

第 27 届 CPHOS 物理竞赛联考（复赛模拟赛）

理论试题参考答案及评分标准

本文件于 2025 年 9 月 9 日 12:00 发布，最后更新于 2025 年 9 月 5 日 12:55。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

一、（40 分）太阳物理初步

太阳与我们的生活息息相关，本题将逐步深入来研究太阳的一些基本物理性质，由于太阳非常复杂所以在很多地方我们将做一些非常粗糙的近似，不过这不会影响我们最终结果的正确性。本题中可能会用到的一些物理常数有，日地距离 $r_{es} = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ ，太阳半径 $R_s = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$ ，万有引力常数 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ，太阳光度即太阳单位时间对外辐射的能量 $L_s = 3.90 \times 10^{26} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$ ，地球绕太阳的公转周期 $t = 365 \text{ d}$ ，斯特藩常数 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ ，韦恩位移常数 $b = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ ，玻尔半径 $r_1 = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ 。

（1）利用题目给出的物理常数计算太阳的质量 M_s ，平均密度 $\bar{\rho}_s$ 以及太阳的表面温度 T_s 。同时作为一种近似（尽管事实并非如此），假定太阳的密度处处相同并且为上一小问得到的平均密度 $\bar{\rho}_s$ ，同时由于太阳整体没有明显的膨胀和收缩现象，因此可以使用流体静力学方程来处理，据此给出太阳内部的压强分布 $P(r)$ 。

（2）在本问中我们不再认为太阳是一个密度均匀的球体，并将考虑太阳内部的一些物理性质。

（2.1）作为一种近似模型，我们假定太阳内部元素只有氢原子（未电离），并且氢原子按照立方体晶格的形式进行排列，每个氢原子排列在边长为 $2r_1$ （ r_1 是题目中给出的玻尔半径）的立方体的一个顶点上，见图 1.1，据此求出太阳内部的平均密度 $\bar{\rho}_s'$ 并将其与（1.1）中求出的平均密度进行比较。

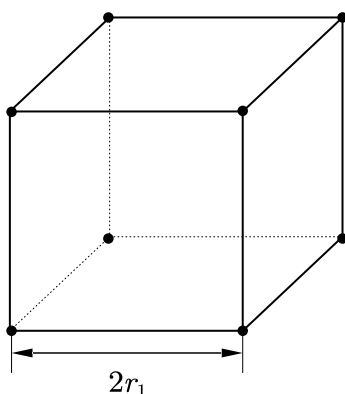


图 1.1

（2.2）上一小问中我们假设太阳内部的氢原子并未电离，本小问中我们将通过估算来判断这一假设是否合理。假定太阳内部的实际温度为 $T_{sc} = 1.5 \times 10^7 \text{ K}$ ，如果认为氢原子的原子核与电子之间的相互作用的强度可以通过一种“等效压强” P_{eff} 来表示的话（“等效压强”即氢原子核与电子的库仑力均匀分布在玻尔半径大小的球面上的平均压强），给出这一“等效压强”的表达式和数值并与太阳中心压强 P_{sc} 进行比较，由此判断上一问中太阳内部氢原子不会电

离的假设是否正确。（提示：计算太阳内部压强时可以利用 $P = nkT$ 来进行估算， n 可从上一小问的 $\bar{\rho}_s'$ 中求出）

（2.3）根据上一问的结果我们已经知道太阳内部实际上是非常炽热的等离子体，这种等离子体内部的电磁场强在理论上能够进行估计，不过为了简便，在本小问中我们进行一个非常非常粗略的近似，假设太阳内部的场强大小为 $E = 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, $B = 1 \text{ T}$ ，并且同时假定这种等离子体的热运动和光子气体的热运动类似，由此算出太阳内部的电磁场能量密度 ε_{eb} 以及热运动能量密度 ε_T ，并由此解释为什么太阳内部的等离子体可以近似视为理想气体。

（3）在本问中我们将考虑太阳内部的辐射转移过程。

（3.1）太阳内部的光子向外传播时并非是直线传播，而是类似于三维的无规行走，参考图 2.2，这主要是由于光子会和太阳内部的等离子体频繁的发生相互作用。作为一种简化模型，我们认为光子在太阳内部无规行走的平均步长也就是平均自由程为 $l = 0.5 \text{ cm}$ ，并且这个步长不会随光子不断向外传播而改变，据此求出光子从太阳中心传播到太阳表面所需要走的步数 N 。

（3.2）我们在前面的问题中已经知道太阳内部的温度 T_{sc} 和太阳表面的温度 T_s 之间差别很大，这代表光子从内部向外传播的过程中波长会明显变长，其中一种物理机制是康普顿散射。康普顿散射的一个重要特点是波长改变量与原来的光子波长无关，我们假定光子向外传播时每一步都会发生康普顿散射，并且散射后波长的改变量都为 λ_{ce} （由于电子的康普顿波长远长于质子，因此我们忽略质子的康普顿散射），由此计算光子从内部传播到表面时的波长改变量 $\Delta\lambda_{cpt}$ ，将这个计算结果与光子实际的波长改变量 $\Delta\lambda_{tot}$ 进行比较，由此说明康普顿散射主要发生在内部很小的区域内。

（3.3）虽然我们在题干中就已经给出了太阳的光度 L_s ，但实际上我们可以通过上面的无规行走模型来估算太阳的光度值。考虑到在光子无规行走走到表面的时间内，一部分太阳物质对外辐射的能量为光子气体的内能，假定太阳的平均温度为 $T_{\text{mean}} = 2.8 \times 10^6 \text{ K}$ ，请给出这一光度值 L_s' 并与太阳实际的光度值 L_s 进行比较。

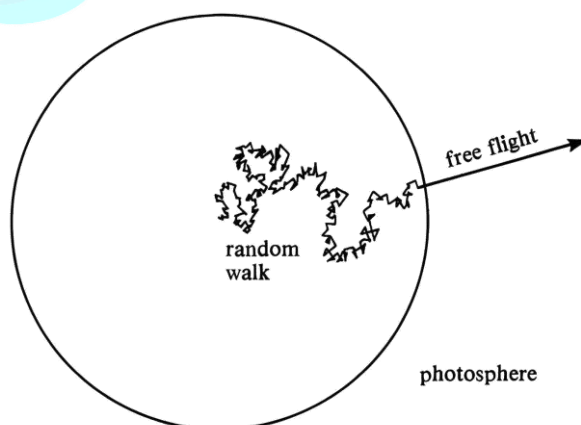


图 2.2

解：（1）考虑地球绕太阳进行公转，由牛顿第二定律可以得到

$$G \frac{M_s m}{r_{es}^2} = m \left(\frac{2\pi}{t} \right)^2 r_{es} \quad (1)$$

由此解出

$$M_s = \frac{4\pi^2 r_{es}^3}{G t^2} = 2.01 \times 10^{30} \text{ kg} \quad (2)$$

$$\bar{\rho}_s = \frac{M_s}{\frac{4}{3}\pi R_s^3} = 1.42 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \quad (3)$$

由斯特藩定律也可以直接得到

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{L_s}{4\pi\sigma R_s^2}} = 5.80 \times 10^3 \text{ K} \quad (4)$$

而对于位于 $r \sim r + dr$ 的微元来说，径向的压强差正好和其引力相平衡，由此得到

$$dP(r) = \frac{GM(r)\bar{\rho}_s}{r^2} dr = \frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}_s^2 r dr \quad (5)$$

对于太阳表面来说，由于外部是极其稀薄的太空，因此压强近似为 0，由此直接积分可以得到

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi G\bar{\rho}_s^2 (R_s^2 - r^2) \quad (6)$$

(2)

(2.1) 利用我们学过的高中化学知识很容易知道，在每个立方体内，平均包含 1 个氢原子核和 1 个电子，由此可以直接算得密度

$$\bar{\rho}_s' = \frac{m_e + m_p}{(2r_1)^3} = 1.41 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \quad (7)$$

这和 (3) 式的密度几乎完全相同，表明太阳内的氢原子之间的平均距离就是 $2r_1$ 。

(2.2) 根据题目的提示很容易得到，“等效压强”的表达式为

$$P_{\text{eff}} = \frac{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}}{4\pi r_1^2} = 2.34 \times 10^{12} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \quad (8)$$

而太阳中心的压强也可以由题目的提示直接得到

$$P_{sc} = nk_B T_{sc} = \frac{\bar{\rho}_s'}{m_e + m_p} k_B T_{sc} = 1.76 \times 10^{14} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \quad (9)$$

不难看出，

$$\frac{P_{sc}}{P_{\text{eff}}} \sim 100 \gg 1 \quad (10)$$

这说明太阳内部的氢原子核和电子之间的相互作用强度远小于太阳中心的压强，也就是说氢原子在太阳内部必定会被电离成等离子体。

(2.3) 在已知电磁场强的大小时，电磁场能量密度可以直接给出为

$$\epsilon_{eb} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = 3.98 \times 10^5 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \quad (11)$$

而热运动的能量密度也可以从光子气的类比中直接得到为

$$\epsilon_T = 3P_{sc} = 5.28 \times 10^{14} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \quad (12)$$

同样不难看出，

$$\frac{\epsilon_T}{\epsilon_{eb}} \sim 10^9 \gg 1 \quad (13)$$

这说明在太阳内部电磁相互作用的强度要远小于热运动的强度，这表明太阳内部的等离子体可以视为理想气体。

(3)

