

第 28 届 CPHOS 物理竞赛联考（决赛模拟赛）

理论试题参考答案及评分标准

本试题于 2025 年 10 月 11 日 8:00 发布，最后更新于 2025 年 10 月 11 日 00:58。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

一、（40 分）有关光学的一些问题

（1）理想光具组的核心思想是将复杂元件等效成一个元件进行处理，从而避免逐次成像的繁琐计算。我们先考虑双透镜光具组的光线矩阵，入射方向的透镜焦距为 f_1 ，出射方向的透镜焦距为 f_2 ，两透镜之间的距离为 D 。

（1.1）这个双透镜光具组的光线矩阵可以变换成单个透镜的矩阵形式。建立物方主面，像方主面和等效的透镜焦距，使其成像效果等效于前述双透镜光具组。求出物方主面，像方主面到等效透镜的距离 u, v 和等效的透镜焦距 f 。

（1.2）考虑一束 $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ 入射的平行光，为使其出射时为 $\begin{pmatrix} kr \\ 0 \end{pmatrix}$ ，求出 f_1, f_2 和 D 满足的关系，现在让入射光与主轴有一些小小的偏角，即入射光在穿过 f_1 前为 $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}$ ，求出射光在穿过 f_2 后与光轴的夹角 $\Delta\theta$ 以及出射位置与原出射位置的偏差 Δr （均用 D 表示）。

（2）在有些时候，傍轴近似条件不再成立，本小问将探究两种不同的光学面下光的传播，注意，本小问涉及到的数值答案请用弧度制表示并且保留三位小数，涉及反三角函数的请统一使用 \arcsin 表示。

（2.1）如图 1.1 所示，球状光学面的半径是 R ，光学面右侧折射率为 n ，左侧折射率为 1，现有一束光从球心左侧 $u + R$ 处射入，与光轴夹角为 θ ，现求出射光线与光轴夹角 δ 。

（2.2）带入数据 $u = 3 \text{ m}, R = 4 \text{ m}, n = 1.5, \theta = \frac{\pi}{6}$ ，求出射光线和光轴夹角 δ （以逆时针偏转为正）。

（2.3）如图 1.2 所示，光学面是一个抛物线光学面，抛物线的焦距是 $\frac{p}{2}$ ，光学面右侧折射率为 n ，左侧折射率为 1，现有一束光从焦点左侧 $u + \frac{p}{2}$ 处射入，与光轴夹角为 θ ，现求出射光线与光轴夹角 δ 。

（2.4）带入数据 $u = 3 \text{ m}, p = 4 \text{ m}, n = 1.5, \theta = \frac{\pi}{6}$ ，求出射光线和光轴夹角 δ （以逆时针偏转为正）。

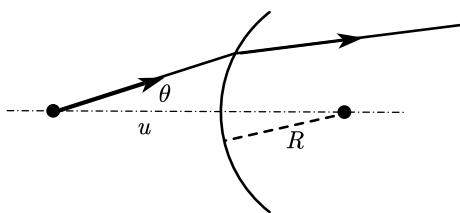


图1.1

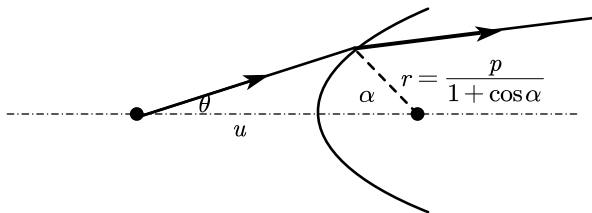


图1.2

解：（1）（1.1）首先写出双透镜光具组的光线矩阵：

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{D}{f_1} & D \\ \frac{D}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} & 1 - \frac{D}{f_2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

再写出单个透镜的光线矩阵，注意由于等效成像面的位置在两端的透镜之外，所以其对应传播距离为负：

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{v}{f} & -\frac{uv}{f} - u - v \\ -\frac{1}{f} & 1 + \frac{u}{f} \end{pmatrix} \quad (2)$$

为使二者等效，对比系数得：

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - D} \quad (3)$$

$$u = \frac{f_2 D}{D - f_1 - f_2} \quad (4)$$

$$v = \frac{f_1 D}{D - f_1 - f_2} \quad (5)$$

（1.2）带入（5）式得：

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{D}{f_1} & D \\ \frac{D}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} & 1 - \frac{D}{f_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kr \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

则可以得到：

$$f_1 = -\frac{D}{k-1} \quad (7)$$

$$f_2 = \frac{kD}{k-1} \quad (8)$$

带回得到完整的光线矩阵：

$$M = \begin{pmatrix} k & D \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \quad (9)$$

最后计算出半径与夹角的偏差：

$$\begin{pmatrix} k & D \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kr + \Delta r \\ \Delta \theta \end{pmatrix} \quad (10)$$

则可以得到：

$$\Delta r = D\theta \quad (11)$$

$$\Delta \theta = \frac{\theta}{k} \quad (12)$$

（2）（2.1）如答图 1 所示，假设入射角为 i ，出射角为 γ ，入射点所在半径与光轴夹角为 α 。由正弦定理：

$$\frac{R}{\sin \theta} = \frac{R+u}{\sin i} \quad (13)$$

则可以得到:

$$i = \arcsin\left(\frac{u+R}{R}\sin\theta\right) \quad (14)$$

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{u+R}{nR}\sin\theta\right) \quad (15)$$

由此可以得到:

$$\delta = \gamma - \alpha = \arcsin\left(\frac{u+R}{nR}\sin\theta\right) - \arcsin\left(\frac{u+R}{R}\sin\theta\right) + \theta \quad (16)$$

(2.2) 带入数据得:

$$\delta = 0.081\text{rad} \quad (17)$$

(2.3) 如答图 2 所示, 假设入射角为 i , 出射角为 γ , 入射点与焦点连线与光轴夹角为 α 。

由正弦定理:

$$\frac{\frac{p}{1+\cos\alpha}}{\sin\theta} = \frac{\frac{p}{2}+u}{\sin i} \quad (18)$$

计算得到:

$$p \cos\theta \sin\alpha + \left(\frac{p}{2}-u\right) \sin\theta \cos\alpha = \left(\frac{p}{2}+u\right) \quad (19)$$

则可以得:

$$\alpha = \arcsin \frac{\left(\frac{p}{2}+u\right) \sin\theta}{\sqrt{p^2 \cos^2\theta + \left(\frac{p}{2}-u\right)^2 \sin^2\theta}} - \arcsin \frac{\left(\frac{p}{2}-u\right) \sin\theta}{\sqrt{p^2 \cos^2\theta + \left(\frac{p}{2}-u\right)^2 \sin^2\theta}} \quad (20)$$

由于 $i = \alpha + \theta$, $\sin i = n \sin \gamma$ 可以得到:

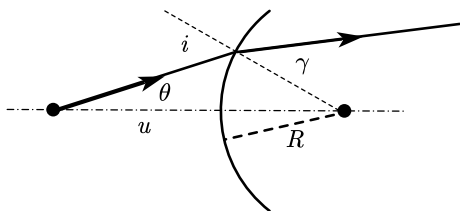
$$\delta = \gamma - \alpha = \arcsin\left(\frac{\sin(\alpha+\theta)}{n}\right) - \alpha \quad (21)$$

带入 α , 可得:

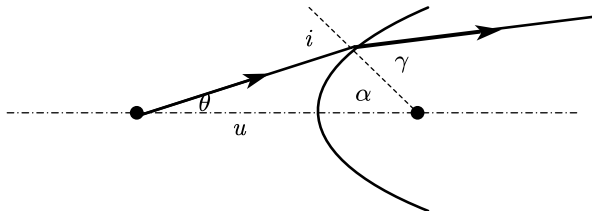
$$\delta = \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin\left(\arcsin \frac{\left(\frac{p}{2}+u\right) \sin\theta}{\sqrt{p^2 \cos^2\theta + \left(\frac{p}{2}-u\right)^2 \sin^2\theta}} - \arcsin \frac{\left(\frac{p}{2}-u\right) \sin\theta}{\sqrt{p^2 \cos^2\theta + \left(\frac{p}{2}-u\right)^2 \sin^2\theta}} + \theta\right)\right) - \arcsin \frac{\left(\frac{p}{2}+u\right) \sin\theta}{\sqrt{p^2 \cos^2\theta + \left(\frac{p}{2}-u\right)^2 \sin^2\theta}} + \arcsin \frac{\left(\frac{p}{2}-u\right) \sin\theta}{\sqrt{p^2 \cos^2\theta + \left(\frac{p}{2}-u\right)^2 \sin^2\theta}} \quad (22)$$

