

第 27 届 CPHOS 物理竞赛联考（复赛模拟赛）

理论试题

本试题于 2025 年 9 月 5 日 08:00 发布，最后更新于 2025 年 9 月 5 日 13:09。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

答题卡上传

2025/9/5 16:00 - 2025/9/9 10:00

阅卷

2025/9/10 12:00 - 2025/9/14 18:00

非正式成绩

2025/9/14 20:00

成绩申诉

2025/9/14 20:00 - 2025/9/15 18:00

正式成绩

2025/9/15 22:00

考生须知

1. 理论试题共 **8** 页，理论答题卡共 **7** 页，答题时间 **180** 分钟，试题满分 **320** 分。
2. 请在答题卡的指定答题区域内答题，试题和草稿纸上的内容将不会作为评分参考，不可申请答题卡加页。
3. 若发现试题存在问题，请向领队（教练）反映，由其转达至相关微信群聊。
4. 试题答案及相关分析均会在官方网站 www.cphos.cn 上发布。
5. 本次考试定位难度为高于复赛、略低于决赛。

一、（40 分）太阳物理初步

太阳与我们的生活息息相关，本题将逐步深入来研究太阳的一些基本物理性质，由于太阳非常复杂所以在很多地方我们将做一些非常粗糙的近似，不过这不会影响我们最终结果的正确性。本题中可能会用到的一些物理常数有，日地距离 $r_{es} = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ ，太阳半径 $R_s = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$ ，万有引力常数 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ，太阳光度即太阳单位时间对外辐射的能量 $L_s = 3.90 \times 10^{26} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$ ，地球绕太阳的公转周期 $t = 365 \text{ d}$ ，斯特藩常数 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ ，韦恩位移常数 $b = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ ，玻尔半径 $r_1 = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ 。

（1）利用题目给出的物理常数计算太阳的质量 M_s ，平均密度 $\bar{\rho}_s$ 以及太阳的表面温度 T_s 。同时作为一种近似（尽管事实并非如此），假定太阳的密度处处相同并且为上一小问得到的平均密度 $\bar{\rho}_s$ ，同时由于太阳整体没有明显的膨胀和收缩现象，因此可以使用流体静力学方程来处理，据此给出太阳内部的压强分布 $P(r)$ 。

（2）在本问中我们不再认为太阳是一个密度均匀的球体，并将考虑太阳内部的一些物理性质。

（2.1）作为一种近似模型，我们假定太阳内部元素只有氢原子（未电离），并且氢原子按照立方体晶格的形式进行排列，每个氢原子排列在边长为 $2r_1$ （ r_1 是题目中给出的玻尔半径）的立方体的一个顶点上，见图 1.1，据此求出太阳内部的平均密度 $\bar{\rho}_s'$ 并将其与（1.1）中求出的平均密度进行比较。

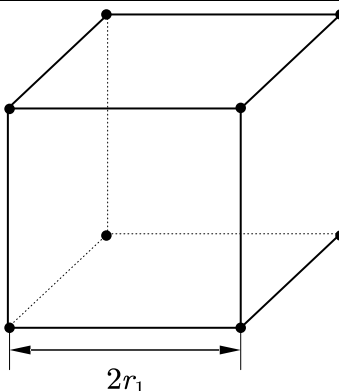


图1.1

(2.2) 上一小问中我们假设太阳内部的氢原子并未电离，本小问中我们将通过估算来判断这一假设是否合理。假定太阳内部的实际温度为 $T_{sc} = 1.5 \times 10^7 \text{ K}$ ，如果认为氢原子的原子核与电子之间的相互作用的强度可以通过一种“等效压强” P_{eff} 来表示的话（“等效压强”即氢原子核与电子的库仑力均匀分布在玻尔半径大小的球面上的平均压强），给出这一“等效压强”的表达式和数值并与太阳中心压强 P_{sc} 进行比较，由此判断上一问中太阳内部氢原子不会电离的假设是否正确。（提示：计算太阳内部压强时可以利用 $P = nkT$ 来进行估算， n 可从上一小问的 $\bar{\rho}_s'$ 中求出）

