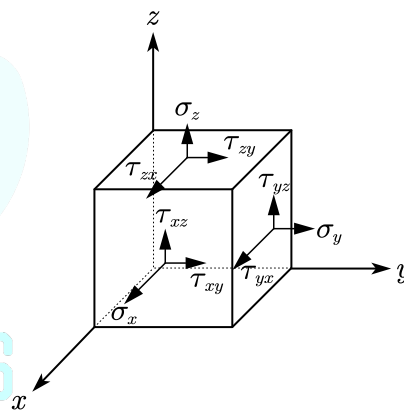


图6.2 应力方向示意图

比。

(2) 我们可以认为在垂直板面方向(z 轴朝向)上对板的应变为 0 ，也即 $\varepsilon_z = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$ ，此时该问题被简化为二维问题。

(2.1) 已知二维情况下应变与 x, y 方向上几何位移 U, V 之间满足几何关系：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

试根据几何关系给出 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ 之间满足的偏微分方程，这被称作相容关系。

(2.2) 原则上该问题只需要求解上述偏微分方程组，但我们可以引入一个函数 $\phi(x, y)$ 来简化求解。取 $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ ，试给出 ϕ 满足的方程，并将 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 用 ϕ 表示出来。

(3) 现在我们考察裂缝附近处的应力场，在裂缝附近以图 3 方式建立坐标系并认为板子无穷大，裂缝极其细小以至于可以忽视夹角大小。在裂缝边缘处角向应力和剪切应力显然为

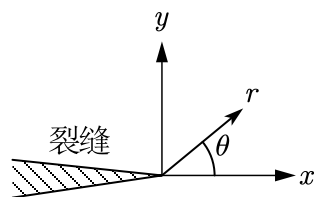


图6.3 裂缝处坐标系

0。在该边界条件下，可以采用分离变量法求解 ϕ ，令 $\phi = r^{1+\lambda}F_\lambda(\theta)$ 。试求解裂缝处的奇性应力函数 ϕ （当 $r \rightarrow 0$ 时应力大小发散）的表达式，可以包含常量。

提示：在极坐标下 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 为

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

（4）根据（3）问的结果明显可以发现其包含了两种应力场的叠加，这两种应力场对应的位移场示意图绘制在图4中，下面我们仅讨论I型裂缝。在裂缝尖端附近材料将会发生塑性形变，不再满足此前计算的应力分布，而根据 Mises 屈服准则我们可以估计尖端附近塑性区的尺寸和形状。Mises 屈服准则即当主应力分别为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 时（即在合适的坐标架下剪切应力为0时），发生塑性形变的区域满足：

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \geq 2\sigma_e^2$$

其中 σ_e 为常量，试给出塑性形变区的边界方程 $r_p(\theta)$ 并绘制 $\nu = 0.3$ 时的示意图。

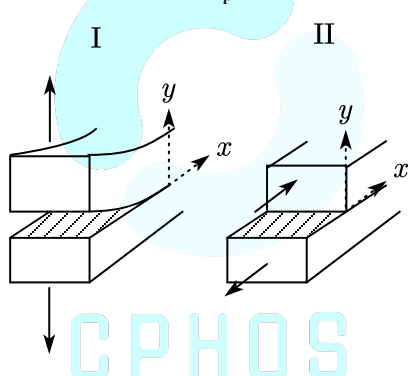


图6.4 裂缝处的两种位移场

提示：极坐标与直角坐标系之间应力变换为

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

七、（60分）双折射

本题旨在用两种方法推导各向异性介质内的折射定律。如图，一束入射角为 i 的平行光从真空入射到一块单轴晶体，设电矢量为 p 方向，其振幅为 A_p ，反射光、折射光振幅分别为 A_p^r, A_p^t ，晶体光轴在入射面内，和真空-晶体界面夹角为 β ，射线方向和光轴夹角为 ξ 。晶体参数为：偏振沿光轴方向（ e 光）的折射率为 n_e ，偏振垂直光轴方向（ o 光）的折射率为 n_o 。我们试图利用几何光学和电磁理论求出折射角。

（1）从普通折射定律获得的启示：

考虑将真空-晶体界面换为介质1-介质2界面，设折射角为 γ ，认为 i, γ 相互独立，其中两个介质均各向同性，电容率为 $\epsilon_1 = \epsilon_0 n_1^2, \epsilon_2 = \epsilon_0 n_2^2$ 。写出两个电磁场边界条件及其数学表达式（用 $A_p, A_p^r, A_p^t, \mu_0, \epsilon_1, \epsilon_2, i, \gamma$ 表示）；并利用两个边界条件，独立地得到折射定律（ $i - \gamma$ 关系）。

（2）惠更斯作图法（如图7.1）：以光轴为 y 轴正方向建立直角坐标系。 e 光波面为旋转椭球面， O, A 为入射点。仅考虑 e 光的折射， O 点发出椭圆波面 Δt 的时间先于 A ，椭圆波面长短轴