(2.4) 带入数据得:

$$\delta = -0.214 \text{ rad} \quad (23)$$



答图1



答图2

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 18 分:

第 (1.1) 小问 9 分: (1) (2) 式 3 分, (3) (4) (5) 式各 1 分;

第 (1.2) 小问 9 分: (6) (10) 式 2 分, (7) (8) (9) (11) (12) 式各 1 分;

第 (2) 问 22 分:

第 (2.1) 小问 6 分: (14) (15) (16) 式各 2 分;

第 (2.2) 小问 2 分: (17) 式 2 分;

第 (2.3) 小问 12 分: (18) (19) (21) 式各 2 分, (20) (22) 式 3 分;

第 (2.4) 小问 2 分: (23) 式 2 分。

二、(40 分)

如图 2.1 所示, 一根匀质不可伸长细绳一端固定于一点 A , 另一端跨过一固定圆柱后悬吊着一个物块, 点 A 和圆柱圆心等高, 间距为 d 。绳总长 L , 质量线密度为 λ , 圆柱与绳之间的摩擦系数为 μ , 物块质量为 m 。用绳左端和圆柱的切点与圆柱圆心的连线相对于水平面的夹角 θ_0 描述系统的位形。已知整个系统保持静止不动, 绳悬链部分未绷直, 重力加速度大小为 g 。给定数据: $\mu = 0.150, L/R = 16.0, d/R = 5.60$ 。结果的数值部分请保留 3 位有效数字。

(1) 当 $\theta_0 = 10.0^\circ$ 时, 计算 m 的最大值。请用 λ 和 R 表示你的答案。

(2) 接 (1), 将 m 取最大值时的绳固化为一条光滑轨道。一质量为 M 的质点在 $t = 0$ 时刻从圆柱的顶端以大小为 v_0 , 方向水平向左的初速度沿轨道下滑。计算使得质点恰好能够到达点 A 且到达时速度大小为 0 的 v_0 的值, 并给出取此 v_0 时质点第一次到达点 A 的时刻 t_f 。认为所有的碰撞都是完全非弹性的, 不考虑质点直接平抛到轨道左侧末端的情况。请用 g 和 R 表示你的答案。

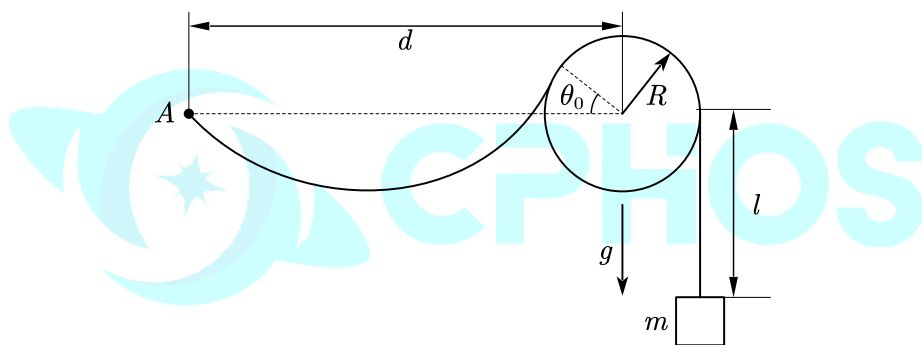


图 2.1

解: (1) 以细绳固定端点为原点, 水平向右为 x 轴, 竖直向上为 y 轴建立平面直角坐标架。明显绳可分为 3 个部分: 悬链线部分、圆柱上部分、自由悬挂部分。先考虑悬链线部分。静力平衡:

$$\begin{cases} (T + dT) \cos(\theta + d\theta) = T \cos \theta \\ (T + dT) \sin(\theta + d\theta) = T \sin \theta + (\lambda ds)g \end{cases} \quad (1)$$

其中:

$$\tan \theta \equiv \frac{dy}{dx}, \quad ds \equiv \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (2)$$

积分:

$$T \cos \theta = T_0 \quad (3)$$

代回:

$$\frac{\sin \theta d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\lambda g}{T_0} dy \quad (4)$$

积分:

$$\frac{1}{\cos \theta} - C_0 = \frac{\lambda g}{T_0} y \quad (5)$$

带入 $\cos \theta$ 有:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(C_0 + \frac{\lambda g y}{T_0}\right)^2 - 1}} \quad (6)$$

积分:

$$y = \frac{T_0}{\lambda g} \left(\cosh \left(\frac{\lambda g}{T_0} x - \operatorname{arcosh}(C_0) \right) - C_0 \right) \quad (7)$$

边界条件:

$$\begin{cases} y|_{x=d-R\cos\theta_0} = R\sin\theta_0 \\ \left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=R\sin\theta_0} = \tan\theta_0 \end{cases} \quad (8)$$

有:

$$\begin{cases} \frac{\lambda g R \sin\theta_0}{T_0} + C_0 = \cosh \left(\frac{\lambda g}{T_0} (d - R\cos\theta_0) - \operatorname{arcosh}(C_0) \right) \\ \sinh \left(\frac{\lambda g}{T_0} (d - R\cos\theta_0) - \operatorname{arcosh}(C_0) \right) = \cot\theta_0 \end{cases} \quad (9)$$

代入数据有:

$$\begin{cases} C_0 = 5.5766696 \\ \frac{\lambda g R}{T_0} = 1.0486773 \end{cases} \quad (10)$$

悬链线方程:

$$\frac{y}{R} = 0.95358216 \left(\cosh \left(1.0486773 \frac{x}{R} - 2.4036014 \right) - 5.5766696 \right) \quad (11)$$

悬链线部分绳长:

$$l_1 = \int_0^{d-R\cos\theta_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_0^{d-R\cos\theta_0} \cosh \left(\frac{\lambda g}{T_0} x - \operatorname{arcosh}(C_0) \right) dx \quad (12)$$

带入数值:

$$l_1 = 10.639650R \quad (13)$$

考虑圆柱上部分。静力平衡:

$$\begin{cases} |dT - \lambda g R \cos\theta d\theta| \leq \mu dN \\ dN = T d\theta + \lambda g R \sin\theta d\theta \end{cases} \quad (14)$$

整理:

$$-\mu T d\theta - \mu \lambda g R \sin\theta d\theta + \lambda g R \cos\theta d\theta \leq dT \leq \mu T d\theta + \mu \lambda g R \sin\theta d\theta + \lambda g R \cos\theta d\theta \quad (15)$$

积分:

$$\frac{T_2 e^{-\mu\pi} - T_1 e^{-\mu\theta_0}}{\lambda g R} \leq \int_{\theta_0}^{\pi} (\mu \sin\theta + \cos\theta) e^{-\mu\theta} d\theta = \frac{2\mu}{1+\mu^2} e^{-\mu\pi} + \frac{(\mu^2-1)\sin\theta_0 + 2\mu\cos\theta_0}{\mu^2+1} e^{-\mu\theta_0} \quad (16)$$

其中:

$$T_1 = \frac{T_0}{\sin\theta_0} \quad (17)$$

自由悬挂部分:

$$T_2 = mg + \lambda g l \quad (18)$$

总绳长:

$$L = l_1 + R(\pi - \theta_0) + l \quad (19)$$

代入数值:

$$\begin{cases} l = 2.3932905R \\ \frac{T_2}{\lambda g R} \leq 9.0551250 \end{cases} \quad (20)$$