(2.3) 根据上一问的结果我们已经知道太阳内部实际上是非常炽热的等离子体，这种等离子体内部的电磁场强在理论上能够进行估计，不过为了简便，在本小问中我们进行一个非常非常粗略的近似，假设太阳内部的场强大小为 $E = 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, $B = 1 \text{ T}$ ，并且同时假定这种等离子体的热运动和光子气体的热运动类似，由此算出太阳内部的电磁场能量密度 ϵ_{eb} 以及热运动能量密度 ϵ_T ，并由此解释为什么太阳内部的等离子体可以近似视为理想气体。

(3) 在本问中我们将考虑太阳内部的辐射转移过程。

(3.1) 太阳内部的光子向外传播时并非是直线传播，而是类似于三维的无规行走，参考图 2.2，这主要是由于光子会和太阳内部的等离子体频繁的发生相互作用。作为一种简化模型，我们认为光子在太阳内部无规行走的平均步长也就是平均自由程为 $l = 0.5 \text{ cm}$ ，并且这个步长不会随光子不断向外传播而改变，据此求出光子从太阳中心传播到太阳表面所需要走的步数 N 。

(3.2) 我们在前面的问题中已经知道太阳内部的温度 T_{sc} 和太阳表面的温度 T_s 之间差别很大，这代表光子从内部向外传播的过程中波长会明显变长，其中一种物理机制是康普顿散射。康普顿散射的一个重要特点是波长改变量与原来的光子波长无关，我们假定光子向外传播时每一步都会发生康普顿散射，并且散射后波长的改变量都为 λ_{ce} （由于电子的康普顿波长远长于质子，因此我们忽略质子的康普顿散射），由此计算光子从内部传播到表面时的波长改变量 $\Delta\lambda_{\text{cpt}}$ ，将这个计算结果与光子实际的波长改变量 $\Delta\lambda_{\text{tot}}$ 进行比较，由此说明康普顿散射主要发生在内部很小的区域内。

(3.3) 虽然我们在题干中就已经给出了太阳的光度 L_s ，但实际上我们可以通过上面的无规行走模型来估算太阳的光度值。考虑到在光子无规行走走到表面的时间内，一部分太阳物质对外辐射的能量为光子气体的内能，假定太阳的平均温度为 $T_{\text{mean}} = 2.8 \times 10^6 \text{ K}$ ，请给出这一光度值 L_s' 并与太阳实际的光度值 L_s 进行比较。

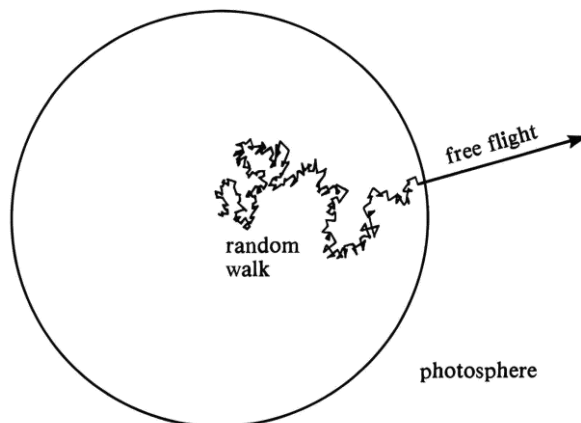


图2.2

二、(50 分) 汽车防抱死系统 (ABS)

汽车防抱死系统 (简称 ABS) 用于紧急刹车时使车轮保持一定的旋转, 由此避免出现打滑现象 (车轮打滑时无法控制方向, 容易发生前轮失控或后轮侧漂现象)。一般的 ABS 工作方式是: 先急刹刹车, 当电子系统检测到车轮即将打滑时, 逐渐放松制动泵, 使车轮轮轴处的制动力矩减小, 经过一段时间后, 车轮远离了即将打滑, 就再加大制动力矩……周而复始, 将车轮控制在即将打滑但又没有的临界点附近。该周期频率很高, 每秒可达数十次。

(1) 考虑简化模型, 汽车有四个车轮, 每个车轮上支持力大小均相等, 不考虑减速造成的支持力变化。汽车总质量为 M , 车轮转动惯量为 I , 半径为 R , 路面摩擦因数为 μ 。制动力矩的时间变化率为 $\frac{d\tau}{dt} = \pm k$ (正负号取决于是否放松还是收紧制动泵), 每次放松制动泵的持续时间为 t_0 。求 ABS 允许的最大制动力矩 τ_m 。