分别为 $v_e \Delta t, v_o \Delta t$ ($v_e = \frac{c}{n_e}, v_o = \frac{c}{n_o}$), 过 A 做切面 AP 即为波法面, 切点 P 为射线端点。射线角 ξ 、法线角 θ (如图 \hat{n}, y 轴正方向之间的夹角), 以及各个重要的波矢量均被标在图中。

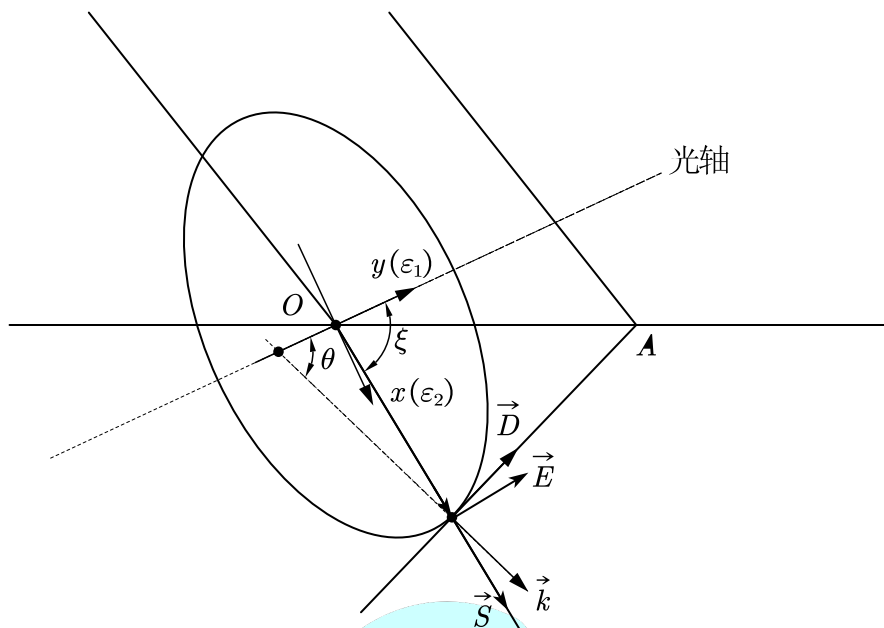


图7.1 惠更斯作图法示意图

(2.1) 求射线角 ξ , 法线角 θ 之间的关系 (用 n_e, n_o 表示)。

(2.2) 利用图 (1) 几何关系与解析几何知识, 证明法线角 θ 由下式给出:

$$\tan \theta = n_e^2 \frac{\sin \beta \cos \beta + \sqrt{\left(\frac{\sin i \cos \beta}{n_e}\right)^2 + \left(\frac{\sin i \sin \beta}{n_o}\right)^2 - \left(\frac{\sin^2 i}{n_o n_e}\right)^2}}{\sin^2 i - n_e^2 \sin^2 \beta} \quad (1)$$

(3) e 光折射的电磁理论

受到 (1.3) 启发, 我们试图通过电磁场边界条件来导出 (1) 式, 介质中的麦克斯韦方程组为:

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2)$$

电磁波的振幅时谐变化, 因此各个量均可以表示为平面波复振幅的形式:

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{V}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (3)$$

\hat{k} 即为波法线方向, 射线方向为 $\hat{S}/\hat{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ 。在介质 2 中, xOy 坐标系下本构关系:

$$D_x = \varepsilon_2 E_x = \varepsilon_0 n_o^2 E_x, \quad D_y = \varepsilon_1 E_y = \varepsilon_0 n_e^2 E_y, \quad D_z = \varepsilon_2 E_z = \varepsilon_0 n_o^2 E_z \quad (4)$$

(3.1) 求证下列关系:

$$\textcircled{1} (\hat{k} \cdot \vec{E}) \hat{k} - \vec{E} = -\mu_0 \frac{\omega^2}{k^2} \vec{D}$$

$$\textcircled{2} \vec{B} \text{ 垂直于 } \vec{E}, \vec{D}, \vec{k}, \vec{S} \text{ 所共的平面。}$$

(提示: 矢量分析公式 $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$)

(3.2) 利用 (3.1) 中关系 $\textcircled{1}$ 和 xOy 坐标系下本构关系, 求出波法面速度 $v_n = \frac{\omega}{k}$, 要求给出完整的推导过程 (用 θ, v_e, v_o 表示)。

(3.3) 折射光同样为 p 偏振的, 因此我们可以写出真空-晶体界面法向电位移连续和切向磁场强度连续的两个电磁场边界条件 (可以用 $A_p, A_p^r, A_p^t, i, \xi, \beta, \varepsilon_2, \varepsilon_1, v_n, \mu_0$ 表达)。

(3.4) 用 (1.3) 问类似的方法处理 (3.3) 问结果来计算 $\tan \theta$ ，证明可以得到和 (2.2) 问相同的结果。



版权信息

命题人

常皓凌 付亦轩 金政阳 林家卫 王浩冉 吴恒旭 赵宇阳

审题人

常皓凌 付亦轩 金政阳 林家卫 王浩冉 吴恒旭 赵宇阳 李贝尔

联系方式



微信公众号
CPHOS



官方网站
www.cphos.cn



CPHOS 论坛

邮箱

service@cphos.cn

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考