

第 28 届 CPHOS 物理竞赛联考（决赛模拟赛）

理论试题

本试题于 2025 年 10 月 11 日 8:00 发布，最后更新于 2025 年 10 月 11 日 01:00。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

答题卡上传

2025/10/11 12:00 - 2025/10/14 18:00

阅卷

2025/10/15 08:00 - 2025/10/18 20:00

非正式成绩

2025/10/19 08:00

成绩申诉

2025/10/19 09:00 - 2025/10/19 18:00

正式成绩

2025/10/20 20:00

考生须知

1. 理论试题共 **8** 页，理论答题卡共 **7** 页，答题时间 **180** 分钟，试题满分 **320** 分。
2. 请在答题卡的指定答题区域内答题，试题和草稿纸上的内容将不会作为评分参考，不可申请答题卡加页。
3. 若发现试题存在问题，请向领队（教练）反映，由其转达至相关微信群聊。
4. 试题答案及相关分析均会在官方网站 www.cphos.cn 上发布。
5. 本次考试定位难度为决赛。

一、（40 分）有关光学的一些问题

（1）理想光具组的核心思想是将复杂元件等效成一个元件进行处理，从而避免逐次成像的繁琐计算。我们先考虑双透镜光具组的光线矩阵，入射方向的透镜焦距为 f_1 ，出射方向的透镜焦距为 f_2 ，两透镜之间的距离为 D 。

（1.1）这个双透镜光具组的光线矩阵可以变换成单个透镜的矩阵形式。建立物方主面，像方主面和等效的透镜焦距，使其成像效果等效于前述双透镜光具组。求出物方主面，像方主面到等效透镜的距离 u, v 和等效的透镜焦距 f 。

（1.2）考虑一束 $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ 入射的平行光，为使其出射时为 $\begin{pmatrix} kr \\ 0 \end{pmatrix}$ ，求出 f_1, f_2 和 D 满足的关系，现在

让入射光与主轴有一些小小的偏角，即入射光在穿过 f_1 前为 $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$ ，求出射光在穿过 f_2 后与光轴的夹角 $\Delta\theta$ 以及出射位置与原出射位置的偏差 Δr （均用 D 表示）。

（2）在有些时候，傍轴近似条件不再成立，本小问将探究两种不同的光学面下光的传播，注意，本小问涉及到的数值答案请用弧度制表示并且保留三位小数，涉及反三角函数的请统一使用 \arcsin 表示。

（2.1）如图 1.1 所示，球状光学面的半径是 R ，光学面右侧折射率为 n ，左侧折射率为 1，现有一束光从球心左侧 $u + R$ 处射入，与光轴夹角为 θ ，现求出射光线与光轴夹角 δ 。

（2.2）带入数据 $u = 3 \text{ m}, R = 4 \text{ m}, n = 1.5, \theta = \frac{\pi}{6}$ ，求出射光线和光轴夹角 δ （以逆时针偏转为正）。

(2.3) 如图 1.2 所示, 光学面是一个抛物线光学面, 抛物线的焦距是 $\frac{p}{2}$, 光学面右侧折射率为 n , 左侧折射率为 1, 现有一束光从焦点左侧 $u + \frac{p}{2}$ 处射入, 与光轴夹角为 θ , 现求出射光线与光轴夹角 δ 。

(2.4) 带入数据 $u = 3 \text{ m}$, $p = 4 \text{ m}$, $n = 1.5$, $\theta = \frac{\pi}{6}$, 求出射光线和光轴夹角 δ (以逆时针偏转为正)。

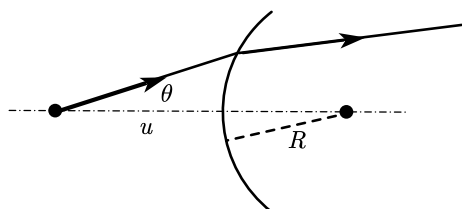


图1.1

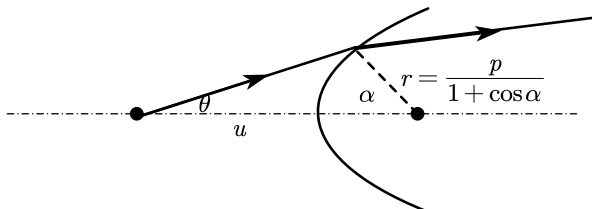


图1.2

二、(40分)