(2) 接上问, 当驾驶员踩死刹车板时, ABS 启动, 制动力矩从 0 开始均匀增加到 τ_m , 而后进入制动力矩减小—增大循环。设汽车初速度为 v_0 , 其比较大以至于 ABS 能至少工作若干周期。

(2.1) 求制动力矩的减小-增大循环中汽车的平均加速度大小;

(2.2) 当 $t_0 \rightarrow 0$ 时, 求刹车距离。

(3) 实际上车轮并非完全纯滚, 引入一个衡量滚动速度和平动速度的比值的量: 滑移率, 定义为 $\eta = 1 - \frac{\omega R}{v_c}$, 比如纯滚 $\eta = 0$, 不滚只滑 $\eta = 100\%$ 。本问中仍然设摩擦因数 (包括滑动和滚动) 为 μ , ABS 实际上会将滑移率控制在特定的非零值 η 附近, 当实际的滑移率低于 η 时制动力矩增大, 高于 η 时则减小, 进入制动力矩减小—增大循环。为了能够更严格地控制实际滑移率, 在滑移率第一次超过 η 后制动力矩的时间变化率瞬间增加至 $\pm k'$, 而后一直保持为 $\pm k'$ 不变 (在此之前时间变化率仍为 $\pm k$, $k < k'$)。现在仍然考虑汽车以速度 v_0 匀速行驶时驾驶员突然踩死刹车板启动 ABS, 同样设 ABS 能至少工作若干周期, 求制动力矩时间变化率变为 $\pm k'$ 之后新的制动力矩减小—增大循环的频率。(设 η 不是很接近于 1 和 0 并且 k' 足够大, 使得虽然滑移率在设定的 η 上下小幅变化, 实际瞬时滑移率 η_r 仍然满足 $0 < \eta_r < 1$)

三、(50 分) 带电粒子穿过介质的能量损失

非相对论的贝特公式由汉斯·贝特在 1930 年发现, 该公式描述了重带电粒子 (质子, α 粒子, 离子) 穿越介质单位距离时的平均能损, 即材料的阻止本领。本题将通过对带电粒子的场进行谱分解, 计算介质产生的电场对粒子的阻力。

考虑一个带电量为 Ze 的粒子以匀速 \vec{v} 穿过介质，在非相对论情形下，电势满足泊松方程：

$$\varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \nabla^2 \varphi = -Ze \delta(\vec{r} - \vec{v}t) \quad (1)$$

其中介质的相对介电常数 ε 是算符，在频域下 $\hat{\varepsilon} = \varepsilon(\omega)$ 。 $\varepsilon(\omega)$ 的虚部为奇函数，且一般不为 0，表示介质带来的能量损失。

(1) 电势可以分解为一系列平面波的叠加：

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \varphi_{\vec{k}}(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3\vec{k} \quad (2)$$

这一展开可以使我们将问题转到频域中分析。在频域中，对于波矢 \vec{k} 对应的平面波模式，拉普拉斯算子 ∇^2 的作用相当于对此模式乘一个 k^2 。

(1.1) 代入泊松方程，计算 $\varphi_{\vec{k}}(t)$ 。

(1.2) 计算介质产生的电场对带电粒子的作用力，写成关于 \vec{k} 积分的形式。

(2) 取 \vec{v} 的方向为 z 轴，做变量代换：

$$\omega = k_z v, \quad q = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (3)$$

注意到如果 q 的上限取 $+\infty$ 的话 (1.2) 中的积分式会发散。考虑量子效应截断：波矢为 \vec{k} 的平面波传递给介质内电子的动量是 $\hbar\vec{k}$ ，而在半经典模型下这个值也可以视为入射粒子通过碰撞传递给电子的动量。当入射粒子速率远大于电子运动速度时：

$$\hbar k_{\max} = 2mv \quad (4)$$

其中 m 为电子质量。

(2.1) 计算阻力大小，写成关于 ω 积分的形式。

(2.2) 在高频区域

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{ne^2}{m\varepsilon_0\omega^2} \quad (5)$$

其中 n 为介质中电子数密度。证明贝特公式具有如下形式：

$$F = \frac{4\pi n Z^2}{mv^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \ln \frac{2mv^2}{\hbar\bar{\omega}} \quad (6)$$