故答案为:

$$m \leq 6.6618345\lambda R = 6.66\lambda R \quad (21)$$

(2) 圆周运动部分, 能量守恒:

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 + MgR(1 - \cos \phi) = \frac{1}{2}Mv^2 \quad (22)$$

支持力:

$$N = Mg \cos \phi - M \frac{v^2}{R} = Mg(3 \cos \phi - 2) - \frac{Mv_0^2}{R} \quad (23)$$

脱离临界:

$$\begin{cases} \phi_0 = \arccos\left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right) < \frac{\pi}{2} - \theta_0 \\ v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gR(1 - \cos \phi_0)} = \sqrt{\frac{2}{3}gR + \frac{v_0^2}{3}} \end{cases} \quad (24)$$

用时:

$$t_1 = \int_{\phi=0}^{\phi=\phi_0} \frac{R d\phi}{v} = \int_0^{\phi_0} \frac{R}{\sqrt{v_0^2 + 2gR(1 - \cos \phi)}} d\phi \quad (25)$$

随后质点做斜抛运动直至撞上悬链线轨道。在 (1) 的坐标架下, 斜抛方程为:

$$\begin{cases} x = d - R \sin \phi_0 - v_{x0}t \\ y = R(1 - \cos \phi_0) - v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (26)$$

其中:

$$\begin{cases} v_{x0} = v_1 \cos \phi_0 = \left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right)^{3/2} \sqrt{gR} \\ v_{y0} = v_1 \sin \phi_0 = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}\right)^2} \sqrt{gR} \end{cases} \quad (27)$$

联立可以解得碰撞位置, 碰撞事件的时空坐标记为 $(t_2\sqrt{R/g}, x_2R, y_2R)$ 。引入 $p \equiv \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}}$

化简式子:

$$\begin{aligned} 1 - p^2 - p\sqrt{1 - p^4}t_2 - \frac{1}{2}t_2^2 \\ = 0.95358216 \left(\cosh \left(1.0486773 \left(\frac{d}{R} - \sqrt{1 - p^4} - p^3 t_2 \right) - 2.4036014 \right) - 5.5766696 \right) \end{aligned} \quad (28)$$

即将碰撞时质点的速度:

$$\begin{cases} v_{x2} = v_{x0} \\ v_{y2} = v_{y0} + gt_2\sqrt{R/g} \end{cases} \quad (29)$$

轨道切线方向:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_2, y=y_2} = \sinh \left(1.0486773 \frac{x_2}{R} - 2.4036014 \right) \equiv \tan \xi \quad (30)$$

碰撞后损失所有垂直于轨道的速度, 剩余速度大小为:

$$v_{\text{res}} = v_{x2} \cos \xi + v_{y2} \sin \xi \quad (31)$$

临界:

$$\frac{1}{2} M v_{\text{res}}^2 + M g y_2 R = 0 \quad (32)$$

整合所有方程可得用于解出 p 和 t_2 的方程组:

$$\begin{aligned} & \left(p^3 + (p\sqrt{1-p^4} + t_2) \sinh \left(1.0486773 \left(\frac{d}{R} - \sqrt{1-p^4} - p^3 t_2 \right) - 2.4036014 \right) \right)^2 \\ & + 2 \cosh^2 \left(1.0486773 \left(\frac{d}{R} - \sqrt{1-p^4} - p^3 t_2 \right) - 2.4036014 \right) \cdot \left(1 - p^2 - p\sqrt{1-p^4} t_2 - \frac{1}{2} t_2^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

联立 (28) (33) 式有:

$$\begin{cases} p = 0.89023588 \\ t_2 = 2.3024461 \end{cases} \quad (34)$$

那么:

$$v_0 = \sqrt{3p^2 - 2} \sqrt{gR} = 0.61445944 \sqrt{gR} = 0.614 \sqrt{gR} \quad (35)$$

下面来求时间。第一段由 (25) 式可得:

$$t_1 = 0.93008453 \sqrt{R/g} \quad (36)$$

t_2 已经算出, 然后是第三段: 在悬链线上滑行。代入数值有空间坐标:

$$\begin{cases} x_2 = 3.3657099 \\ y_2 = -3.6931626 \end{cases} \quad (37)$$

和碰撞前瞬间的速度:

$$\begin{cases} v_{x2} = 0.70552971 \sqrt{gR} \\ v_{y2} = 2.8453529 \sqrt{gR} \end{cases} \quad (38)$$

轨道切线:

$$\tan \xi = 1.3793869 \quad (39)$$

剩余速度:

$$v_{\text{res}} = v_{x2} \cos \xi + v_{y2} \sin \xi = 2.7177794 \sqrt{gR} = \sqrt{-2gy_2 R} > 0 \quad (40)$$

因此该解是合理的。用时:

$$t_3 = \int_0^{x_2 R} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}}{\sqrt{-2gy}} dx \quad (41)$$

$$t_3 = \int_0^{3.3657099} \frac{\cosh(1.0486773x - 2.4036014)}{\sqrt{1.9071643(-\cosh(1.0486773x - 2.4036014) + 5.5766696)}} dx \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (42)$$

$$t_3 = 3.7506261 \sqrt{R/g} \quad (43)$$

最后加和三段时间可得答案:

$$t_f = t_1 + t_2 \sqrt{R/g} + t_3 = 6.9831567 \sqrt{R/g} = 6.98 \sqrt{R/g} \quad (44)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 15 分: (1) (3) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (16) (20) 式 1 分, (21) 式 3 分;

第 (2) 问 25 分: (22) (23) (24) (25) (26) (27) (28) (29) (30) (31) (32) (33) (34) (36) (37) (40) (43) 式 1 分, (35) (44) 式 3 分, 验证解是合理的 2 分。

三、(40 分) 绝热活塞

一个有绝热壁和一个绝热底面的圆筒开口向上竖直放置, 用一个圆盘形的绝热活塞把一定量的氩气 (可看作理想气体) 封闭住。活塞的质量为 $m = 0.64 \text{ kg}$, 面积为 $A = 80 \text{ cm}^2$, 可以在圆筒中无摩擦滑动却不漏气。圆筒整体放置在真空中。初态, 气体的温度为 $T_i = 293 \text{ K}$, 在稳定平衡时, 活塞底到容器底的距离为 $y_i = 1 \text{ m}$ 。重力加速度为 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, 普适气体常数为 $R = 8.315 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ 。

考虑对活塞的一个扰动, 扰动初速度为 u_i , 这个速度远小于分子热运动速率, 不会引起湍流, 又较大从而整体的准静态模型不适用。取如下模型进行考虑:

气体分为两部分, 主体部分和活塞表面层;

主体部分是准静态的, 温度和压强均匀;

活塞表面层的体积非常小, 内部具有一个均匀的略小于主体的压强, 温度与主体部分相同。

这个模型下, 表面层会对活塞造成曳引, 乃至最终使活塞停止。

(1) 求出氩气的总质量 m_{Ar} 的表达式和数值结果;

(2) 求出最终活塞底到容器底的距离 y_f 和最终的气体温度 T_f 的表达式和数值结果, $u_1 = 5.0 \text{ m/s}$;

(3) 求出整个过程气体熵增 ΔS 的表达式和数值结果;

(4) 估计表面层的压强 p^* , 近似到 u_i 的一阶项, 用主体部分压强 p , 温度 T 和已知量的字母表示;

接下来考虑最后的衰减过程, 此阶段有 $\frac{|y - y_f|}{y_f} \ll 1$, 以及 $u \ll \sqrt{\frac{m_{Ar}}{m} \frac{RT}{\mu}}$ (考虑每一个 \ll 对应一阶小)。

(5) 求此阶段活塞的运动方程 $y(t) = y(t_0)f(t - t_0)$, 其中 $y(t_0)$ 已知, $\dot{y}(t_0) = 0$, 且可以保证 t_0 时刻后系统已进入所描述的阶段; 特别地, 求出整个阻尼运动的周期 (不考虑振幅衰减之后的运动周期) 的表达式和数值结果;