如图2.1所示, 一根匀质不可伸长细绳一端固定于一点A, 另一端跨过一固定圆柱后悬吊着一个物块, 点A和圆柱圆心等高, 间距为 d 。绳总长 L , 质量线密度为 λ , 圆柱与绳之间的摩擦系数为 μ , 物块质量为 m 。用绳左端和圆柱的切点与圆柱圆心的连线相对于水平面的夹角 θ_0 描述系统的位形。已知整个系统保持静止不动, 绳悬链部分未绷紧, 重力加速度大小为 g 。给定数据: $\mu = 0.150$, $L/R = 16.0$, $d/R = 5.60$ 。结果的数值部分请保留3位有效数字。

(1) 当 $\theta_0 = 10.0^\circ$ 时, 计算 m 的最大值。请用 λ 和 R 表示你的答案。

(2) 接(1), 将 m 取最大值时的绳固化为一条光滑轨道。一质量为 M 的质点在 $t = 0$ 时刻从圆柱的顶端以大小为 v_0 , 方向水平向左的初速度沿轨道下滑。计算使得质点恰好能够到达点A且到达时速度大小为0的 v_0 的值, 并给出取此 v_0 时质点第一次到达点A的时刻 t_f 。认为所有的碰撞都是完全非弹性的, 不考虑质点直接平抛到轨道左侧末端的情况。请用 g 和 R 表示你的答案。

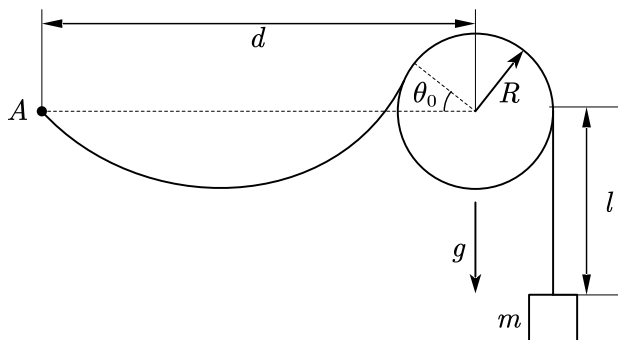


图2.1

三、(40分) 绝热活塞

一个有绝热壁和一个绝热底面的圆筒开口向上竖直放置, 用一个圆盘形的绝热活塞把一定量的氩气(可看作理想气体)封闭住。活塞的质量为 $m = 0.64 \text{ kg}$, 面积为 $A = 80 \text{ cm}^2$, 可以在圆筒中无摩擦滑动却不漏气。圆筒整体放置在真空中。初态, 气体的温度为 $T_i = 293 \text{ K}$, 在稳定平衡时, 活塞底到容器底的距离为 $y_i = 1 \text{ m}$ 。重力加速度为 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, 普适气体常数为 $R = 8.315 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ 。

考虑对活塞的一个扰动，扰动初速度为 u_i ，这个速度远小于分子热运动速率，不会引起湍流，又较大从而整体的准静态模型不适用。取如下模型进行考虑：

气体分为两部分，主体部分和活塞表面层；

主体部分是准静态的，温度和压强均匀；

活塞表面层的体积非常小，内部具有一个均匀的略小于主体的压强，温度与主体部分相同。

这个模型下，表面层会对活塞造成曳引，乃至最终使活塞停止。

(1) 求出氩气的总质量 m_{Ar} 的表达式和数值结果；

(2) 求出最终活塞底到容器底的距离 y_f 和最终的气体温度 T_f 的表达式和数值结果， $u_i = 5.0 \text{ m/s}$ ；

(3) 求出整个过程气体熵增 ΔS 的表达式和数值结果；

(4) 估计表面层的压强 p^* ，近似到 u_i 的一阶项，用主体部分压强 p ，温度 T 和已知量的字母表示；

接下来考虑最后的衰减过程，此阶段有 $\frac{|y - y_f|}{y_f} \ll 1$ ，以及 $u \ll \sqrt{\frac{m_{Ar}}{m} \frac{RT}{\mu}}$ （考虑每一个 \ll 对应一阶小）。