(3.1) 走了 N 步以后光子的总行走距离可表示为

$$\Delta \vec{r} = \sum_{i=1}^N \Delta \vec{r}_i \quad (14)$$

由此可以得到光子的行走距离平方为

$$\langle \Delta r^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \Delta r_i^2 \rangle + \sum_{i,j}^N \langle \Delta \vec{r}_i \cdot \Delta \vec{r}_j \rangle \quad (15)$$

我们认为光子不同步之间是相互独立的，于是有

$$\sum_{i,j}^N \langle \Delta \vec{r}_i \cdot \Delta \vec{r}_j \rangle = 0 \quad (16)$$

而对于第一项来说，我们认为碰撞过程是泊松过程，因此有

$$\langle \Delta r_i^2 \rangle = 2 \langle \Delta r_i \rangle^2 = 2l^2 \quad (17)$$

由此可以得到

$$\langle \Delta r^2 \rangle = N \langle \Delta r_i^2 \rangle = 2Nl^2 \quad (18)$$

$$N = \frac{R_s^2}{2l^2} = 9.69 \times 10^{21} \quad (19)$$

（3.2）在已知表面温度和内部温度的情况下，由维恩位移定律可以直接求出光子的波长，即

$$\lambda_{sc} = \frac{b}{T_{sc}} = 1.93 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (20)$$

$$\lambda_s = \frac{b}{T_s} = 5.0 \times 10^{-7} \text{ m} \quad (21)$$

由此得到光子实际改变的总波长为

$$\Delta \lambda_{tot} = \lambda_s - \lambda_{sc} = 5.0 \times 10^{-7} \text{ m} \quad (22)$$

而电子的康普顿散射波长为

$$\lambda_{ce} = \frac{h}{m_e c} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m} \quad (23)$$

如果每一步都发生康普顿散射的话，那么由于康普顿散射所改变的总波长为

$$\Delta \lambda_{cpt} = N \lambda_{ce} = 2.35 \times 10^{10} \text{ m} \quad (24)$$

容易看出

$$\frac{\Delta \lambda_{cpt}}{\Delta \lambda_{tot}} \sim 10^{17} \gg 1 \quad (25)$$

这表明在光子向外传播的过程中，只有其中非常小一部分区域会发生康普顿散射，而由于太阳内部比外部更加致密，因此可以推断出康普顿散射主要发生在内部非常小的区域内。

（3.3）由斯特藩定律我们可以得到，单位体积的太阳对外辐射的能量为

$$\rho_r = aT^4 = \frac{4\sigma}{c} T^4 \quad (26)$$

那么太阳的光度实际上就是太阳总体积对外辐射的能量除以光子向外无规行走的距离达到太阳半径所需的时间，即

$$L'_s = \frac{\left(\frac{4}{3}\pi R_s^3\right)(aT_{\text{mean}}^4)}{\frac{Nl}{c}} = 4.06 \times 10^{26} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \quad (27)$$

这个值与真实的太阳光度值 $L_s = 3.90 \times 10^{26} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$ 非常接近，表明我们这样估算是合理的。

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 10 分：（1）（2）（3）（4）（6）式各 2 分；

第 (2) 问 15 分:

第 (2.1) 问 3 分: (7) 式 2 分, 讨论 1 分;

第 (2.2) 问 6 分: (8) (9) 式各 2 分, 讨论 2 分;

第 (2.3) 问 6 分: (11) (12) 式各 2 分, 讨论 2 分;

第 (3) 问 15 分:

第 (3.1) 问 5 分: (18) 式 1 分, (15) (19) 式各 2 分;

第 (3.2) 问 5 分: (22) (24) 式各 2 分, 讨论 1 分;

第 (3.3) 问 5 分: (26) 式 1 分, (27) 式 3 分, 讨论 1 分。

二、(50 分) 汽车防抱死系统 (ABS)

汽车防抱死系统 (简称 ABS) 用于紧急刹车时使车轮保持一定的旋转, 由此避免出现打滑现象 (车轮打滑时无法控制方向, 容易发生前轮失控或后轮侧漂现象)。一般的 ABS 工作方式是: 先急刹刹车, 当电子系统检测到车轮即将打滑时, 逐渐放松制动泵, 使车轮轮轴处的制动力矩减小, 经过一段时间后, 车轮远离了即将打滑, 就再加大制动力矩……周而复始, 将车轮控制在即将打滑但又没有的临界点附近。该周期频率很高, 每秒可达数十次。

(1) 考虑简化模型, 汽车有四个车轮, 每个车轮上支持力大小均相等, 不考虑减速造成的支持力变化。汽车总质量为 M , 车轮转动惯量为 I , 半径为 R , 路面摩擦因数为 μ 。制动力矩的时间变化率为 $\frac{d\tau}{dt} = \pm k$ (正负号取决于放松还是收紧制动泵), 每次放松制动泵的持续时间为 t_0 。求 ABS 允许的最大制动力矩 τ_m 。

(2) 接上问, 当驾驶员踩死刹车板时, ABS 启动, 制动力矩从 0 开始均匀增加到 τ_m , 而后进入制动力矩减小—增大循环。设汽车初速度为 v_0 , 其比较大以至于 ABS 能至少工作若干周期。

(2.1) 求制动力矩的减小—增大循环中汽车的平均加速度大小;

(2.2) 当 $t_0 \rightarrow 0$ 时, 求刹车距离。

(3) 实际上车轮并非完全纯滚, 引入一个衡量滚动速度和平动速度的比值的量: 滑移率, 定义为 $\eta = 1 - \frac{\omega R}{v_c}$, 比如纯滚 $\eta = 0$, 不滚只滑 $\eta = 100\%$ 。本问中仍然设摩擦因数 (包括滑动和滚动) 为 μ , ABS 实际上会将滑移率控制在特定的非零值 η 附近, 当实际的滑移率低于 η 时制动力矩增大, 高于 η 时则减小, 进入制动力矩减小—增大循环。为了能够更严格地控制实际滑移率, 在滑移率第一次超过 η 后制动力矩的时间变化率瞬间增加至 $\pm k'$, 而后一直保持为 $\pm k'$ 不变 (在此之前时间变化率仍为 $\pm k$, $k < k'$)。现在仍然考虑汽车以速度 v_0 匀速行驶时驾驶员突然踩死刹车板启动 ABS, 同样设 ABS 能至少工作若干周期, 求制动力矩时间变化率变为 $\pm k'$ 之后新的制动力矩减小—增大循环的频率。(设 η 不是很接近于 1 和 0 并且 k' 足够大, 使得虽然滑移率在设定的 η 上下小幅变化, 实际瞬时滑移率 η_r 仍然满足 $0 < \eta_r < 1$)

解: (1) 设四个车轮上的摩擦力分别为 f , 当车轮保持纯滚状态时, 有运动学关系

$$a = \beta R \quad (1)$$

其中 a 是汽车的加速度, β 是车轮的角加速度。由汽车整体的牛顿第二定律可得

$$Ma = 4f \quad (2)$$

由车轮的转动定律可得

$$I\beta = \tau - fR \quad (3)$$

联立 (1) (2) (3) 式解出

$$f = \frac{MR\tau}{4I + MR^2} \quad (4)$$

车轮的纯滚要求

$$f \leq \frac{1}{4}\mu Mg \quad (5)$$

联立（4）（5）式，解得制动力矩的上限为

$$\tau \leq \tau_m = \frac{\mu g}{R} \left(I + \frac{1}{4}MR^2 \right) \quad (6)$$

（2）（2.1）在第（1）问中利用（1）（2）（3）式可以解得

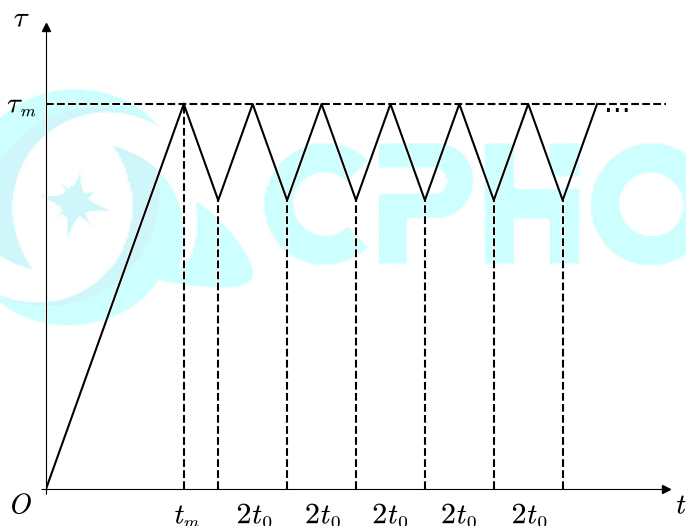
$$a = \frac{\tau R}{I + \frac{1}{4}MR^2} \quad (7)$$

在制动力矩的减小-增大循环中，平均制动力矩为

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2}(\tau_m + \tau_m - kt_0) = \tau_m - \frac{1}{2}kt_0 \quad (8)$$