(6) 请根据上述模型的特征, 大致描述表面层的体积在什么量级。

解: (1) 理想气体状态方程:

$$p_i A y_i = \frac{m_{Ar}}{\mu} R T_i = \nu R T_i \quad (1)$$

力学平衡:

$$p_i A = m g \quad (2)$$

$$m_{Ar} = \frac{\mu m g y_i}{R T_i} \quad (3)$$

代值:

$$m_{Ar} = 1.03 \times 10^{-4} \text{ kg} \quad (4)$$

(2) 全局能量守恒:

$$\frac{3}{2}vRT_i + mgy_i + \frac{1}{2}mu_i^2 = \frac{3}{2}vRT_f + mgy_f \quad (5)$$

即：

$$\frac{5}{2}mgy_i + \frac{1}{2}mu_i^2 = \frac{5}{2}mgy_f \quad (6)$$

$$y_f = y_i + \frac{u_i^2}{5g} \quad (7)$$

代值：

$$y_f = 1.51 \text{ m} \quad (8)$$

又由状态方程：

$$\frac{p_i y_i}{T_i} = \frac{p_i y_f}{T_f} \quad (9)$$

$$T_f = T_i \left(1 + \frac{u_i^2}{5gy_i} \right) \quad (10)$$

代值：

$$T_f = 442 \text{ K} \quad (11)$$

（3）熵的公式：

$$\Delta S = C_p \ln \frac{T_f}{T_i} - R \ln \frac{p_f}{p_i} \quad (12)$$

$$\Delta S = \frac{5mgy_i}{2T_i} \ln \left(1 + \frac{u_i^2}{5gy_i} \right) \quad (13)$$

代值：

$$\Delta S = 2.21 \times 10^{-2} \text{ J/K} \quad (14)$$

（4）直接分析压强的来源，考虑垂直板方向上的碰撞。

速度分布：

$$f(v) = \left(\frac{\mu}{2\pi RT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu v^2}{2RT}} \quad (15)$$

考虑单分子碰撞有：

$$p^* A dt = \int_u^{+\infty} n f(v) dv (v - u) A dt \quad 2m_{mocu}(v - u) \quad (16)$$

$$p^* = \int_u^{+\infty} \left(\frac{\mu}{2\pi RT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu v^2}{2RT}} dv \quad 2nm_{mocu}(v - u)^2 \quad (17)$$

近似到一阶：

$$p^* = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mu}{2\pi RT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu v^2}{2RT}} dv \quad 2nm_{mocu}(v^2 - 2vu) \quad (18)$$

$$p = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mu}{2\pi RT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu v^2}{2RT}} dv \quad 2nm_{mocu}v^2 \quad (19)$$

$$p^* = p \left(1 - 2u \frac{\int_0^{+\infty} v e^{-\frac{\mu v^2}{2RT}} dv}{\int_0^{+\infty} v^2 e^{-\frac{\mu v^2}{2RT}} dv} \right) \quad (20)$$

$$p^* = p \left(1 - 2u \sqrt{\frac{2\mu}{\pi RT}} \right) \quad (21)$$

（5）牛顿第二定律：

$$ma = p^*A - mg \quad (22)$$

$$a = g \frac{T y_f}{T_f y} \left(1 - 2u \sqrt{\frac{2\mu}{\pi RT}} \right) - g \quad (23)$$

首先根号里的 T 可以去成 T_f 。

全局能量守恒：

$$\frac{3}{2}vRT + mgy + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}vRT_f + mgy_f \quad (24)$$

$$T = T_f \left(1 - \frac{mu^2}{3vRT_f} - \frac{2mg(y - y_f)}{3vRT_f} \right) \quad (25)$$

其中：

$$\frac{mu^2}{3vRT_f} \ll \ll 1 \quad (26)$$

故可以忽略。

$$T = T_f \left(1 - \frac{2(y - y_f)}{3y_f} \right) \quad (27)$$

$$a = g \left(\left(1 - \frac{2(y - y_f)}{3y_f} \right) \left(1 - \frac{y - y_f}{y_f} \right) \left(1 - 2u \sqrt{\frac{2\mu}{\pi RT_f}} \right) - 1 \right) = -\frac{5g}{3y_f}(y - y_f) - 2g \sqrt{\frac{2\mu}{\pi RT_f}} u \quad (28)$$

$$\ddot{y} + 2g \sqrt{\frac{2\mu}{\pi RT_f}} \dot{y} + \frac{5g}{3y_f}(y - y_f) = 0 \quad (29)$$

可以解得：

$$y(t) = y(t_0)e^{-\gamma(t-t_0)} \left(\cos \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}(t - t_0) + A \sin \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}(t - t_0) \right) \quad (30)$$

$$\dot{y}(t_0) = y(t_0) \left(-\gamma + \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} A \right) \quad (31)$$

$$y(t) = y(t_0)e^{-\gamma(t-t_0)} \left(\cos \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}(t - t_0) + \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}(t - t_0) \right) \quad (32)$$

其中：

$$\omega = \sqrt{\frac{5g}{3 \left(y_i + \frac{u_i^2}{5g} \right)}}, \gamma = g \sqrt{\frac{2\mu}{\pi RT_i \left(1 + \frac{u_i^2}{5gy_i} \right)}} \quad (33)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{1 + \frac{u_i^2}{5gy_i}}{\frac{5g}{3y_i} - \frac{2\mu g^2}{\pi RT_i}}} \quad (34)$$

代值：

$$T = 1.9 \text{ s} \quad (35)$$

(6) 厚度大概是一个平均自由程，故：

$$\delta V = \bar{\lambda} A \quad (36)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 4 分：(1) (2) (3) (4) 式 1 分；

第 (2) 问 7 分：(5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) 式 1 分；

第 (3) 问 3 分：(12) (13) (14) 式 1 分；

第 (4) 问 9 分：(15) (16) (18) (19) (21) 式 1 分，(17) (20) 式 2 分；

第 (5) 问 16 分：(22) (23) (24) (25) (26) (27) (28) (30) (31) (32) (33) (35) 式 1 分，(29) (34) 式 2 分；

第 (6) 问 1 分：(36) 式 1 分。

四、(40 分) 长初级直线感应弹射电动机

直线感应弹射电动机可以看作由旋转感应电动机沿其径向切开至轴心处，并沿圆周展开成直线而得成的。根据初级与次级之间的相对长度，直线感应弹射电动机分为长初级和短初级两种结构。图 4.1 中的结构称为单边直线感应弹射电动机。这种结构的直线感应弹射电动机除了产生电磁推力外，还产生与推力方向相垂直的法向力，且法向力对直线弹射电动机的运行和控制会产生较大影响。例如，在轮轨车辆牵引中，法向力可以改变轮轨之间的摩擦力；在磁悬浮车辆牵引中，该力也将影响悬浮气隙的大小。在电磁弹射系统中，为了使次级受到的法向合力为零，可以考虑在次级的两边各安装一套初级部件，形成双边直线感应弹射电动机。当双边直线感应弹射电动机中的单边电流（线负荷）的大小与单边结构相同时，其输出功率和推力为单边结构的两倍。本题旨在研究一维简化下长初级直线感应弹射电动机内的磁场。本题中虚数单位记作 j 。