并求出介质平均电离能 $\hbar\bar{\omega}$ ，使用含 $\varepsilon(\omega)$ 的积分式表示。

提示：只有 ε 的虚部对阻力有贡献。考虑到 $\omega/\varepsilon(\omega)$ 在上半平面无极点，

$$\int_0^{+\infty} -\omega \cdot \text{Im} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} \right] d\omega = -\frac{i}{2} \int_{\sigma} \frac{\omega}{\varepsilon(\omega)} d\omega = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \quad (7)$$

其中 σ 为上半平面无限大半圆的逆时针路径。

四、(50 分) 不会下沉的圆盘 (Unsinkable Disk)

当我们用一垂直于水面的快速水流冲击一置于水面上的圆盘时，有时会出现如下图所示的圆盘浮于水面上的“反常”情况。本题尝试对此现象进行解释。

(1) 考虑如下图所示的水流冲击圆盘的简化模型，假设在接触圆盘前一刻水柱的半径为 r 。水在接触圆盘的一瞬间速度便突变为朝径向方向，大小变为接触前一刻速度的 k ($0 < k < 1$) 倍，此后水在圆盘上表面形成一层厚度近似不变的薄水膜，其速度处处沿径向。圆盘密度为 ρ ，半径为 R ($R \gg r$)，厚度为 d ，在水流冲击下，圆盘上表面会低于水平面，设两者垂直距离为 h ，且 $hr^2 \ll dR^2$ 。假设水无粘性且不可压缩，其密度为 ρ_w ($\rho_w < \rho$)，圆盘下方的水可视为静止，圆盘上方水膜的厚度很小。重力加速度为 g 。求出当圆盘可以保持在此处不下沉时，冲击圆盘的水流流量 Q （流量即单位时间通过截面的流体体积）。

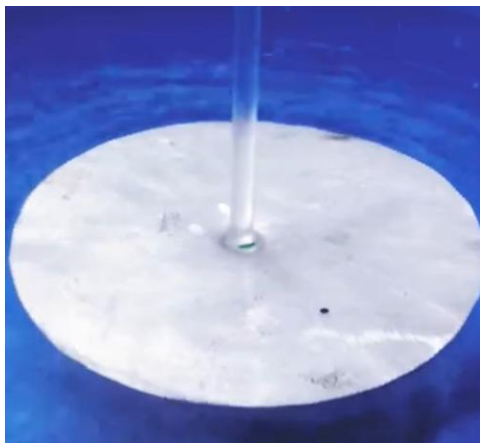


图4.1 不会下沉的圆盘实物图

(2) 接第(1)问, 当水柱中心与圆盘中心存在较小偏离时, 圆盘仍能浮于水面上, 但此时的圆盘会发生一定程度的倾斜。由于盘的倾斜, 此时水柱的速度具有平行于盘面的分量, 假设此时盘面水膜的速度为原先盘面水平时的速度加上一个上述的平行分量。约束圆盘中心没有水平方向上的运动, 求出当两个中心存在偏差 x ($x \ll R$) 时, 圆盘的倾斜角度 θ ($\theta \ll 1$)。

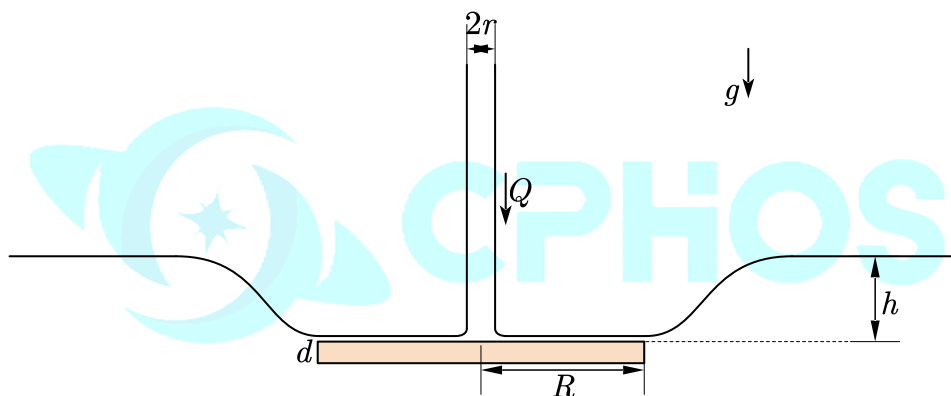


图4.2 水流冲击圆盘模型示意图

五、(40分) 磁荷量子化

关于磁单极子, 理论上有这么多漂亮的结果, 但它最大的问题就是, 直到今天, 实验上依然没有发现磁单极子的存在。因此我们讨论磁单极子的相关理论, 并得到磁荷量子化结论。