利用（7）（8）式，得到平均加速度为

$$\bar{a} = \frac{\bar{\tau}R}{I + \frac{1}{4}MR^2} = \frac{\left(\tau_m - \frac{1}{2}kt_0 \right) R}{I + \frac{1}{4}MR^2} = \mu g - \frac{kt_0 R}{2I + \frac{1}{2}MR^2} \quad (9)$$



答图2.1 制动力矩随时间变化函数图像

（2.2）当 $t_0 \rightarrow 0$ 时，制动力矩的减小-增大循环中平均加速度为

$$\bar{a} = \frac{\tau_m R}{I + \frac{1}{4}MR^2} = \mu g \quad (10)$$

当踩下刹踏板后，制动力矩线性增加至 τ_m ，这段时间内汽车的加速度与时间的关系为

$$a(t) = \frac{\tau(t)R}{I + \frac{1}{4}MR^2} = \frac{kR}{I + \frac{1}{4}MR^2} t \quad (11)$$

当制动力矩增加至 τ_m 时的时刻为

$$t_m = \frac{\tau_m}{k} = \frac{\mu g}{kR} \left(I + \frac{1}{4}MR^2 \right) \quad (12)$$

此时汽车的速度为

$$v_m = v_0 - \int_0^{t_m} a(t) dt = v_0 - \frac{1}{2} \frac{kR}{I + \frac{1}{4}MR^2} t_m^2 = v_0 - \frac{\mu^2 g^2}{2kR} \left(I + \frac{1}{4}MR^2 \right) \quad (13)$$

汽车距离刚踩下刹车踏板时的位移为

$$x_1 = \int_0^{t_m} v(t) dt = \int_0^{t_m} \left(v_0 - \frac{1}{2} \frac{kR}{I + \frac{1}{4}MR^2} t^2 \right) dt = v_0 t_m - \frac{1}{6} \frac{kR}{I + \frac{1}{4}MR^2} t_m^3 \quad (14)$$

接下来汽车以平均加速度大小为 $\bar{a} = \mu g$ 减速运动，故减速至停止过程中的位移为

$$x_2 = \frac{v_m^2}{2\bar{a}} = \frac{\left(v_0 - \frac{1}{2} \frac{kR}{I + \frac{1}{4}MR^2} t_m^2 \right)^2}{2\mu g} = \frac{v_0^2}{2\mu g} - \frac{kR}{I + \frac{1}{4}MR^2} \frac{v_0 t_m^2}{2\mu g} + \left(\frac{kR}{I + \frac{1}{4}MR^2} \right)^2 \frac{t_m^4}{8\mu g} \quad (15)$$

利用 (14) (15) 式并代入 (12) 式的 t_m ，可得制动总位移 $x = x_1 + x_2$ 为

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu g} - \frac{1}{2} v_0 t_m - \frac{1}{24} \mu g t_m^2 = \frac{v_0^2}{2\mu g} - \frac{\mu g v_0}{2kR} \left(I + \frac{1}{4}MR^2 \right) - \frac{\mu^3 g^3}{24k^2 R^2} \left(I + \frac{1}{4}MR^2 \right)^2 \quad (16)$$

(3) 在这样的刹车过程中，制动力矩先线性增大并到达滚动摩擦极限，此时的时间和速度在 (2) 小问中已经算出：

$$t_m = \frac{\tau_m}{k} = \frac{\mu g}{kR} \left(I + \frac{1}{4}MR^2 \right) \quad (17)$$

$$v_m = v_0 - \frac{1}{2} \frac{kR}{I + \frac{1}{4}MR^2} t_m^2 = v_0 - \frac{\mu^2 g^2}{2kR} \left(I + \frac{1}{4}MR^2 \right) \quad (18)$$

到达滚动摩擦极限后，制动力矩仍然增加，车轮角速度持续减少，此时车轮开始打滑并在滑动摩擦力作用下匀减速，直到滑移率达到 η 。该阶段中汽车的速度与时间的关系为

$$v(t) = v_m - \mu g(t - t_m) \quad (19)$$

车轮的角加速度与时间的关系为

$$\beta(t) = -\frac{\tau(t)}{I} + \frac{\mu MgR}{4I} = -\frac{kt}{I} + \frac{\mu MgR}{4I} \quad (20)$$

结合 t_m 时刻车轮的角速度为 $\frac{v_m}{R}$ ，可知车轮的角速度与时间的关系为

$$\omega(t) = \frac{v_m}{R} + \frac{\mu MgR}{4I} (t - t_m) - \frac{k}{2I} (t^2 - t_m^2) \quad (21)$$

设 t_1 时刻滑移率增加至 η ，利用 (19) (21) 式以及滑移率的定义得

$$[v_m - \mu g(t_1 - t_m)](1 - \eta) = v_m + \frac{\mu MgR^2}{4I} (t_1 - t_m) - \frac{kR}{2I} (t_1^2 - t_m^2) \quad (22)$$

解得

$$t_1 = \frac{\mu g I (1 - \eta)}{kR} + \frac{\mu MgR}{4k} + \sqrt{\left(\frac{\mu g I (1 - \eta)}{kR} + \frac{\mu MgR}{4k} - t_m \right)^2 + \frac{2\eta I v_m}{kR}} \quad (23)$$

当滑移率超过 η 后，制动力矩进入不断地减小-增大循环，并且时间变化率增大至 k' 。为研究每次滑移率回到 η 的时刻，定义以下关于 t 的函数：

$$f(t) = \omega(t)R - (1 - \eta)v_c(t) = \omega(t)R - [v_m - \mu g(t_1 - t_m)](1 - \eta) \quad (24)$$

易知 $f(t)$ 的零点即为制动力矩减小/增大切换的时刻，并且在每两个零点之间，函数 $f(t)$ 的二阶导满足

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = R \frac{d^2 \omega}{dt^2} = R \frac{d\beta}{dt} = \pm R \frac{k'}{I} \quad (25)$$

t_1 时刻函数 $f(t)$ 的斜率为

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t_1} = R \left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{t_1} + \mu g(1-\eta) = \left(-\frac{kt_1}{I} + \frac{\mu MgR}{4I} \right) R + \mu g(1-\eta) \quad (26)$$

根据二次函数性质，函数 $f(t)$ 在下一个零点 t_2 处的斜率恰好与 t_1 处相反，故

$$\Delta t = \frac{2kt_1}{k'} - \frac{\mu MgR}{2k'} - \frac{2\mu gI(1-\eta)}{k'R} = 2 \sqrt{\left(\frac{\mu gI(1-\eta)}{k'R} + \frac{\mu MgR}{4k'} - t_m \right)^2 + \frac{2\eta I v_m}{k'R}} \quad (27)$$

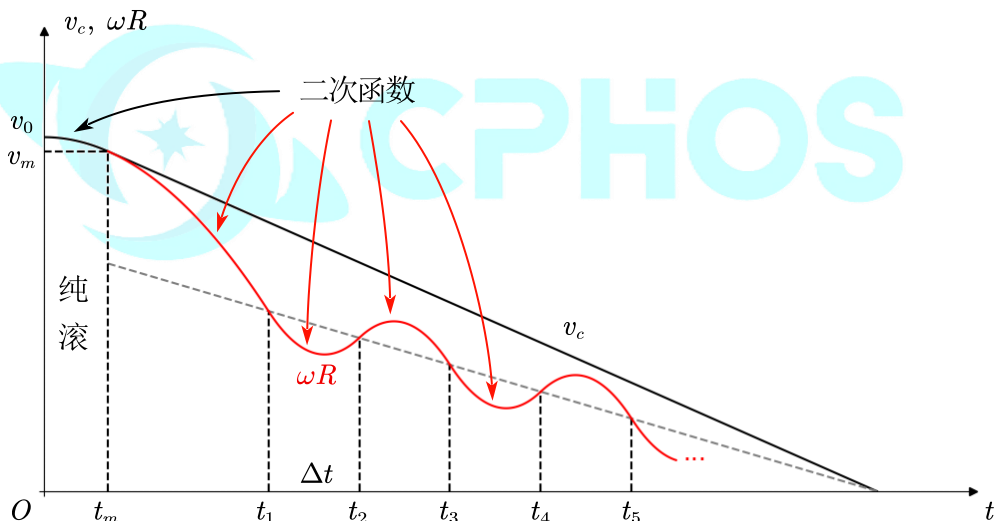
注意根据二次函数的性质，对于任意两次相邻的切换，时间差均为（27）式中的 Δt 。所以制动力矩减小-增大循环的频率为

$$f = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\mu gI(1-\eta)}{k'R} + \frac{\mu MgR}{4k'} - t_m \right)^2 + \frac{2\eta I v_m}{k'R} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (28)$$

其中

$$t_m = \frac{\mu g}{kR} \left(I + \frac{1}{4} MR^2 \right)$$

$$v_m = v_0 - \frac{\mu^2 g^2}{2kR} \left(I + \frac{1}{4} MR^2 \right)$$



答图2.2 速度、角速度与时间函数关系图像

评分标准：本题满分 50 分。

第（1）问 8 分：（1）（2）（3）（4）式各 1 分，（5）（6）式各 2 分；

第（2）问 21 分：

第（2.1）小问 7 分：（7）（8）式各 2 分，（9）式 3 分；

第（2.2）小问 14 分：（10）（11）式各 1 分，（12）（13）式各 2 分，（14）（15）式各 3 分，（16）式 2 分；

第（3）问 21 分：（19）（20）式各 1 分，（21）（22）（23）（24）（25）式各 2 分，（26）（27）（28）式 3 分。

三、（50分）带电粒子穿过介质的能量损失

非相对论的贝特公式由汉斯·贝特在1930年发现，该公式描述了重带电粒子（质子， α 粒子，离子）穿越介质单位距离时的平均能损，即材料的阻止本领。本题将通过对带电粒子的