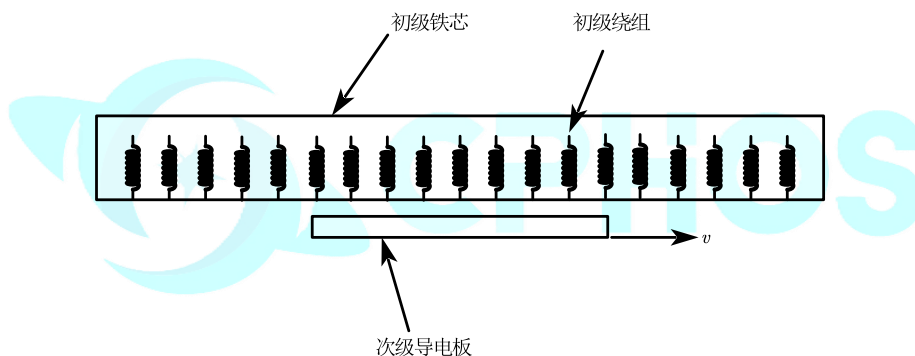


图 4.1. 长初级单边直线感应弹射电动机

一维简化下长初级直线感应弹射电动机如图 4.2 所示，记次级导电板电导率为 σ ，次级导电板厚度为 $2d$ ，次级导电板速度大小为 v ，次级长度为 $2p\tau$ ，双边初级间距为 $2g_e$ ， p 是次级所对应的极对数， τ 是极距，为了简化分析，特作如下假设：

I. H 和 B 仅有 y 分量， J_1, J_2 和 E 仅有 z 分量。

II. 所有场量仅是空间位置 x 的函数，且随时间 t 正弦交变。

III. 忽略初级铁芯开断的影响，即认为初级铁芯和绕组沿纵向为无限长。

IV. 用等效行波电流层代替载流初级绕组磁动势的作用。

V. 不计铁芯饱和的影响，忽略铁耗，即认为铁芯磁导率 $\mu_{Fe} = \infty$ ，电导率 $\sigma_{Fe} = 0$ 。

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} g_e = \frac{\partial J_1}{\partial x} + \frac{\partial J_2}{\partial x} d \quad (4)$$

将 (2) (1) 式代入 (4) 式, 得:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} g_e = -j \frac{\pi}{\tau} J_{m1} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x)} + \sigma v \mu_0 \frac{\partial H}{\partial x} d + \sigma \mu_0 d \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5)$$

(1.2)特解:

$$H_s = H_m e^{j(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x)} \quad (6)$$

代入 (5) 式, 得:

$$H_m = \frac{\pi J_{m1} \tau (j \pi^2 g_e - \sigma v \mu_0 \pi \tau d + \omega \sigma \mu_0 d \tau^2)}{\pi^4 g_e^2 + (\sigma v \mu_0 d \pi \tau - \tau^2 \omega \sigma \mu_0 d)^2} \quad (7)$$

通解:

$$\frac{\partial^2 H_\delta}{\partial x^2} g_e = \sigma v \mu_0 \frac{\partial H_\delta}{\partial x} d + \sigma \mu_0 d \frac{\partial H_\delta}{\partial t} \quad (8)$$

代入 $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$, 得:

$$\frac{\partial^2 H_\delta}{\partial x^2} g_e - \sigma v \mu_0 \frac{\partial H_\delta}{\partial x} d - j \sigma \mu_0 d \omega H_\delta = 0 \quad (9)$$

特征方程:

$$\lambda^2 - \frac{\sigma v \mu_0 d}{g_e} \lambda - \frac{j \sigma \mu_0 \omega d}{g_e} = 0 \quad (10)$$

解得:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma v \mu_0 d}{2g_e} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma v \mu_0 d}{2g_e}\right)^2 + \frac{j \sigma \mu_0 \omega d}{g_e}} \quad (11)$$

通解:

$$H_\delta = C_1 e^{j\omega t + \lambda_1 x} + C_2 e^{j\omega t + \lambda_2 x} \quad (12)$$

C_1 和 C_2 由边界条件确定, 计算 $x < 0$ 和 $x > 2p\tau$ 区域的磁场:

$$\frac{\partial H}{\partial x} g_e = J_1 \quad (13)$$

代入, 得:

$$H = \frac{j J_{m1} \tau}{g_e \pi} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x)} \quad (14)$$

磁场强度切向分量连续:

$$\begin{cases} H(x=0) = H_\delta(x=0) + H_s(x=0) \\ H(x=2p\tau) = H_\delta(x=2p\tau) + H_s(x=2p\tau) \end{cases} \quad (15)$$

得到:

$$C_1 = \left(\frac{j J_{m1} \tau}{g_e \pi} - \frac{\pi J_{m1} \tau (j \pi^2 g_e - \sigma v \mu_0 \pi \tau d + \omega \sigma \mu_0 d \tau^2)}{\pi^4 g_e^2 + (\sigma v \mu_0 d \pi \tau - \tau^2 \omega \sigma \mu_0 d)^2} \right) \frac{1 - e^{2p\tau \lambda_2}}{e^{2p\tau \lambda_1} - e^{2p\tau \lambda_2}} \quad (16)$$

$$C_2 = \left(\frac{j J_{m1} \tau}{g_e \pi} - \frac{\pi J_{m1} \tau (j \pi^2 g_e - \sigma v \mu_0 \pi \tau d + \omega \sigma \mu_0 d \tau^2)}{\pi^4 g_e^2 + (\sigma v \mu_0 d \pi \tau - \tau^2 \omega \sigma \mu_0 d)^2} \right) \frac{e^{2p\tau \lambda_1} - 1}{e^{2p\tau \lambda_1} - e^{2p\tau \lambda_2}} \quad (17)$$

代入即可得到:

$$H(x, t) = \frac{\pi J_{m1} \tau (j \pi^2 g_e - \sigma v \mu_0 \pi \tau d + \omega \sigma \mu_0 d \tau^2)}{\pi^4 g_e^2 + (\sigma v \mu_0 d \pi \tau - \tau^2 \omega \sigma \mu_0 d)^2} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x)} + C_1 e^{j\omega t + \lambda_1 x} + C_2 e^{j\omega t + \lambda_2 x} \quad (18)$$

(2) (2.1) 高速近似下:

$$H = \frac{\pi J_{m1} \tau (\pi^2 g_e - \sigma v \mu_0 \pi \tau d + \omega \sigma \mu_0 d \tau^2)}{\pi^4 g_e^2 + (\sigma v \mu_0 d \pi \tau - \tau^2 \omega \sigma \mu_0 d)^2} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x)} - \frac{J_{m1} \tau}{g_e \pi \left(j + \frac{\omega \tau \pi^2 g_e}{(\omega \tau - \pi v) \omega \mu_0 \sigma d \tau^2} \right)} e^{j\omega t - \frac{j\omega x}{v}} \quad (19)$$

电场强度：

$$E = \int \frac{\partial B}{\partial t} dx = -\omega \frac{J_{m1} \tau^2 (\pi^2 g_e - \sigma v \mu_0 \pi \tau d + \omega \sigma \mu_0 d \tau^2)}{\pi^4 g_e^2 + (\sigma v \mu_0 d \pi \tau - \tau^2 \omega \sigma \mu_0 d)^2} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{\tau} x)} + \frac{J_{m1} \tau v}{g_e \pi \left(j + \frac{\omega \tau \pi^2 g_e}{(\omega \tau - \pi v) \omega \mu_0 \sigma d \tau^2} \right)} e^{j\omega t - \frac{j\omega x}{v}} \quad (20)$$

(2.2)先计算对双边初级铁芯的推力：

$$F_1 = 2 \times 2a \int_0^{2\pi\tau} \frac{1}{2} \text{Re}(J_1^* \cdot B) dx \quad (21)$$

次级导电板受力大小与对初级铁芯的推力大小相等：

$$F_1 = F_2 \quad (22)$$

次级导电板受力大小：

$$F_2 = \frac{4a\mu_0 p \tau \pi J_{m1}^2 \tau (\pi^2 g_e - \sigma v \mu_0 \pi \tau d + \omega \sigma \mu_0 d \tau^2)}{\pi^4 g_e^2 + (\sigma v \mu_0 d \pi \tau - \tau^2 \omega \sigma \mu_0 d)^2} + \frac{2a\mu_0 J_{m1}^2 \tau^2 v (1 - e^{-j\frac{2\pi\tau\omega}{v}})}{g_e \pi \left(-\frac{j\omega \tau \pi^2 g_e}{\omega \mu_0 \sigma d \tau^2} + \omega \tau - \pi v \right)} \quad (23)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 25 分：