(1) 使用角动量守恒的方法推导, 考虑有一个电荷, 电荷量为 q , 在一个固定的点磁荷的磁场中运动, 产生的磁场为 $\vec{B} = \frac{g\hat{r}}{4\pi r^2}$, 计算正则角动量并得到守恒量, 类比 z 方向角动量守恒时

$L_z = \frac{1}{2}n\hbar, n \in \mathbb{Z}$, 进而得到磁荷的量子化条件。

(2) 利用电磁场的规范不变性, 尝试得出量子化条件:

(2.1) 磁荷产生的磁场为 $\vec{B} = \frac{g\hat{r}}{4\pi r^2}$, 以磁荷为原点, 建立球坐标系, 设极角为 θ , 尝试计算磁矢势。

数学提示: 极角为 θ 时的立体角为

$$\Omega = 2\pi \times (1 - \cos \theta)$$

(2.2) 我们发现, 我们得到的磁矢势在 $\theta = 0$ 处不发散, 但在 $\theta = \pi$ 处发散, 由对称性可知, 应该存在另一个磁矢势, 在 $\theta = \pi$ 处不发散, 但在 $\theta = 0$ 处发散。尝试求解这种势。由于 $\vec{A} \rightarrow$

$\vec{A} + \nabla\beta$, 磁场不发生变化, 且在变换下, 对波函数的相位影响为 $\psi \rightarrow e^{i\frac{q\beta}{\hbar}}\psi$, 根据这一点, 得到磁荷量子化的条件。

数学提示:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\theta}$$

六、(50 分) 驱动蛋白

驱动蛋白 (kinesin) 是细胞内部极其重要的“超级搬运工”, 它由两个球状马达和一双类似于人类下肢的瘦长杆状结构所组成, 将各种营养物质沿着长长的微管 (microtubule) 运送到细胞中的各个部件。如图6.1所示, 驱动蛋白与微管之间复杂的相互作用可以简化视为无限长的一维周期势场 $V(x)$, 势场的周期为 l , 峰值点和谷值点分别记作 A_i 和 B_i , 构成的势垒高度为 ΔE , 任一峰值点 A_i 到左侧和右侧谷值点距离分别为 $l\delta$ 和 $l(1-\delta)$, $0 < \delta < 1$ 。已知玻尔兹曼常数为 k_B , 系统的温度为 T 。忽略一切边缘效应。

由于 $\Delta E \gg k_B T$, 驱动蛋白大部分时间定居于谷值点 B_i 附近, 并在热涨落影响下以一定概率向近邻谷值点位置跃迁。这些跃迁在宏观上表现为驱动蛋白的定向移动。当驱动蛋白近邻两侧谷值点有空位时, 其向左侧和右侧空位自由跃迁的速率分别为 p 和 q , 且 $p < q$; 但是, 若任意一侧被另一驱动蛋白占据, 强烈的相互作用不仅会阻止驱动蛋白向该侧的跃迁, 也会同时改变向另一侧的跃迁速率。

提示: 跃迁速率被定义为单位时间跃迁的几率大小。根据玻尔兹曼统计:

$$\text{跃迁速率} \propto \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \quad (1)$$