场进行谱分解，计算介质产生的电场对粒子的阻力。

考虑一个带电量为 Ze 的粒子以匀速 \vec{v} 穿过介质，在非相对论情形下，电势满足泊松方程：

$$\varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \nabla^2 \varphi = -Ze \delta(\vec{r} - \vec{v}t) \quad (1)$$

其中介质的相对介电常数 ε 是算符，在频域下 $\hat{\varepsilon} = \varepsilon(\omega)$ 。 $\varepsilon(\omega)$ 的虚部为奇函数，且一般不为 0，表示介质带来的能量损失。

(1) 电势可以分解为一系列平面波的叠加：

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \varphi_{\vec{k}}(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3\vec{k} \quad (2)$$

这一展开可以使我们转到频域中分析。在频域中，对于波矢 \vec{k} 对应的平面波模式，拉普拉斯算子 ∇^2 的作用相当于对此模式乘一个 k^2 。

(1.1) 代入泊松方程，计算 $\varphi_{\vec{k}}(t)$ 。

(1.2) 计算介质产生的电场对带电粒子的作用力，写成关于 \vec{k} 积分的形式。

(2) 取 \vec{v} 的方向为 z 轴，做变量代换：

$$\omega = k_z v, \quad q = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (3)$$

注意到如果 q 的上限取 $+\infty$ 的话 (1.2) 中的积分式会发散。考虑量子效应截断：波矢为 \vec{k} 的平面波传递给介质内电子的动量是 $\hbar\vec{k}$ ，而在半经典模型下这个值也可以视为入射粒子通过碰撞传递给电子的动量。当入射粒子速率远大于电子运动速度时：

$$\hbar k_{\max} = 2mv \quad (4)$$

其中 m 为电子质量。

(2.1) 计算阻力大小，写成关于 ω 积分的形式。

(2.2) 在高频区域

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{ne^2}{m\varepsilon_0\omega^2} \quad (5)$$

其中 n 为介质中电子数密度。证明贝特公式具有如下形式：

$$F = \frac{4\pi n Z^2}{mv^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \ln \frac{2mv^2}{\hbar\bar{\omega}} \quad (6)$$

并求出介质平均电离能 $\hbar\bar{\omega}$ ，使用含 $\varepsilon(\omega)$ 的积分式表示。

提示：只有 ε 的虚部对阻力有贡献。考虑到 $\omega/\varepsilon(\omega)$ 在上半平面无极点，

$$\int_0^{+\infty} -\omega \cdot \text{Im} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} \right] d\omega = -\frac{i}{2} \int_{\sigma} \frac{\omega}{\varepsilon(\omega)} d\omega = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \quad (7)$$

其中 σ 为上半平面无限大半圆的逆时针路径。

解：(1)

(1.1) 对电势满足的方程进行逆傅里叶变换：

$$-\varepsilon_0 \varepsilon(\omega) k^2 \varphi_{\vec{k}}(t) = -Ze \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(\vec{r} - \vec{v}t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3\vec{r} = -\frac{Ze}{8\pi^3} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{v}t) \quad (1)$$

不难看出

$$\omega = \vec{k} \cdot \vec{v} \quad (2)$$

所以

$$\varphi_{\vec{k}}(t) = \frac{Ze}{8\pi^3 k^2 \varepsilon_0 \varepsilon(\vec{k} \cdot \vec{v})} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{v}t) \quad (3)$$

(1.2) 同理

$$E(\vec{r}, t) = -\nabla\varphi(\vec{r}, t) = \int -i\vec{k} \varphi_{\vec{k}}(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3\vec{k} \quad (4)$$

电场的每个成分为：

$$\vec{E}_{\vec{k}}(t) = -i\vec{k}\varphi_{\vec{k}}(t) = -\frac{iZe\vec{k}}{8\pi^3k^2\varepsilon_0\varepsilon(\vec{k}\cdot\vec{v})}\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{v}t) \quad (5)$$

扣除带电粒子自身的场，介质在 \vec{r} 处产生的电场为：

$$\vec{E}_m(\vec{r}, t) = \int (1 - \varepsilon(\omega)) \vec{E}_{\vec{k}}(t) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) d^3\vec{k} \quad (6)$$

粒子自身位于 $\vec{r} = \vec{v}t$ 处，所以介质对带电粒子的作用力为：

$$\vec{F} = Ze\vec{E}_m(\vec{v}t, t) = \frac{iZ^2e^2}{8\pi^3\varepsilon_0} \int \frac{\vec{k}}{k^2} \left[1 - \frac{1}{\varepsilon(\vec{k}\cdot\vec{v})} \right] d^3\vec{k} \quad (7)$$

(2)

(2.1) (7) 式具有柱对称性，可以发现阻力与 \vec{v} 方向相反。经过变量代换后阻力大小为：

$$F = \frac{iZ^2e^2}{4\pi^2\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^{q_{\max}} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - 1 \right] \frac{\omega q}{q^2v^2 + \omega^2} dq \quad (8)$$

量子效应截断要求：

$$k_{\max}^2 = q_{\max}^2 + \frac{\omega^2}{v^2} = \left(\frac{2mv}{\hbar} \right)^2 \quad (9)$$

完成对 q 的积分：

$$F = \frac{iZ^2e^2}{4\pi^2\varepsilon_0v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - 1 \right] \omega \ln \frac{k_{\max}v}{|\omega|} d\omega \quad (10)$$

考虑到只有 $\varepsilon(\omega)$ 的虚部对积分有贡献，

$$F = \frac{Z^2e^2}{2\pi^2\varepsilon_0v^2} \int_0^{+\infty} -\omega \cdot \text{Im} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} \right] \ln \frac{2mv^2}{\hbar\omega} d\omega \quad (11)$$

(2.2) 联立 (11) 式和提示可得

$$F = \frac{4\pi nZ^2}{mv^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \ln \frac{2mv^2}{\hbar\bar{\omega}} \quad (12)$$

其中

$$\hbar\bar{\omega} = \hbar \exp \left(\frac{2m\varepsilon_0}{\pi ne^2} \int_0^{+\infty} -\omega \cdot \text{Im} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} \right] \ln \omega d\omega \right) \quad (13)$$

评分标准：本题满分 50 分。

第 (1) 问 24 分：

第 (1.1) 小问 10 分：(1) 式 6 分，(2) (3) 式 2 分；

第 (1.2) 小问 14 分：(4) 式 6 分，(5) (7) 式 2 分，(6) 式 4 分；

第 (2) 问 26 分：

第 (2.1) 小问 17 分：(8) (10) 式 6 分，(9) 式 3 分，(11) 式 2 分；

第 (2.2) 小问 9 分：证明 3 分，(13) 式 6 分。

四、(50 分) 不会下沉的圆盘 (Unsinkable Disk)

当我们用一垂直于水面的快速水流冲击一置于水面上的圆盘时，有时会出现如下图所示的圆盘浮于水面上的“反常”情况。本题尝试对此现象进行解释。

(1) 考虑如下图所示的水流冲击圆盘的简化模型，假设在接触圆盘前一刻水柱的半径为 r 。水在接触圆盘的一瞬间速度便突变为朝径向方向，大小变为接触前一刻速度的 k ($0 < k < 1$) 倍，此后水在圆盘上表面形成一层厚度近似不变的薄水膜，其速度处处沿径向。圆盘密度为 ρ ，半径为 R ($R \gg r$)，厚度为 d ，在水流冲击下，圆盘上表面会低于水平面，设两者垂直

距离为 h ，且 $hr^2 \ll dR^2$ 。假设水无粘性且不可压缩，其密度为 ρ_w ($\rho_w < \rho$)，圆盘下方的水可视为静止，圆盘上方水膜的厚度很小。重力加速度为 g 。求出当圆盘可以保持在此处不下沉时，冲击圆盘的水流流量 Q （流量即单位时间通过截面的流体体积）。

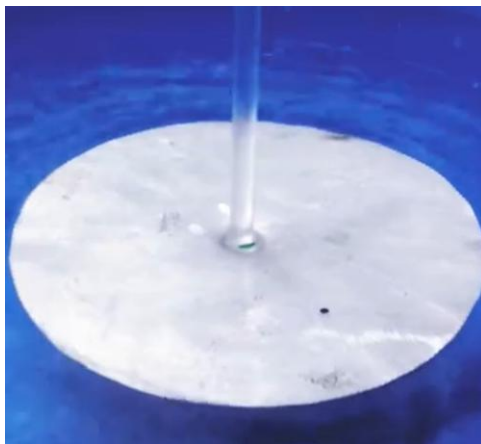


图4.1 不会下沉的圆盘实物图

(2) 接第(1)问，当水柱中心与圆盘中心存在较小偏离时，圆盘仍能浮于水面上，但此时的圆盘会发生一定程度的倾斜。由于盘的倾斜，此时水柱的速度具有平行于盘面的分量，假设此时盘面水膜的速度为原先盘面水平时的速度加上一个上述的平行分量。约束圆盘中心没有水平方向上的运动，求出当两个中心存在偏差 x ($x \ll R$) 时，圆盘的倾斜角度 θ ($\theta \ll 1$)。