第（1.1）小问 7 分（1）（2）（4）式各 1 分，（3）（5）式各 2 分；

第（1.2）小问 18 分（7）（10）（13）（15）（18）式各 2 分，（6）（8）（9）（11）（12）（14）（16）（17）式各 1 分；

第（2）问 15 分：

第（2.1）小问 9 分：（19）式 6 分，（20）式 3 分；

第（2.2）小问 6 分：（21）（22）（23）式各 2 分。

五、（40 分）扔飞盘

飞盘是一种滑翔玩具或体育用品，一般由注塑塑料制成，直径约 20 至 25 厘米。它可用于娱乐和竞技，如飞盘游戏中的投掷和接球。而飞盘旋转时会产生稳定的陀螺力，使其既能准确瞄准，又能投掷远距离。本题我们将尝试分析飞盘的运动，不考虑重力。

为简化分析，我们认为飞盘是半径为 r ，厚度极薄为 $h \ll r$ 的质量为 m 的圆柱体。其质量分布为旋转对称的，记垂直盘面的转动惯量为 I_1 ，沿盘面半径的转动惯量为 I_2 。飞盘初始扔出时，速度为 $\vec{v}_0 = v_0 \hat{x}$ ，旋转角速度为 $\Omega_0 \hat{y} + \omega_0 \hat{z}$ ，其中 $\omega_0 \ll \Omega_0$ ，如图 5.1 所示。飞盘在飞行途中还会受到空气阻力的影响，对于迎风面（即物体表面上法向速度 \vec{v}_n 朝向面外的部分）单位面积所受阻力为 $\vec{f} = -\eta \vec{v}_n$ 。

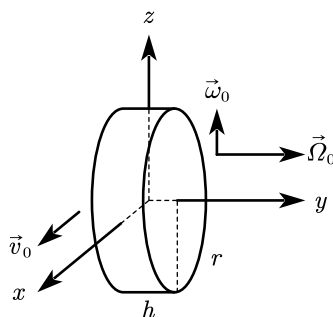


图5.1. 初始扔出飞盘时运动示意图

（1）请给出一般情况下飞盘所受外力 \vec{F} 以及相对质心的外力矩 \vec{M} 。用速度 \vec{v} ，垂直盘面的角速度分量 $\vec{\Omega}$ ，平行盘面的角速度分量 $\vec{\omega}$ 以及其他参数表达。

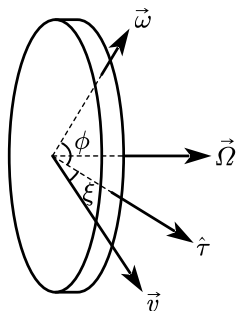
(2) 请在一阶近似下给出 $\vec{\Omega}$ 随时间变化的表达式。并根据计算结果说明飞盘盘面朝向是否稳定。

提示：在刚体本动系内，刚体的转动满足欧拉方程：

$$\begin{cases} M_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \\ M_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 \\ M_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \end{cases} \quad (1)$$

(3) 请在一阶近似下给出速度 \vec{v} 随时间的表达式。并根据计算结果说明飞盘速度朝向是否稳定。

解：(1) 如答图 1 所示一般情况下飞盘的运动，飞盘所受外力包括两个迎风面。



答图1. 一般情况下飞盘运动示意图

对于斜侧面受力为：

$$\vec{F}_1 = -\hat{t} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \eta v \cos \xi \cos^2 \theta h r d\theta = -\frac{\pi}{2} \eta h r v \cos \xi \hat{t} \quad (1)$$

对于盘面受力为：

$$\vec{F}_2 = \pi \eta r^2 v \sin \xi \hat{\Omega} \quad (2)$$

根据几何关系不难得到：

$$\begin{cases} v \cos \xi \hat{t} = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{\Omega}) \hat{\Omega} \\ v \sin \xi \hat{\Omega} = -(\vec{v} \cdot \hat{\Omega}) \hat{\Omega} \end{cases} \quad (3)$$

代入得到所受外力为：

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \pi \eta r h \vec{v} - \pi \eta r \left(r - \frac{h}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{\Omega}) \frac{\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|^2} \quad (4)$$

所受外力矩则为：

$$\vec{M} = -\int_0^r \int_0^{2\pi} \eta \vec{\omega} \rho^3 \sin^2 \theta d\theta d\rho = -\frac{\pi}{4} \eta r^4 \vec{\omega} \quad (5)$$

(2) 根据欧拉方程可以得到：

$$\begin{cases} 0 = I_1 \dot{\omega}_1 \\ -\frac{\pi}{4} \eta r^4 \omega_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_2) \omega_3 \omega_1 \\ -\frac{\pi}{4} \eta r^4 \omega_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 \end{cases} \quad (6)$$

不难发现 $\omega_1 = \Omega_0$ ，令 $\omega_{2,3} \sim e^{i\lambda t}$ ，代入得到特征方程：

$$\begin{vmatrix} iI_2\lambda + \frac{\pi}{4}\eta r^4 & (I_1 - I_2)\Omega_0 \\ -(I_1 - I_2)\Omega_0 & iI_3\lambda + \frac{\pi}{4}\eta r^4 \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

解得特征值为：

$$\lambda = \pm \frac{I_1 - I_2}{I_2} \Omega_0 + \frac{i\pi\eta r^4}{4I_2} \quad (8)$$

这代表在刚体本动系中, $\vec{\omega}$ 以角速度 $\frac{I_1 - I_2}{I_2} \vec{\Omega}_0$ 绕轴旋转, 且其模长满足 $\omega = \omega_0 e^{-\frac{\pi\eta r^4}{4I_2} t}$ 。在大地系中有:

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\Omega}, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{I_1}{I_2} \vec{\Omega} \times \vec{\omega} \quad (9)$$

对应零阶解为:

$$\vec{\Omega} = \Omega_0 \hat{y}, \quad \vec{\omega} = 0 \quad (10)$$

在一阶近似下, 由式 (9) 可得:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 \hat{y} \times \vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} = \sin \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 t \hat{x} + \cos \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 t \hat{z} \quad (11)$$

令 $\vec{\Omega} = \Omega_0 (\hat{y} + \hat{\Omega}_1)$, 则:

$$\frac{d\hat{\Omega}_1}{dt} = \omega \vec{\omega} \times \hat{y} = \omega_0 e^{-\frac{\pi\eta r^4}{4I_2} t} \left(-\cos \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 t \hat{x} + \sin \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 t \hat{z} \right) \quad (12)$$

解得:

$$\hat{\Omega}_1 = \frac{\omega_0}{\left(\frac{\pi\eta r^4}{4I_2}\right)^2 + \left(\frac{I_1}{I_2} \Omega_0\right)^2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\pi\eta r^4}{4I_2} \cos \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 t - \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 \sin \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 t\right) e^{-\frac{\pi\eta r^4}{4I_2} t} - \frac{\pi\eta r^4}{4I_2} \\ 0 \\ \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 - \left(\frac{I_1}{I_2} \Omega_0 \cos \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 t + \frac{\pi\eta r^4}{4I_2} \sin \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 t\right) e^{-\frac{\pi\eta r^4}{4I_2} t} \end{pmatrix} \quad (13)$$

最后得到:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} = \Omega_0 \hat{y} + \frac{\omega_0 \Omega_0}{\left(\frac{\pi\eta r^4}{4I_2}\right)^2 + \left(\frac{I_1}{I_2} \Omega_0\right)^2} & \left[\left(\frac{\pi\eta r^4}{4I_2} \cos \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 t - \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 \sin \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 t \right) e^{-\frac{\pi\eta r^4}{4I_2} t} - \frac{\pi\eta r^4}{4I_2} \right] \hat{x} \\ & + \frac{\omega_0 \Omega_0}{\left(\frac{\pi\eta r^4}{4I_2}\right)^2 + \left(\frac{I_1}{I_2} \Omega_0\right)^2} \left[\frac{I_1}{I_2} \Omega_0 - \left(\frac{I_1}{I_2} \Omega_0 \cos \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 t + \frac{\pi\eta r^4}{4I_2} \sin \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 t \right) e^{-\frac{\pi\eta r^4}{4I_2} t} \right] \hat{z} \end{aligned} \quad (14)$$