(5) 求此阶段活塞的运动方程 $y(t) = y(t_0)f(t - t_0)$ ，其中 $y(t_0)$ 已知， $\dot{y}(t_0) = 0$ ，且可以保证 t_0 时刻后系统已进入所描述的阶段；特别地，求出整个阻尼运动的周期（不考虑振幅衰减之后的运动周期）的表达式和数值结果；

(6) 请根据上述模型的特征，大致描述表面层的体积在什么量级。

四、（40 分）长初级直线感应弹射电动机

直线感应弹射电动机可以看作由旋转感应电动机沿其径向切开至轴心处，并沿圆周展开成直线而得成的。根据初级与次级之间的相对长度，直线感应弹射电动机分为长初级和短初级两种结构。图 4.1 中的结构称为单边直线感应弹射电动机。这种结构的直线感应弹射电动机除了产生电磁推力外，还产生与推力方向相垂直的法向力，且法向力对直线弹射电动机的运行和控制会产生较大影响。例如，在轮轨车辆牵引中，法向力可以改变轮轨之间的摩擦力；在磁悬浮车辆牵引中，该力也将影响悬浮气隙的大小。在电磁弹射系统中，为了使次级受到的法向合力为零，可以考虑在次级的两边各安装一套初级部件，形成双边直线感应弹射电动机。当双边直线感应弹射电动机中的单边电流（线负荷）的大小与单边结构相同时，其输出功率和推力为单边结构的两倍。本题旨在研究一维简化下长初级直线感应弹射电动机内的磁场。本题中虚数单位记作 j 。

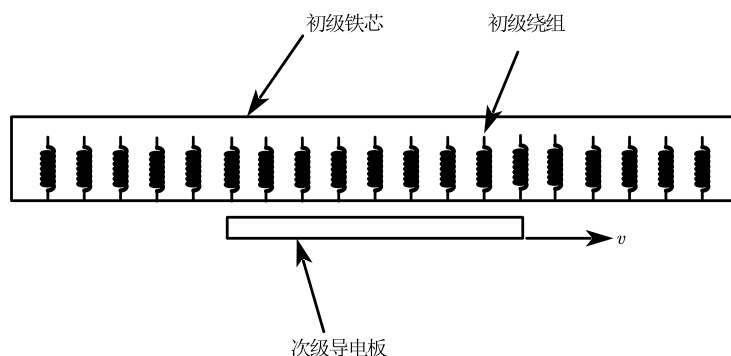


图4.1. 长初级单边直线感应弹射电动机

一维简化下长初级直线感应弹射电动机如图 4.2 所示,记次级导电板电导率为 σ , 次级导电板厚度为 $2d$, 次级导电板速度大小为 v , 次级长度为 $2p\tau$, 双边初级间距为 $2g_e$, p 是次级所对应的极对数, τ 是极距, 为了简化分析, 特作如下假设:

I. H 和 B 仅有 y 分量, J_1, J_2 和 E 仅有 z 分量。

II. 所有场量仅是空间位置 x 的函数, 且随时间 t 正弦交变。

III. 忽略初级铁芯开断的影响, 即认为初级铁芯和绕组沿纵向为无限长。

IV. 用等效行波电流层代替载流初级绕组磁动势的作用。

V. 不计铁芯饱和的影响, 忽略铁耗, 即认为铁芯磁导率 $\mu_{Fe} = \infty$, 电导率 $\sigma_{Fe} = 0$ 。

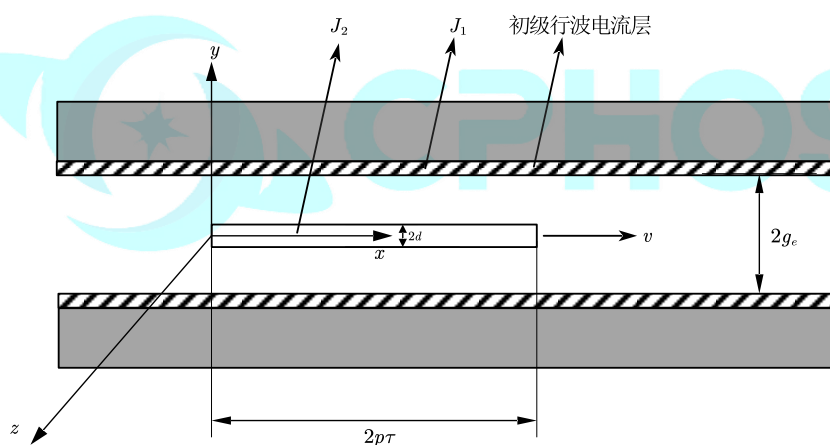


图4.2. 长初级双边直线感应弹射电动机

(1) 磁场分析。

(1.1) 在等效行波电流层电流面密度 $J_1 = J_{m1}e^{j(\omega t - \frac{\pi}{\tau}x)}$ （一次谐波）的假设下, 求解有效区域内 ($0 \leq x \leq 2p\tau$) 磁场 $H(x, t)$ 满足的方程。