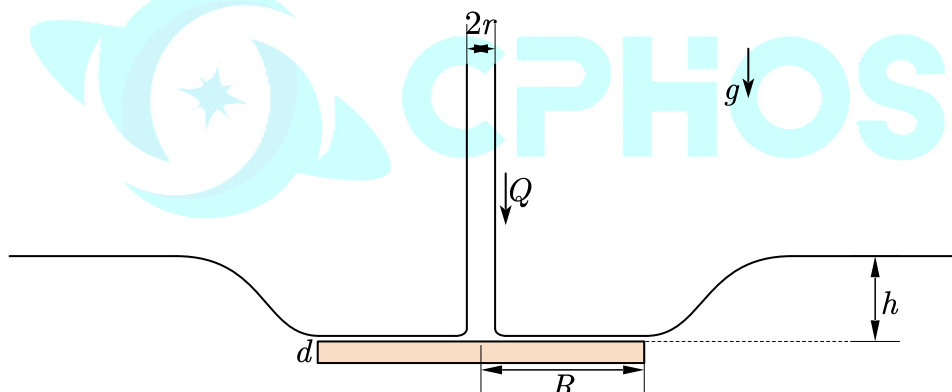


图4.2 水流冲击圆盘模型示意图

解：(1) 冲击前一刻水流的速度为：

$$v_0 = \frac{Q}{\pi r^2} \quad (1)$$

冲击后速度变为其 k 倍，由于水不可压缩，半径为 a 处水流的速度为：

$$v(a) = kv_0 \cdot \frac{r}{a} = \frac{kQ}{\pi ra} \quad (2)$$

水膜的厚度为：

$$l = \frac{Q}{2\pi kv_0 r} = \frac{r}{2k} \quad (3)$$

考察水面上的一条流线，由伯努利定理，在足够远处水面的压强为0，半径为 a 处水膜的压强为：

$$p(a) = \rho_w gh - \frac{1}{2} \rho_w v(a)^2 = \rho_w gh - \frac{1}{2} \rho_w \left(\frac{kQ}{\pi ra} \right)^2 \quad (4)$$

故上表面的由于水的压强产生的受力即为：

$$F_1 = \int_r^R p(a) 2\pi a da = \pi(R^2 - r^2)\rho_w gh - \frac{\rho_w k^2 Q^2}{\pi r^2} \ln \frac{R}{r} \quad (5)$$

另一方面，由于水的冲击产生的受力为：

$$F_2 = \rho_w v_0^2 \pi r^2 = \frac{\rho_w Q^2}{\pi r^2} \quad (6)$$

圆盘的下表面受到水的压强，受向上的力为：

$$F_3 = \rho_w g(h + d) \cdot \pi R^2 \quad (7)$$

受力平衡：

$$\rho_w g \pi R^2 d = \rho_w g \pi R^2 d + \rho_w g \pi r^2 h + \frac{\rho_w Q^2}{\pi r^2} \left(k^2 \ln \frac{R}{r} - 1 \right) \quad (8)$$

可做近似：

$$\rho_w g \pi R^2 d = \rho_w g \pi R^2 d + \frac{\rho_w Q^2}{\pi r^2} \left(k^2 \ln \frac{R}{r} - 1 \right) \quad (9)$$

最终得到：

$$Q = \pi R r \sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho_w} - 1 \right) \frac{g d}{k^2 \ln \frac{R}{r} - 1}} \quad (10)$$

(2) 设圆盘倾斜的角度为 θ ($\theta \ll 1$)，此时距离水柱中心 a 处，极角为 φ 处水流的速度大小为：

$$v(a, \varphi) = \frac{kQ}{\pi r a} + \frac{Q\theta}{\pi r^2} \cos \varphi \quad (11)$$

故上表面的水膜压强分布为：

$$p(a, \varphi) = \rho_w g(h + a\theta \cos \varphi) - \frac{1}{2} \rho_w \left[\left(\frac{kQ}{\pi r a} \right)^2 + \frac{2kQ^2\theta}{\pi^2 r^3 a} \cos \varphi \right] \quad (12)$$

水流冲击由于偏离中心，其造成的力矩为（以 θ 增大的方向为正）：

$$M_2 = F_2 x = \frac{\rho_w Q^2}{\pi r^2} x \quad (13)$$

圆盘下方的水因为圆盘的倾斜给出力矩：

$$M_3 = -\rho_w g \int_0^\pi (h + d + R\theta \cos \varphi) \cdot R \cos \varphi \cdot 2R^2 \sin^2 \varphi d\varphi = -\frac{\pi}{4} \rho_w g R^4 \theta \quad (14)$$

再来考虑圆盘上方水膜的力矩。如下图所示，如果作用力全部都在右侧的圆内，则水膜造成的力矩为：

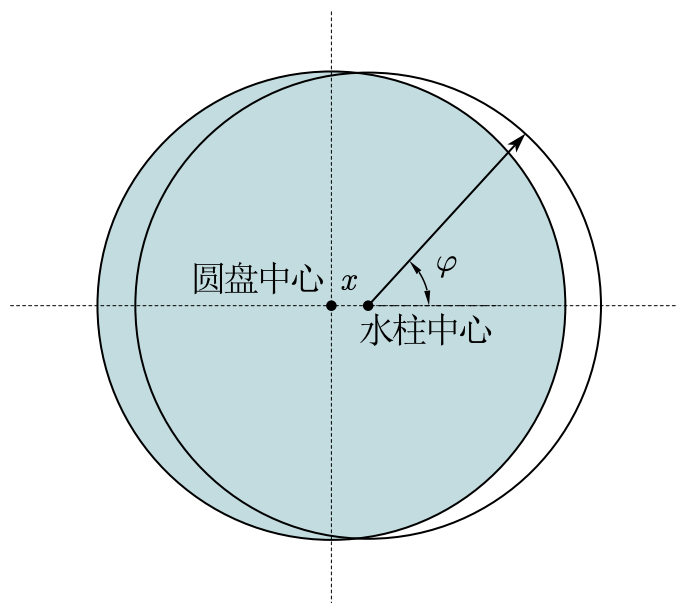
$$M'_1 = \int_r^R \int_0^{2\pi} p(a, \varphi) (x + a \cos \varphi) a da d\varphi \approx F_1 x - \frac{\rho_w k Q^2 R^2}{2\pi r^3} \theta + \frac{\pi}{4} \rho_w g R^4 \theta \quad (15)$$

然而，实际作用区是圆盘的表面，两者之差异为下图所示的两个月牙形区域，其力矩修正为：

$$\Delta M = - \int_0^{2\pi} \left[\rho_w g(h + R\theta \cos \varphi) - \frac{1}{2} \rho_w \left[\left(\frac{kQ}{\pi r R} \right)^2 + \frac{2kQ^2\theta}{\pi^2 r^3 R} \cos \varphi \right] \right] (x + R \cos \varphi) R x \cos \varphi d\varphi$$

只保留至一级小量得到：

$$\Delta M = - \left[\rho_w g h - \frac{1}{2} \rho_w \left(\frac{kQ}{\pi r R} \right)^2 \right] \pi R^2 x \quad (16)$$



答图4.1 圆盘俯视图

总力矩即为：

$$M_{\text{total}} = M'_1 + \Delta M + M_2 + M_3 \approx \frac{\rho_w Q^2 x}{\pi r^2} \left[1 - k^2 \left(\ln \frac{R}{r} - \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{\rho_w k Q^2 R^2}{2\pi r^3} \theta = 0 \quad (17)$$

故

$$\theta = \frac{2rx}{kR^2} \left[1 - k^2 \left(\ln \frac{R}{r} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (18)$$

评分标准：本题满分50分。

第（1）问22分：（1）（2）（4）（6）（7）（8）（9）式各2分，（5）（10）式各4分；

第（2）问28分：（11）（12）（13）（14）式各3分，（15）（16）（17）（18）式各4分。

五、（40分）磁荷量子化

关于磁单极子，理论上有这么多漂亮的结果，但它最大的问题就是，直到今天，实验上依然没有发现磁单极子的存在。因此我们讨论磁单极子的相关理论，并得到磁荷量子化结论。

（1）使用角动量守恒的方法推导，考虑有一个电荷，电荷量为 q ，在一个固定的点磁荷的磁场中运动，产生的磁场为 $\vec{B} = \frac{g\vec{r}}{4\pi r^2}$ ，计算正则角动量并得到守恒量，类比 z 方向角动量守恒时

$L_z = \frac{1}{2}n\hbar, n \in Z$ ，进而得到磁荷的量子化条件。

（2）利用电磁场的规范不变性，尝试得出量子化条件：

（2.1）磁荷产生的磁场为 $\vec{B} = \frac{g\vec{r}}{4\pi r^2}$ ，以磁荷为原点，建立球坐标系，设极角为 θ ，尝试计算

磁矢势。

数学提示：极角为 θ 时的立体角为

$$\Omega = 2\pi \times (1 - \cos \theta)$$

（2.2）我们发现，我们得到的磁矢势在 $\theta = 0$ 处不发散，但在 $\theta = \pi$ 处发散，由对称性可知，应该存在另一个磁矢势，在 $\theta = \pi$ 处不发散，但在 $\theta = 0$ 处发散。尝试求解这种势。由于 $\vec{A} \rightarrow$