根据 (14) 式, $\vec{\Omega}$ 仅仅在 $\Omega_0 \hat{y}$ 周围小幅变动并逐渐趋于稳定值, 因此盘面朝向是趋于稳定的。

(3) 根据 (4) 式可以得到:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{2} \pi\eta r h \vec{v} - \pi\eta r \left(r - \frac{h}{2} \right) (\vec{v} \cdot \hat{\Omega}) \hat{\Omega} \quad (15)$$

零阶解为:

$$\vec{v} = v_0 e^{-\frac{\pi\eta r h}{2m} t} \hat{x} \quad (16)$$

在一阶近似下可以得到:

$$m \frac{d\vec{v}_1}{dt} = -\frac{1}{2} \pi\eta r h \vec{v}_1 - \pi\eta r \left(r - \frac{h}{2} \right) (v_0 \hat{\Omega}_1 \cdot \hat{x} + \vec{v}_1 \cdot \hat{y}) \hat{y} \quad (17)$$

解得:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 = \frac{\pi\eta r \left(r - \frac{h}{2} \right) v_0 \omega_0}{m \left[\left(\frac{\pi\eta r^4}{4I_2} \right)^2 + \left(\frac{I_1}{I_2} \Omega_0 \right)^2 \right]} & \cdot \\ \left[\frac{mr^2}{4I_2} \left(1 - e^{-\frac{\pi\eta r^2}{m} t} \right) + \frac{\left(\frac{mr^2}{4I_2} - \left(\frac{mr^2}{4I_2} \right)^2 + \left(\frac{mI_1 \Omega_0}{\pi\eta r^2 I_2} \right)^2 \right) \left(e^{-\frac{\pi\eta r^2}{m} t} - e^{-\frac{\pi\eta r^4}{4I_2} t} \cos \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 t \right) - \left(\frac{mr^2}{2I_2} - 1 \right) \frac{mI_1 \Omega_0}{\pi\eta r^2 I_2} e^{-\frac{\pi\eta r^4}{4I_2} t} \sin \frac{I_1}{I_2} \Omega_0 t}{\left(1 - \frac{mr^2}{4I_2} \right)^2 + \left(\frac{mI_1 \Omega_0}{\pi\eta r^2 I_2} \right)^2} \right] \hat{y} \end{aligned} \quad (18)$$

因此在一阶近似下:

$$\vec{v} = v_0 e^{-\frac{\pi\eta r h}{2m}t} \hat{x} + \frac{\pi\eta r \left(r - \frac{h}{2}\right) v_0 \omega_0}{m \left[\left(\frac{\pi\eta r^4}{4I_2}\right)^2 + \left(\frac{I_1 \Omega_0}{I_2}\right)^2 \right]} \cdot \left[\frac{mr^2}{4I_2} \left(1 - e^{-\frac{\pi\eta r^2}{m}t}\right) + \frac{\left(\frac{mr^2}{4I_2} - \left(\frac{mr^2}{4I_2}\right)^2 + \left(\frac{mI_1 \Omega_0}{\pi\eta r^2 I_2}\right)^2\right) \left(e^{-\frac{\pi\eta r^2}{m}t} - e^{-\frac{\pi\eta r^4}{4I_2}t} \cos \frac{I_1 \Omega_0}{I_2} t\right) - \left(\frac{mr^2}{2I_2} - 1\right) \frac{mI_1 \Omega_0}{\pi\eta r^2 I_2} e^{-\frac{\pi\eta r^4}{4I_2}t} \sin \frac{I_1 \Omega_0}{I_2} t} \right] \hat{y} \quad (19)$$

根据 (20) 式, 在较短时间内的飞行速度 \vec{v} 仅仅会有朝向 \hat{y} 的微小偏移并逐渐趋于稳定值, 因此飞盘速度朝向是稳定的。

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 10 分: (1) (2) (3) (4) (5) 式 2 分;

第 (2) 问 19 分: (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) 式 2 分, (14) 式 4 分, 说明稳定性 1 分;

第 (3) 问 11 分: (15) (16) (17) 式 2 分, (19) 式 4 分, 说明稳定性 1 分。

附录:

(1) 一般运动情形下的迎风面实际上并非完整的一个圆盘面, 而是由正反两侧的圆盘面的一部分组成。但是其受力效果等价于对一个完整的圆盘面分析的效果。

(2) 根据欧拉方程实际上可以得到:

$$|\vec{\Omega}| = \Omega_0$$

该等式是严格成立的。但是在后续近似处理中不难发现答案 (14) 式是不满足这个等式的, 这是截断近似丢失精度的结果。

六、(60 分) 有限长弦球链

在固体物理中, 晶格振动是研究原子集体运动的重要课题。实际原子间的作用形式相当复杂, 一种过渡模型是用经典的两端张紧的弦球链进行模拟, 通过施加不同的边界条件以定性地对系统的色散关系进行研究。本题将逐步引导推导出有限长周期性弦球链的色散关系, 本题中裸弦质量线密度为 μ , 两端施以张力 T , 沿着弦方向建立坐标轴 x 轴。

(1) 首先考虑最简单的无限长裸弦系统, 如图 6.1 所示。记弦上某处的小波动位移为 $u = u(x, t)$, 弦运动的波动方程可以写出:

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

考虑波动解 $u = Ae^{i(kx - \omega t)}$, 求出满足的色散关系和波速。

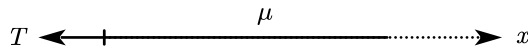


图 6.1

(2) 现在弦上等间距地串有质量为 m 的原子, 相邻原子间距离为 a , 如图 6.2 所示。将第 N 个原子和第 $N + 1$ 个原子间的弦记为第 N 段带, 在每个带内弦的波动满足 (1) 中的色散关系, 设第 j 段带内弦的波动位移为 $u_j = A_j e^{i(kx - \omega t)} + B_j e^{i(-kx - \omega t)}$ ($x \in [0, a]$)。



图 6.2

(2.1) 相邻带内弦的振幅关系可以用 2×2 传递矩阵 M 表示, 即

$$\begin{pmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} \quad (2)$$

根据相邻区间的边界条件求出 M ，用无量纲数 $\varphi = \omega a \sqrt{\frac{\mu}{T}}$, $q = \frac{m\omega}{2\sqrt{T\mu}}$ 表示，以下均认为 M 可以对角化。

(2.2) 无限长弦球链中允许传播的模式要求振幅不发散，传递矩阵的特征值 $\lambda_{1,2}$ 应为一对共轭复数。引入等效波矢 κ 满足 $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\kappa a}$ ，求出该弦球链上波动的色散关系 $\kappa = \kappa(\omega)$ ，有解时要求 ω 满足什么条件？

(3) 原子链的边界往往会带来奇异性。考虑有限长链，如图 6.3 所示， N 个质量为 m 的原子以等间距 a 串在弦链上，最左端与最右端原子分别距离固定边界 $\tau a, (1-\tau)a$ ($\tau \in [0,1]$)。固定边界处弦位移为零，同样在每个区间内弦的波动满足 (1) 中的色散关系，设第 j 段带内弦的波动为 $u_j = A_j e^{i(kx-\omega t)} + B_j e^{i(-kx-\omega t)}$ ($x \in [0, a]$)，从左到右依次对区间带编号 $0 \sim N$ 。

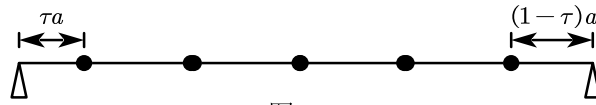


图 6.3

(3.1) 证明此时能够传播的解需要满足如下形式：

$$\begin{pmatrix} e^{-i(1-\tau)\varphi} & e^{i(1-\tau)\varphi} \end{pmatrix} M^{N-1} \begin{pmatrix} e^{i\tau\varphi}(1+iq) - e^{-i\tau\varphi}iq \\ -e^{-i\tau\varphi}(1-iq) - e^{i\tau\varphi}iq \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