(1.2) 稳态情况下求解 $H(x, t)$ 。答案中可以含中间量, 但请给出中间量的表达式。

(2) 动力分析, 本问答案中不可保留 (1.2) 中中间量。

(2.1) 在 $\frac{\tau\mu_0\sigma v}{4\pi} \gg 1$ 下, 计算电场强度 $E(x, t)$ 。保留零阶即可。

(2.2) 已知初级铁芯宽度为 $2a$, 计算次级导电板受到的推力大小。

五、(40 分) 扔飞盘

飞盘是一种滑翔玩具或体育用品, 一般由注塑塑料制成, 直径约 20 至 25 厘米。它可

用于娱乐和竞技，如飞盘游戏中的投掷和接球。而飞盘旋转时会产生稳定的陀螺力，使其既能准确瞄准，又能投掷远距离。本题我们将尝试分析飞盘的运动，不考虑重力。

为简化分析，我们认为飞盘是半径为 r ，厚度极薄为 $h \ll r$ 的质量为 m 的圆柱体。其质量分布为旋转对称的，记垂直盘面的转动惯量为 I_1 ，沿盘面半径的转动惯量为 I_2 。飞盘初始扔出时，速度为 $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$ ，旋转角速度为 $\Omega_0 \hat{y} + \omega_0 \hat{z}$ ，其中 $\omega_0 \ll \Omega_0$ ，如图 5.1 所示。飞盘在飞行途中还会受到空气阻力的影响，对于迎风面（即物体表面上法向速度 \vec{v}_n 朝向面外的部分）单位面积所受阻力为 $\vec{f} = -\eta \vec{v}_n$ 。

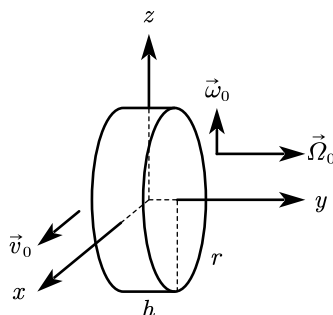


图5.1. 初始扔出飞盘时运动示意图

(1) 请给出一般情况下飞盘所受外力 \vec{F} 以及相对质心的外力矩 \vec{M} 。用速度 \vec{v} ，垂直盘面的角速度分量 $\vec{\Omega}$ ，平行盘面的角速度分量 $\vec{\omega}$ 以及其他参数表达。

(2) 请在一阶近似下给出 $\vec{\Omega}$ 随时间变化的表达式。并根据计算结果说明飞盘盘面朝向是否稳定。

提示：在刚体本动系内，刚体的转动满足欧拉方程：

$$\begin{cases} M_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \\ M_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 \\ M_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \end{cases} \quad (1)$$

(3) 请在一阶近似下给出速度 \vec{v} 随时间的表达式。并根据计算结果说明飞盘速度朝向是否稳定。

六、(60 分) 有限长弦球链

在固体物理中，晶格振动是研究原子集体运动的重要课题。实际原子间的作用形式相当复杂，一种过渡模型是用经典的两端张紧的弦球链进行模拟，通过施加不同的边界条件以定性地对系统的色散关系进行研究。本题将逐步引导推导出有限长周期性弦球链的色散关系，本题中裸弦质量线密度为 μ ，两端施以张力 T ，沿着弦方向建立坐标轴 x 轴。