$\vec{A} + \nabla\beta$ ，磁场不发生变化，且在变换下，对波函数的相位影响为 $\psi \rightarrow e^{i\frac{q\beta}{\hbar}}\psi$ ，根据这一点，

得到磁荷量子化的条件。

数学提示：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\theta}$$

解：（1）

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

$$\vec{B} = \frac{g\vec{r}}{4\pi r^3} \quad (2)$$

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = q\vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \quad (3)$$

由此可得：

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{qg}{4\pi r^3} \vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) = \frac{qg}{4\pi} \left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2} \right) \quad (4)$$

利用

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\dot{r}\vec{r}}{r^2} \quad (5)$$

因此得到正则角动量守恒

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} - \frac{qg}{4\pi} \hat{r} \quad (6)$$

我们发现一个有趣的现象，这个体系在粒子不运动时仍有角动量。

在（6）式左右两侧点乘 \hat{r} 可以得到

$$\vec{L} \cdot \hat{r} = -\frac{qg}{4\pi} = \text{Const} \quad (7)$$

类比Z方向的角动量的量子化条件

$$L_z = \frac{1}{2} n\hbar \quad (8)$$

由于n的取值为全体整数，我们不关注正负号

$$\frac{qg}{4\pi} = \frac{1}{2} \hbar n \quad (9)$$

由此我们得到了狄拉克量子化条件

$$qg = 2\pi\hbar n, \quad n \in Z \quad (10)$$

（2.1）利用

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (11)$$

利用磁荷的球对称性和立体角的公式

$$\Omega = 2\pi \times (1 - \cos \theta) \quad (12)$$

$$2\pi r \sin \theta \times A_\phi = g \frac{2\pi(1 - \cos \theta)}{4\pi} \quad (13)$$

得到

$$A_\phi = \frac{g}{4\pi r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \quad (14)$$

（2.2）利用数学提示：

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\theta} = \frac{g \hat{r}}{4\pi r^2} \quad (15)$$

利用 θ 方向可知

$$A_\phi = \frac{f(\theta)}{r} \quad (16)$$

由 r 方向可知：

$$f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta = \frac{g \sin \theta}{4\pi} \quad (17)$$

利用常数变易法有

$$f(\theta) = \frac{g}{4\pi} \frac{-\cos \theta + C}{\sin \theta} \quad (18)$$

其中 C 为待定常数，在 $\theta = \pi$ 处不发散，但在 $\theta = 0$ 处发散，要求 $C = -1$ 。两次磁矢势的差值为

$$\Delta A = \frac{g}{2\pi r \sin \theta} = \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \beta \quad (19)$$

其中 $\beta = \frac{g\phi}{2\pi}$ 。

在变换下，当 ϕ 增加 2π 时，波函数保持不变有

$$qg = 2\pi\hbar n \quad (20)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 18 分：（1）（4）（5）（7）（8）式各 2 分，（6）（10）式各 4 分；

第（2）问 22 分：

第（2.1）问 6 分：（11）（13）（14）式各 2 分；

第（2.2）问 16 分：（15）（16）（17）（18）式各 2 分，（19）（20）各 4 分。

六、（50 分）驱动蛋白

驱动蛋白（kinesin）是细胞内部极其重要的“超级搬运工”，它由两个球状马达和一双类似于人类下肢的瘦长杆状结构所组成，将各种营养物质沿着长长的微管（microtubule）运送到细胞中的各个部件。如图6.1所示，驱动蛋白与微管之间复杂的相互作用可以简化视为无限长的一维周期势场 $V(x)$ ，势场的周期为 l ，峰值点和谷值点分别记作 A_i 和 B_i ，构成的势垒高度为 ΔE ，任一峰值点 A_i 到左侧和右侧谷值点距离分别为 $l\delta$ 和 $l(1-\delta)$ ， $0 < \delta < 1$ 。已知玻尔兹曼常数为 k_B ，系统的温度为 T 。忽略一切边缘效应。

由于 $\Delta E \gg k_B T$ ，驱动蛋白大部分时间定居于谷值点 B_i 附近，并在热涨落影响下以一定概率向近邻谷值点位置跃迁。这些跃迁在宏观上表现为驱动蛋白的定向移动。当驱动蛋白近邻两侧谷值点有空位时，其向左侧和右侧空位自由跃迁的速率分别为 p 和 q ，且 $p < q$ ；但是，若任意一侧被另一驱动蛋白占据，强烈的相互作用不仅会阻止驱动蛋白向该侧的跃迁，也会同时改变向另一侧的跃迁速率。

提示：跃迁速率被定义为单位时间跃迁的几率大小。根据玻尔兹曼统计：

$$\text{跃迁速率} \propto \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right) \quad (1)$$

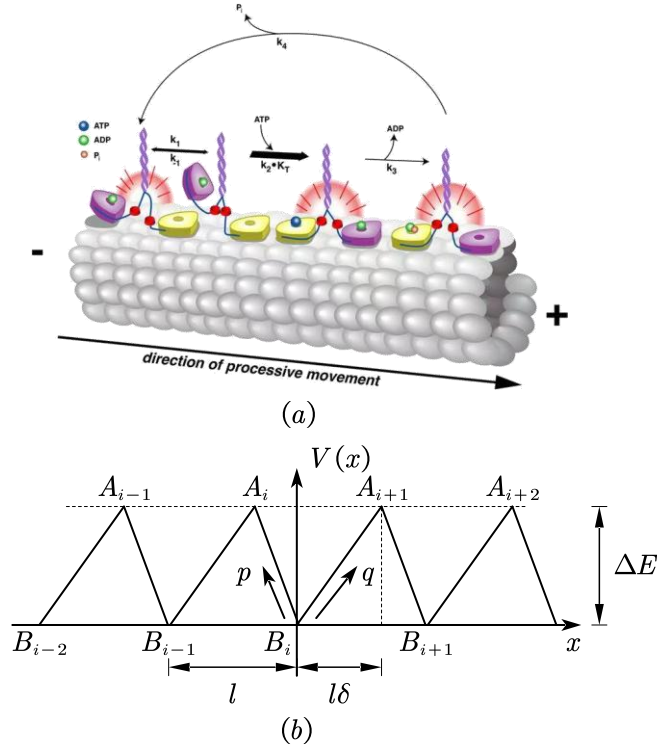


图6.1

(1) 现有恒定外力 $\vec{F} = F\hat{x}$ 施加到驱动蛋白上。在左侧和右侧均为空位的条件下，试求此时驱动蛋白向左和向右跃迁的速率 p_1 和 q_1 ，用 p, q, l, δ, T, k_B 表示。

(2) 考虑系统仅有一个驱动蛋白的无相互作用情形。驱动蛋白受恒定外力 $\vec{F} = F\hat{x}$ 。

(2.1) 用 $P_i(t)$ 表示 t 时刻驱动蛋白在第 i 个谷值点 B_i 的概率，求 $\frac{dP_i(t)}{dt}$ 满足的微分方程。

(2.2) 求驱动蛋白的宏观运动速度 $\vec{V}_{1M} = V_{1M}\hat{x}$ ，并求使驱动蛋白静止所需的阻塞力 F_S^{1M} 。

(3) 考虑系统有两个驱动蛋白的情形，两驱动蛋白间存在相互作用。如图6.2所示，当两驱动蛋白不相邻时，它们向左和向右的自由跃迁速率均为 p, q ；当两驱动蛋白相邻时，由于短程相互作用的影响，处于左侧和右侧的驱动蛋白分别只能向左和向右跃迁，自由跃迁速率变化为 u, v 。现将右侧驱动蛋白施加恒定外力 $\vec{F} = F\hat{x}$ ，而左侧驱动蛋白保持自由。

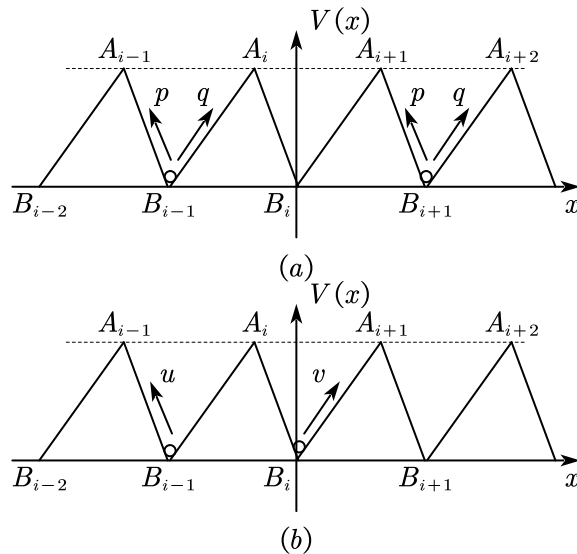


图6.2

(3.1) 用 $P_x^d(t)$ 表示 t 时刻两驱动蛋白间距为 xl 的概率, $x = 1, 2, \dots$ 。求系统处于稳态时 $P_{x=1}^d$ 的表达式, 并给出系统存在稳态的条件。