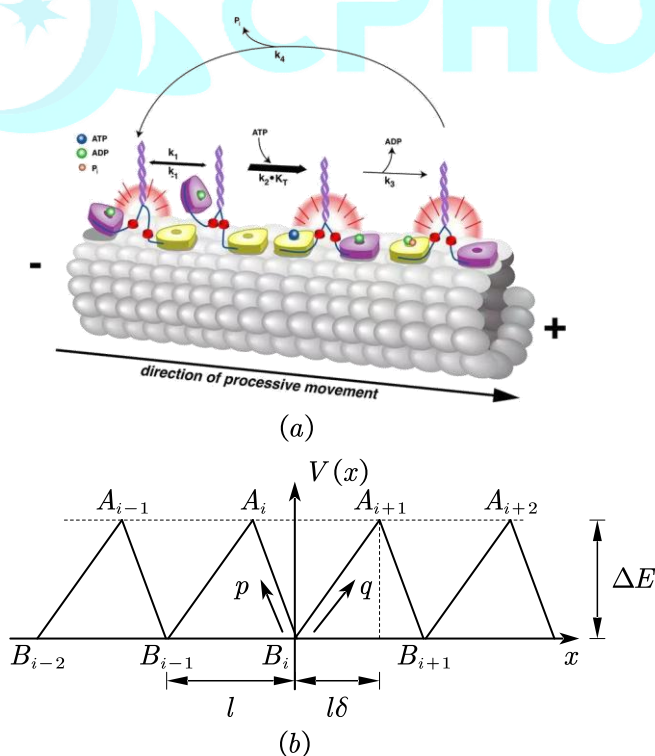


图6.1

(1) 现有恒定外力 $\vec{F} = F\hat{x}$ 施加到驱动蛋白上。在左侧和右侧均为空位的条件下, 试求此时驱动蛋白向左和向右跃迁的速率 p_1 和 q_1 , 用 p, q, l, δ, T, k_B 表示。

(2) 考虑系统仅有一个驱动蛋白的无相互作用情形。驱动蛋白受恒定外力 $\vec{F} = F\hat{x}$ 。

(2.1) 用 $P_i(t)$ 表示 t 时刻驱动蛋白在第 i 个谷值点 B_i 的概率, 求 $\frac{dP_i(t)}{dt}$ 满足的微分方程。

(2.2) 求驱动蛋白的宏观运动速度 $\vec{V}_{1M} = V_{1M}\hat{x}$, 并求使驱动蛋白静止所需的阻塞力 F_S^{1M} 。

(3) 考虑系统有两个驱动蛋白的情形, 两驱动蛋白间存在相互作用。如图6.2所示, 当两驱动蛋白不相邻时, 它们向左和向右的自由跃迁速率均为 p, q ; 当两驱动蛋白相邻时, 由于短程相互作用的影响, 处于左侧和右侧的驱动蛋白分别只能向左和向右跃迁, 自由跃迁速率变化为 u, v 。现将右侧驱动蛋白施加恒定外力 $\vec{F} = F\hat{x}$, 而左侧驱动蛋白保持自由。

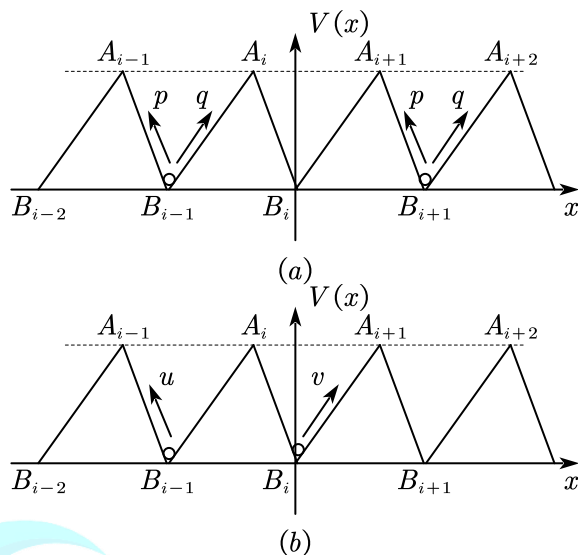


图6.2

(3.1) 用 $P_x^d(t)$ 表示 t 时刻两驱动蛋白间距为 xl 的概率, $x = 1, 2, \dots$ 。求系统处于稳态时 $P_{x=1}^d$ 的表达式, 并给出系统存在稳态的条件。

(3.2) 求此时右侧驱动蛋白的宏观运动速度 $\vec{V}_{2M} = V_{2M}\hat{x}$ 和阻塞力 F_S^{2M} 。基于所得结果, 判断以下说法是否正确:

(a) 由于相互作用影响, 阻塞力大小 $|F_S^{2M}| > |F_S^{1M}|$;

(b) 由于相互作用影响, 施加相同大小的力时, 稳态速度 $V_{2M} > V_{1M}$ 。

七、(40 分) 陆末-格尔克干涉仪 (Lummer-Gehrcke Interferometer)