(1) 首先考虑最简单的无限长裸弦系统，如图 6.1 所示。记弦上某处的小波动位移为 $u = u(x, t)$ ，弦运动的波动方程可以写出：

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

考虑波动解 $u = A e^{i(kx - \omega t)}$ ，求出满足的色散关系和波速。

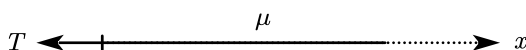


图6.1

(2) 现在弦上等间距地串有质量为 m 的原子，相邻原子间距离为 a ，如图 6.2 所示。将第 N 个原子和第 $N+1$ 个原子间的弦记为第 N 段带，在每个带内弦的波动满足(1)中的色散关系，设第 j 段带内弦的波动位移为 $u_j = A_j e^{i(kx - \omega t)} + B_j e^{i(-kx - \omega t)}$ ($x \in [0, a)$)。



图6.2

(2.1) 相邻带内弦的振幅关系可以用 2×2 传递矩阵 M 表示, 即

$$\begin{pmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} \quad (2)$$

根据相邻区间的边界条件求出 M , 用无量纲数 $\varphi = \omega a \sqrt{\frac{\mu}{T}}$, $q = \frac{m\omega}{2\sqrt{T\mu}}$ 表示, 以下均认为 M 可以对角化。

(2.2) 无限长弦球链中允许传播的模式要求振幅不发散, 传递矩阵的特征值 $\lambda_{1,2}$ 应为一对共轭复数。引入等效波矢 κ 满足 $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\kappa a}$, 求出该弦球链上波动的色散关系 $\kappa = \kappa(\omega)$, 有解时要求 ω 满足什么条件?

(3) 原子链的边界往往会带来奇异性。考虑有限长链, 如图 6.3 所示, N 个质量为 m 的原子以等间距 a 串在弦链上, 最左端与最右端原子分别距离固定边界 $\tau a, (1-\tau)a$ ($\tau \in [0,1]$)。固定边界处弦位移为零, 同样在每个区间内弦的波动满足 (1) 中的色散关系, 设第 j 段带内弦的波动为 $u_j = A_j e^{i(kx - \omega t)} + B_j e^{i(-kx - \omega t)}$ ($x \in [0, a]$), 从左到右依次对区间带编号 $0 \sim N$ 。

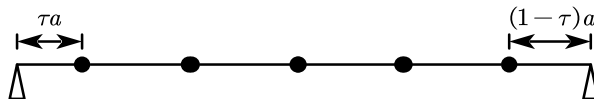


图6.3

(3.1) 证明此时能够传播的解需要满足如下形式:

$$\begin{pmatrix} e^{-i(1-\tau)\varphi} & e^{i(1-\tau)\varphi} \end{pmatrix} M^{N-1} \begin{pmatrix} e^{i\tau\varphi}(1+iq) - e^{-i\tau\varphi}iq \\ -e^{-i\tau\varphi}(1-iq) - e^{i\tau\varphi}iq \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

其中 φ, q 定义与 (2.1) 相同, 左侧右侧分别为 $1 \times 2, 2 \times 1$ 矩阵。

(3.2) 求解上述方程需要计算 M^{N-1} , 已知:

$$M^{N-1} = \begin{pmatrix} A - Be^{-i\varphi}(1-iq) & Be^{-i\varphi}iq \\ -Be^{i\varphi}iq & A - Be^{i\varphi}(1+iq) \end{pmatrix} \quad (4)$$

求出 A, B 表达式, 用 $\lambda_{1,2}, N$ 表示。

(3.3) 求出该有限长原子链中允许的 ω 满足的方程 (用 φ, q, N, τ 表示), 并根据 $\lambda_{1,2}$ 的值指出对应的振幅的传递模式, 其中当 $|\lambda| \neq 1$ 时, 对应局域模; $|\lambda| = 1$ 时, 为传播模。

七、(60 分) 盗鲁效应

W. G. Unruh 发现, 在平直时空中具有固有加速度 g 的观者如同处在一个温度为 $T_u(g)$ 的热浴中, 这被称为盗鲁效应。下面我们将考虑一个无质量标量场, 通过分析其粒子数的期望值解释盗鲁效应。

Part 1 坐标变换

固有加速度即观者在自身参考系中 (准确地说, 是瞬时相对静止局域惯性系中) 的加速度。

(1A) 求 $t = 0$ 时位于 $x = \frac{c^2}{g}$ 的, 有正 x 方向恒定固有加速度 g 的粒子的运动轨迹, 用固有时 τ 表示为 $(t(\tau), x(\tau))$:

引入一个 2 维闵氏时空, 在惯性系坐标 (ct, x) 下, 其度规 (线元长度) 为 $ds^2 = (cdt)^2 - (dx)^2$ 。

(1B) 取类光坐标 $u \equiv ct - x, v \equiv ct + x$, 请将度规转换到 (u, v) 坐标下;

(1C) 现在希望构造加速观者坐标 $(c\tau, \xi)$ 。 τ 是 (1A) 中具有固有加速度 g 观者的, 零点取在 $t = 0$ 时的固有时; ξ 是另外一个坐标, 使得度规具有以下形式 $ds^2 = \Omega^2(c\tau, \xi)((cd\tau)^2 - (d\xi)^2)$ 。写出坐标 $(c\tau, \xi)$ 下的度规, 并求出 $\tau(t, x), \xi(t, x)$ 。

提示: 构造类光坐标 $\tilde{u} = c\tau - \xi, \tilde{v} = c\tau + \xi$, 并取 $u = u(\tilde{u}), v = v(\tilde{v})$ 。

Part 2 盎鲁效应

考虑一个无质量标量场 ϕ 的激发。在坐标 (ct, x) 下, ϕ 中 u 平面波的形式为 $e^{-i\omega u} = e^{-i\omega(ct-x)}$; 与其对应, 在坐标 $(c\tau, \xi)$ 下, ϕ 中 u 平面波的形式为 $e^{-i\Omega\tilde{u}} = e^{-i\Omega(c\tau-\xi)}$ 。

形式上可以为坐标 (ct, x) 下的场引入升、降算符 $\hat{a}_\omega^+, \hat{a}_\omega^-$; 坐标 $(c\tau, \xi)$ 下则是 $\hat{b}_\Omega^+, \hat{b}_\Omega^-$ 。其中升算符是降算符的厄密共轭 (转置并取复共轭)。

已知在两种坐标下, u 平面波场算符 $\hat{\phi}_u$ 相等

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_u &= \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\omega}} (e^{-i\omega u} \hat{a}_\omega^- + e^{i\omega u} \hat{a}_\omega^+) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\Omega}} (e^{-i\Omega\tilde{u}} \hat{b}_\Omega^- + e^{i\Omega\tilde{u}} \hat{b}_\Omega^+)\end{aligned}\quad (1)$$

于是新的场算符可以用旧的场算符表示 (Боголюбов 变换)

$$\hat{b}_\Omega^- = \int_0^{+\infty} d\omega (\alpha_{\Omega\omega} \hat{a}_\omega^- - \beta_{\Omega\omega} \hat{a}_\omega^+) \quad (2)$$

(2A) 考察 \hat{a}_ω^- 的系数, 求出 $\alpha_{\Omega\omega}, \beta_{\Omega\omega}$ 的积分表达式;

提示: 利用

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\Omega-\Omega')\tilde{u}} d\tilde{u} = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') \quad (3)$$

(2B) 把上面积分中的 \tilde{u} 用 u 表示, 处理积分从而导出 $\frac{|\alpha_{\Omega\omega}|^2}{|\beta_{\Omega\omega}|^2}$;

提示: 由复平面上的围道积分可以得到积分公式

$$\int_0^{+\infty} e^{ix} x^{-iz-1} dx = e^{\frac{\pi z}{2}} \Gamma(-iz) \quad (4)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix} x^{-iz-1} dx = e^{-\frac{\pi z}{2}} \Gamma(-iz) \quad (5)$$

(2C) 已知加速观者看到的真空中的平均粒子数是

$$\langle \hat{N}_\Omega \rangle = \int d\omega |\beta_{\Omega\omega}|^2 \quad (6)$$

记 V 为全空间体积 (在此题里面是一维空间的体积), 则由升降算符的归一性可以得到

$$\int_0^{+\infty} d\omega (|\alpha_{\Omega\omega}|^2 - |\beta_{\Omega\omega}|^2) = V \quad (7)$$

求出加速观者看到的粒子数密度, 从而给出盎鲁温度 $T_u(g)$ 。

版权信息

命题人

黄启宸 李锴瑞 张鑫睿 常皓凌 吴恒旭 张颢续

审题人

黄启宸 李锴瑞 张鑫睿 常皓凌 吴恒旭 张颢续 付亦轩 刘家亦

联系方式

微信公众号
CPHOS官方网站
www.cphos.cn

CPHOS 论坛

邮箱

service@cphos.cn

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考