(3.2) 求此时右侧驱动蛋白的宏观运动速度 $\vec{V}_{2M} = V_{2M}\hat{x}$ 和阻塞力 F_S^{2M} 。基于所得结果, 判断以下说法是否正确:

(a) 由于相互作用影响, 阻塞力大小 $|F_S^{2M}| > |F_S^{1M}|$;

(b) 由于相互作用影响, 施加相同大小的力时, 稳态速度 $V_{2M} > V_{1M}$ 。

解:

(1) 恒定外力等效于势场:

$$V_{\text{ext}}(x) = -Fx \quad (1)$$

这导致势垒高度发生变化:

$$\begin{cases} \Delta E_l = \Delta E + F(1 - \delta)l \\ \Delta E_r = \Delta E - F\delta l \end{cases} \quad (2)$$

故根据题设:

$$\begin{cases} p_1 = pe^{-\frac{F(1-\delta)l}{k_B T}} \\ q_1 = qe^{\frac{F\delta l}{k_B T}} \end{cases} \quad (3)$$

(2)

(2.1) dt 时间内, 驱动蛋白离开 B_i 的概率为 $(p_1 + q_1)P_i(t)dt$, 由 B_{i-1} 和 B_{i+1} 进入 B_i 的概率为 $q_1P_{i-1}(t)dt + p_1P_{i+1}(t)dt$ 。因此:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -(p_1 + q_1)P_i(t) + q_1P_{i-1}(t) + p_1P_{i+1}(t) \quad (4)$$

(2.2) 驱动蛋白在 t 时刻的平均位置:

$$x(t) = \sum_i il \cdot P_i(t) \quad (5)$$

宏观运动速度为:

$$V_{1M} = \sum_i il \cdot \frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_i il \cdot [-(p_1 + q_1)P_i(t) + q_1P_{i-1}(t) + p_1P_{i+1}(t)] \quad (6)$$

概率归一化条件:

$$\sum_i P_i(t) = 1 \quad (7)$$

由此推出:

$$\sum_i i P_{i-1}(t) = \sum_i (i+1)P_i(t) = 1 + \sum_i i P_i(t) \quad (8)$$

代入 (6) 式, 化简得到:

$$V_{1M} = l(q_1 - p_1) = le^{-\frac{F(1-\delta)l}{k_B T}} \left(qe^{\frac{Fl}{k_B T}} - p \right) \quad (9)$$

当 $V_{1M} = 0$ 时, 阻塞力:

$$F_S^{1M} = \frac{k_B T}{l} \ln \frac{p}{q} \quad (10)$$

由于 $p < q$, 阻塞力 $F_S^{1M} < 0$, 表明阻塞力沿着与运动相反的方向。

(3) 在两个驱动蛋白之间有相互作用的情形, 直接计算宏观运动速度 V_{2M} 有些困难。为此, 我们先计算驱动蛋白间距的概率分布, 再来计算宏观运动速度 V_{2M} 。

(3.1) 记 v_1 为外力条件下右侧驱动蛋白向右侧的跃迁速率:

$$v_1 = v e^{\frac{F\delta l}{k_B T}} \quad (11)$$

各个 $d = xl$ 状态间的转移关系可以分析如下。对于间距 $x \geq 3$ ：

$$\frac{dP_x^d(t)}{dt} = (p + q_1)P_{x-1}^d(t) + (p_1 + q)P_{x+1}^d(t) - (p + q + p_1 + q_1)P_x^d(t) \quad (12)$$

对 $x = 1$ 和 $x = 2$ ：

$$\frac{dP_1^d(t)}{dt} = (p_1 + q)P_2^d(t) - (u + v_1)P_1^d(t) \quad (13)$$

$$\frac{dP_2^d(t)}{dt} = (u + v_1)P_1^d(t) + (p_1 + q)P_3^d(t) - (p + q + p_1 + q_1)P_2^d(t) \quad (14)$$

稳态时， $\frac{dP_x^d(t)}{dt} = 0$ ；根据 (12) ~ (14) 式推出：

$$P_2^d = \frac{u + v_1}{q + p_1} P_1^d \quad (15)$$

$$P_3^d = -\frac{u + v_1}{q + p_1} P_1^d + \left(1 + \frac{p + q_1}{q + p_1}\right) P_2^d = \frac{p + q_1}{q + p_1} P_2^d \quad (16)$$

$$P_n^d = \frac{p + q_1}{q + p_1} P_{n-1}^d, \quad n \geq 3 \quad (17)$$

记 $\Omega = \frac{p + q_1}{q + p_1}$, $\Omega_1 = \frac{u + v_1}{q + p_1}$, 则 $P_2^d = \Omega_1 P_1^d$, $P_n^d = \Omega^{n-2} \Omega_1 P_1^d (n \geq 3)$ 。根据归一化条件：

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P_n^d = 1 \Rightarrow P_1^d \left[1 + \Omega_1 \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \Omega^i \right) \right] = 1 \quad (18)$$

上式中等比数列求和收敛的条件即为系统存在稳定态的条件：

$$\Omega < 1 \Rightarrow q - p > q_1 - p_1 = q e^{\frac{F\delta l}{k_B T}} - p e^{-\frac{F(1-\delta)l}{k_B T}} \quad (19)$$

注意到 (19) 式右侧 $q e^{\frac{F\delta l}{k_B T}} - p e^{-\frac{F(1-\delta)l}{k_B T}}$ 随 F 的增大而单调递增，因此为使上式成立：

$$F < 0 \quad (20)$$

当条件满足时，(18) 式给出：

$$P_1^d = \frac{1 - \Omega}{1 - \Omega + \Omega_1} \quad (21)$$

代入得到：

$$P_1^d = \frac{q + p_1 - p - q_1}{q + p_1 + u + v_1 - p - q_1} = \frac{q + p e^{-\frac{F(1-\delta)l}{k_B T}} - p - q e^{\frac{F\delta l}{k_B T}}}{q + p e^{-\frac{F(1-\delta)l}{k_B T}} + u + v e^{\frac{F\delta l}{k_B T}} - p - q e^{\frac{F\delta l}{k_B T}}} \quad (22)$$

(3.2) 当 $d \geq 2l$ 时，左侧驱动蛋白可以视作不存在，此时右侧驱动蛋白运动速度

$$V(d \geq 2l) = V_{1M} = l(q_1 - p_1) \quad (23)$$

当 $d = l$ 时，右侧驱动蛋白只能向右跃迁：

$$V(d = l) = l v_1 \quad (24)$$

因此，右侧驱动蛋白的宏观运动速度即为：

$$V_{2M} = V(d \geq 2l) \cdot P(d \geq 2l) + V(d = l) \cdot P(d = l) \quad (25)$$

利用 $P(d = l) = P_1^d$, $P(d \geq 2l) = 1 - P_1^d$ ，代入化简得到：

$$V_{2M} = l \frac{(q-p)v_1 + u(q_1 - p_1)}{q + p_1 + u + v_1 - p - q_1} = l e^{-\frac{F(1-\delta)l}{k_B T}} \frac{(q-p)v e^{\frac{Fl}{k_B T}} + u \left(q e^{\frac{Fl}{k_B T}} - p \right)}{q + p e^{-\frac{F(1-\delta)l}{k_B T}} + u + v e^{\frac{F\delta l}{k_B T}} - p - q e^{\frac{F\delta l}{k_B T}}} \quad (26)$$

当 $V_{2M} = 0$ 时：

$$F_S^{2M} = \frac{k_B T}{l} \ln \frac{pu}{qu + v(q-p)} \quad (27)$$

由于 $q > p$ ，阻塞力大小满足 $|F_S^{2M}| > |F_S^{1M}|$ ，这表明说法（a）是正确的。

对（26）式与（9）式作差：

$$V_{2M} - V_{1M} = l \frac{(q-p-q_1+p_1)(v_1-q_1+p_1)}{q+p_1+u+v_1-p-q_1} \quad (28)$$

稳定条件（19）式表明分子中 $(q-p-q_1+p_1)$ 必为正。因此， $V_{2M} - V_{1M}$ 的符号由 $v_1 - q_1 + p_1$ 的符号决定。由于

$$v_1 - q_1 + p_1 = e^{\frac{F\delta l}{k_B T}} \left(v - q + p e^{-\frac{Fl}{k_B T}} \right) \quad (29)$$

可以看出， $V_{2M} - V_{1M}$ 的符号取决于相互作用对 v 的影响。以 $F = 0$ 情形为例，当相互作用为强吸引时， $v \ll q - p$ 是完全有可能的，此时 $V_{2M} < V_{1M}$ 。因此，说法（b）是错误的。

本题的参考文献：

1. MacDonald, C. T., Gibbs, J. H. and Pipkin, A. C. (1968). Kinetics of biopolymerization on nucleic acid templates. Biopolymers, 6: 1-25. <https://doi.org/10.1002/bip.1968.360060102>
2. Campàs, O., Kafri, Y., Zeldovich, K. B., Casademunt, J. and Joanny, J.-F. (2006). Collective Dynamics of Interacting Molecular Motors. Phys. Rev. Lett., 038101. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.038101>. 这里讨论了 N 个驱动蛋白的情形。