陆末-格尔克干涉仪是一种专门用来研究光谱精细结构的干涉仪, 其主要光路图如下图7.1所示。此干涉仪主要由一块长的平行平面玻璃板或晶体石英板构成, 板的一端固定有一个棱镜 S 。光源发出的光束经棱镜 S 进入板内, 在出射后被透镜 L 收集, 在其焦平面上形成干涉图样。在所观察的范围内, 光线在板内的反射角度接近全反射临界角, 此时其反射率趋于 1。已知板的长度为 l 、高度为 h , 有 $l \gg h$, 平行板与棱镜的折射率均为 n , 其余空间中的折射率为 1, 光源的波长为 λ_0 并带有小的展宽, 棱镜的尺寸可以忽略。

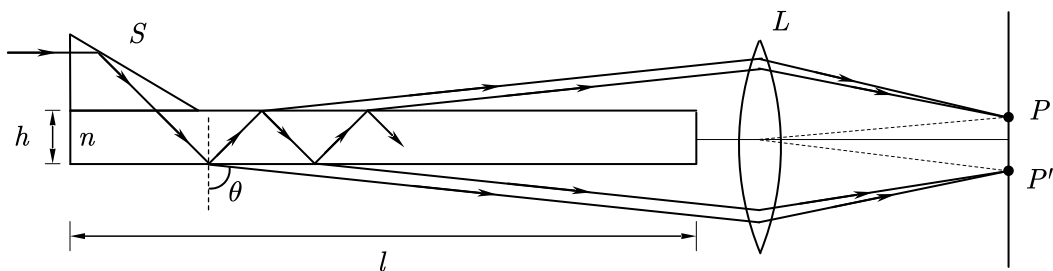


图7.1 陆末—格尔克干涉仪光路图

(1) 如图7.1所示, 考虑出射角度为 θ 的一束光线, 其汇聚于焦平面上的 P 、 P' 两点。设光线从空气入射至板时的振幅反射率、透射率为 r 、 t , 从板中出射至空气时的振幅反射率、透射率为 r' 、 t' , 有斯托克斯倒逆关系:

$$\begin{cases} r' = -r \\ r^2 + tt' = 1 \end{cases}$$

(1.1) 设从板的上侧、下侧出射的光束数量均为 p ($p \gg 1$), 相邻两束出射光之间的相位差为 δ , 请给出 p 、 δ 的表达式。请求出 P 、 P' 两点处光强的表达式, 用 p 、 δ 以及能量反射率 $R = r^2$ 表示, 其中可以包含自行选定的比例系数。当 θ 接近 90° 时, 认为 $p \rightarrow \infty$ 会带来较大的误差, 请解释其原因。

(1.2) 在透镜的焦平面上, 干涉主极大在何处取到? 此时干涉条纹的宽度、光强分布与 $p \rightarrow \infty$ 时的干涉条纹相比有什么区别?

(2) 一个干涉仪的分辨本领 $R.P.$ 被定义为:

$$R.P. = \frac{\text{光源的波长 } \lambda_0}{\text{可以分辨的最小波长 } \Delta\lambda}$$

而其可以分辨的最小波长 $\Delta\lambda$ 可以大致使用瑞利判据来判断: 当两组条纹之间的间距大于条纹的半峰宽度时, 可以认为这两组条纹是可分辨的。在这一小问中, 我们均在透镜 L 的焦点附近观察条纹, 并且无需考虑介质的色散。

(2.1) 设相位差为 $\delta = \delta_0 \pm \frac{\varepsilon}{2}$ 处为干涉条纹强度等于其峰值一半的位置, 请在 $p(1-R) \ll 1$ 、 $\varepsilon \ll 1$ 但 $p\varepsilon$ 为正常数量级的近似下求出 ε 。

(2.2) 请结合瑞利判据, 求出陆末-格尔克干涉仪的分辨本领 $R.P.$, 用 l, n, λ_0 表示。

版权信息

命题人

陈 炆 付亦轩 李贝尔 任泓锦 魏哲宇 余博文 张行健

审题人

陈 炆 付亦轩 李贝尔 任泓锦 魏哲宇 余博文 张行健

联系方式



微信公众号
CPHOS



官方网站
www.cphos.cn



CPHOS 论坛

邮箱

service@cphos.cn

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考