评分标准：本题满分 50 分。

第（1）问 5 分：（1）式 2 分，（3）式 3 分；

第（2）问 16 分：

第（2.1）小问 4 分：（4）式 4 分；

第（2.2）小问 12 分：（5）（6）式各 2 分，（7）（8）式各 1 分，（9）（10）式各 3 分；

第（3）问 29 分：

第（3.1）小问 17 分：（11）式 1 分，（12）（13）（14）各 2 分，（15）（17）（18）（19）式各 1 分，（20）式 2 分，（22）式 3 分；

第（3.2）小问 12 分：（25）式 4 分，（26）（27）式各 3 分，每个判断各 1 分。

七、（40 分）陆末-格尔克干涉仪（Lummer-Gehrcke Interferometer）

陆末-格尔克干涉仪是一种专门用来研究光谱精细结构的干涉仪，其主要光路图如下图 7.1 所示。此干涉仪主要由一块长的平行平面玻璃板或晶体石英板构成，板的一端固定有一个棱镜 S 。光源发出的光束经棱镜 S 进入板内，在出射后被透镜 L 收集，在其焦平面上形成干涉图样。在所观察的范围内，光线在板内的反射角度接近全反射临界角，此时其反射率趋于 1。已知板的长度为 l 、高度为 h ，有 $l \gg h$ ，平行板与棱镜的折射率均为 n ，其余空间中的折射率为 1，光源的波长为 λ_0 并带有小的展宽，棱镜的尺寸可以忽略。

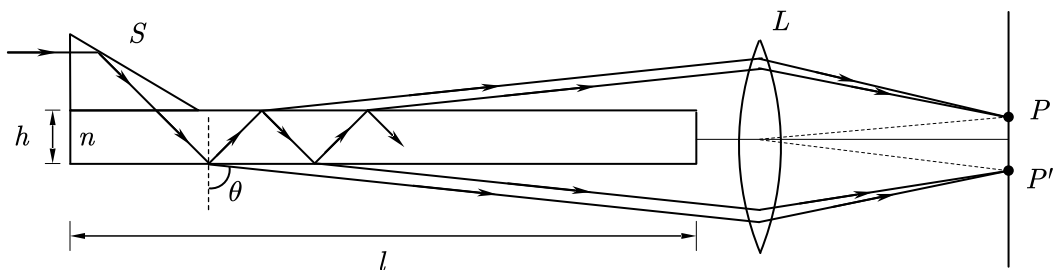


图7.1 陆末-格尔克干涉仪光路图

(1) 如图7.1所示，考虑出射角度为 θ 的一束光线，其汇聚于焦平面上的 P 、 P' 两点。设光线从空气入射至板时的振幅反射率、透射率为 r 、 t ，从板中出射至空气时的振幅反射率、透射率为 r' 、 t' ，有斯托克斯倒逆关系：

$$\begin{cases} r' = -r \\ r^2 + tt' = 1 \end{cases}$$

(1.1) 设从板的上侧、下侧出射的光束数量均为 p ($p \gg 1$)，相邻两束出射光之间的相位差为 δ ，请给出 p 、 δ 的表达式。请求出 P 、 P' 两点处光强的表达式，用 p 、 δ 以及能量反射率 $R = r^2$ 表示，其中可以包含自行选定的比例系数。当 θ 接近 90° 时，认为 $p \rightarrow \infty$ 会带来较大的误差，请解释其原因。

(1.2) 在透镜的焦平面上，干涉主极大在何处取到？此时干涉条纹的宽度、光强分布与 $p \rightarrow \infty$ 时的干涉条纹相比有什么区别？

(2) 一个干涉仪的分辨本领 $R.P.$ 被定义为：

$$R.P. = \frac{\text{光源的波长 } \lambda_0}{\text{可以分辨的最小波长 } \Delta\lambda}$$

而其可以分辨的最小波长 $\Delta\lambda$ 可以大致使用瑞利判据来判断：当两组条纹之间的间距大于条纹的半峰宽度时，可以认为这两组条纹是可分辨的。在这一小问中，我们均在透镜 L 的焦点附近观察条纹，并且无需考虑介质的色散。

(2.1) 设相位差为 $\delta = \delta_0 \pm \frac{\varepsilon}{2}$ 处为干涉条纹强度等于其峰值一半的位置，请在 $p(1-R) \ll 1$ 、 $\varepsilon \ll 1$ 但 $p\varepsilon$ 为正常数量级的近似下求出 ε 。

(2.2) 请结合瑞利判据，求出陆末-格尔克干涉仪的分辨本领 $R.P.$ ，用 l, n, λ_0 表示。

解：(1)

(1.1) 设光线在平板内的折射角为 θ' ，则：

$$p = \frac{l}{2h \tan \theta'} = \frac{l}{2h} \sqrt{\frac{n^2}{\sin^2 \theta} - 1} \quad (1)$$

相邻两束光线的相位差为：

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(2n \frac{h}{\cos \theta'} - 2h \sin \theta \tan \theta' \right) = \frac{4\pi n h \cos \theta'}{\lambda_0} = \frac{4\pi h}{\lambda_0} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \quad (2)$$

先考虑 P' 点处的光强，汇聚的光线的振幅依次为：

$$t'A, t'r'^2 A e^{i\delta}, \dots, t'r'^{2(p-1)} A e^{i(p-1)\delta}$$

其中 A 是刚射入板中光线的振幅。故有：

$$A(P') = \sum_{k=0}^{p-1} t t' r'^{2k} A e^{ik\delta} = \frac{1 - r'^{2p} e^{ip\delta}}{1 - r'^2 e^{i\delta}} t' A \quad (3)$$

可得：

$$I(P') = \frac{1 - 2R^p \cos p\delta + R^{2p}}{1 - 2R \cos \delta + R^2} I_0 = \frac{1 + \frac{4R^p}{(1-R^p)^2} \sin^2 \frac{p\delta}{2} (1-R^p)^2}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2}} I_0 \quad (4)$$

其中 $I_0 = |t'A|^2$ ，同理，对 P 点有：

$$A(P) = \sum_{k=0}^{p-1} t' r'^{2k+1} A e^{ik\delta} = \frac{1 - r'^{2p} e^{ip\delta}}{1 - r'^2 e^{i\delta}} t' r' A \quad (5)$$

$$I(P) = \frac{1 - 2R^p \cos p\delta + R^{2p}}{1 - 2R \cos \delta + R^2} R I_0 = \frac{1 + \frac{4R^p}{(1-R^p)^2} \sin^2 \frac{p\delta}{2} (1-R^p)^2}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\delta}{2}} R \frac{(1-R^p)^2}{(1-R)^2} I_0 \quad (6)$$

当 θ 接近 90° 时，有 $R \rightarrow 1$ ，故 R^p 仍不可被视为小量，若忽略其会带来较大的误差。

(1.2) 在焦平面上，干涉主极大的条件为：

$$\frac{\delta}{2} = m\pi, \quad m \in Z \quad (7)$$

即：

$$\sin \theta = \sqrt{n^2 - \left(\frac{m\lambda_0}{2h}\right)^2} \quad (8)$$

可以发现干涉条纹主极大的位置仍与 $p \rightarrow \infty$ 时相同，但由于余项的存在，干涉条纹的半峰宽度会增加，并且在相邻的主极大之间会出现若干次极大。

(2)

(2.1) 按照题意，有：

$$\frac{1 + \frac{4R^p}{(1-R^p)^2} \sin^2 \frac{p\varepsilon}{4}}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varepsilon}{4}} = \frac{1}{2} \quad (9)$$

即：

$$\frac{4R^p}{(1-R^p)^2} \sin^2 \frac{p\varepsilon}{4} - \frac{1}{2} \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2} = 0 \quad (10)$$

在 $R \rightarrow 1$ 时，有：

$$\frac{1 - R^p}{1 - R} \approx p \quad (11)$$

故化简可得：

$$\sin^2 \frac{p\varepsilon}{4} - \frac{p^2 \varepsilon^2}{32} = 0 \quad (12)$$

经过数值计算可得：

$$\varepsilon = \frac{5.566}{p} \approx 5.566 \frac{2h}{l\sqrt{n^2 - 1}} \quad (13)$$

(2.2) 按照瑞利判据，应有：

$$\left| \frac{d\delta}{d\lambda} \right| \Delta\lambda = \varepsilon \quad (14)$$

在透镜 L 的焦点附近，有：

$$\frac{d\delta}{d\lambda} \approx -\frac{4\pi h}{\lambda_0^2} \sqrt{n^2 - 1} \quad (15)$$

可得：

$$R.P. = \frac{1}{5.566} \frac{2\pi l(n^2 - 1)}{\lambda_0} \quad (16)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 25 分：

第（1.1）小问 20 分：（1）式 1 分，（2）式 2 分，（3）（4）（5）（6）式各 4 分，解释原因 1 分；

第（1.2）小问 5 分：（7）式 1 分，（8）式 2 分，讨论 2 分；

第（2）问 15 分：

第（2.1）小问 10 分：（9）（10）（11）（12）（13）式各 2 分；

第（2.2）小问 5 分：（15）式 1 分，（14）（16）式各 2 分。



版权信息

命题人

陈 炆 付亦轩 李贝尔 任泓锦 魏哲宇 余博文 张行健

审题人

陈 炆 付亦轩 李贝尔 任泓锦 魏哲宇 余博文 张行健

联系方式



微信公众号
CPHOS



官方网站
www.cphos.cn



CPHOS 论坛

邮箱

service@cphos.cn

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考