其中 φ, q 定义与 (2.1) 相同，左侧右侧分别为 $1 \times 2, 2 \times 1$ 矩阵。

(3.2) 求解上述方程需要计算 M^{N-1} ，已知：

$$M^{N-1} = \begin{pmatrix} A - Be^{-i\varphi}(1-iq) & Be^{-i\varphi}iq \\ -Be^{i\varphi}iq & A - Be^{i\varphi}(1+iq) \end{pmatrix} \quad (4)$$

求出 A, B 表达式，用 $\lambda_{1,2}, N$ 表示。

(3.3) 求出该有限长原子链中允许的 ω 满足的方程 (用 φ, q, N, τ 表示)，并根据 $\lambda_{1,2}$ 的值指出对应的振幅的传递模式，其中当 $|\lambda| \neq 1$ 时，对应局域模； $|\lambda| = 1$ 时，为传播模。

解：(1) 将波动解带入波动方程：

$$Tk^2 - \mu\omega^2 = 0 \quad (1)$$

给出两个解：

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{T}{\mu}} k \quad (2)$$

分别对应沿 x 轴正向和逆向传递的波，相应波速：

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (3)$$

(2) (2.1) 边界条件给出：

$$\begin{cases} u_j|_{x=a} = u_{j+1}|_{x=0} \\ m \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \Big|_{x=a} = T \left(\frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial u_j}{\partial x} \Big|_{x=a} \right) \end{cases} \quad (4)$$

带入 u_i 形式：

$$\begin{cases} A_j e^{ika} + B_j e^{-ika} = A_{j+1} + B_{j+1} \\ -m\omega^2 (A_j e^{ika} + B_j e^{-ika}) = ikT (A_{j+1} - B_{j+1} - A_j e^{ika} + B_j e^{-ika}) \end{cases} \quad (5)$$

整理得到：

$$\begin{cases} A_{j+1} = A_j e^{ika} + \frac{imk}{2\mu} (A_j e^{ika} + B_j e^{-ika}) \\ B_{j+1} = B_j e^{-ika} - \frac{imk}{2\mu} (A_j e^{ika} + B_j e^{-ika}) \end{cases} \quad (6)$$

从而写出转移矩阵：

$$M = \begin{pmatrix} e^{i\varphi}(1+iq) & e^{-i\varphi}iq \\ -e^{i\varphi}iq & e^{-i\varphi}(1-iq) \end{pmatrix} \quad (7)$$

(2.2) 对角化矩阵，特征根 λ 满足：

$$\det \begin{pmatrix} e^{i\varphi}(1+iq) - \lambda & e^{-i\varphi}q \\ -e^{i\varphi}iq & e^{-i\varphi}(1-iq) - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (8)$$

即

$$\lambda^2 - 2(\cos \varphi - q \sin \varphi)\lambda + 1 = 0 \quad (9)$$

将 λ 移到等式右侧

$$(\cos \varphi - q \sin \varphi) = \lambda + \lambda^{-1} \quad (10)$$

代入 κ 定义式，得到色散关系：

$$\cos \kappa a = \cos \varphi - q \sin \varphi \quad (11)$$

有解时要求：

$$|\cos \varphi - q \sin \varphi| < 1 \quad (12)$$

这说明并非所有频率的波都能在该无限长弦球链中传播。

(3) (3.1) 写出此时边界条件：

$$\begin{cases} u_0|_{x=0} = 0 \\ u_N|_{x=(1-\tau)a} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

代入振幅形式：

$$\begin{cases} A_0 + B_0 = 0 \\ A_N e^{ik(1-\tau)a} + B_N e^{-ik(1-\tau)a} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

根据传递矩阵， A_N, B_N 和 A_1, B_1 间满足关系：

$$\begin{pmatrix} A_N \\ B_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi}(1+iq) & e^{-i\varphi}iq \\ -e^{i\varphi}iq & e^{-i\varphi}(1-iq) \end{pmatrix}^{N-1} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

同时

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\tau\varphi}(1+iq) & e^{-i\tau\varphi}iq \\ -e^{i\tau\varphi}iq & e^{-i\tau\varphi}(1-iq) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} A_0 \quad (16)$$

联立 (15) (16) 式，得到：

$$(e^{-i(1-\tau)\varphi} \quad e^{i(1-\tau)\varphi}) M^{N-1} \begin{pmatrix} e^{i\tau\varphi}(1+iq) - e^{-i\tau\varphi}iq \\ -e^{-i\tau\varphi}(1-iq) - e^{i\tau\varphi}iq \end{pmatrix} = 0 \quad (17)$$

(3.2) 为计算 M 的幂次，首先将其对角化。根据提示保留 $\lambda_{1,2}$ ，特征向量

$$p_{1,2} = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi}iq \\ e^{i\varphi}(1+iq) - \lambda_{1,2} \end{pmatrix} \quad (18)$$

特征矩阵

$$P = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi}iq & -e^{-i\varphi}iq \\ e^{i\varphi}(1+iq) - \lambda_1 & e^{i\varphi}(1+iq) - \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

其逆矩阵

$$P^{-1} = \frac{1}{e^{-i\varphi}iq(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} e^{i\varphi}(1+iq) - \lambda_2 & e^{-i\varphi}iq \\ -e^{i\varphi}(1+iq) + \lambda_1 & -e^{-i\varphi}iq \end{pmatrix} \quad (20)$$

从而：

$$M^{N-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{N-1} P^{-1} \quad (21)$$

根据提示，只需计算矩阵 M^{N-1} 第一行的两个元素的值

$$a_{11} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} ((1 + iq)(\lambda_2^{N-1} - \lambda_1^{N-1})e^{-i\varphi} + (\lambda_1^{N-2} - \lambda_2^{N-2})) \quad (22)$$

$$a_{12} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} iq(\lambda_2^{N-1} - \lambda_1^{N-1})e^{-i\varphi} \quad (23)$$

对比 (23) 式与提示

$$B = \frac{\lambda_1^{N-1} - \lambda_2^{N-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (24)$$

根据韦达定理

$$\lambda_1 + \lambda_2 = e^{i\varphi}(1 + iq) + e^{-i\varphi}(1 - iq) \quad (25)$$

得到：

$$(e^{i\varphi}(1 + iq) + e^{-i\varphi}(1 - iq))(\lambda_1^{N-1} - \lambda_2^{N-1}) = \lambda_1^{N-2} - \lambda_2^{N-2} + \lambda_1^N - \lambda_2^N \quad (26)$$

故：

$$a_{11} = \frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_1^{N-1} - \lambda_2^{N-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-i\varphi}(1 - iq) \quad (27)$$

对比 (27) 式与提示

$$A = \frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (28)$$

(3.3) 将 (3.2) 中结果代入频率满足表达式，计算后两项乘积

$$c_{11} = A(e^{i\tau\varphi}(1 + iq) - e^{-i\tau\varphi}iq) - Be^{-i(1-\tau)\varphi} \quad (29)$$

$$c_{12} = -A(e^{-i\tau\varphi}(1 - iq) + e^{i\tau\varphi}iq) + Be^{i(1-\tau)\varphi} \quad (30)$$

再与前一项作乘积，整理得：

$$\frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1 - \lambda_2} (\sin \varphi + q \cos \varphi - q \cos(1 - 2\tau)\varphi) = 0 \quad (31)$$

注意到 $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ ，(31) 式给出两种解，分别对应第一和第二个因子为 0

$$\begin{cases} \cos \varphi - q \sin \varphi = \cos \frac{j\pi}{N} (j \neq mN, m \in \mathbb{N}) \\ \sin \varphi + q \cos \varphi = q \cos(1 - 2\tau)\varphi \end{cases} \quad (32)$$

当 $\cos \varphi - q \sin \varphi = \cos m\pi$ 时， $\lambda_1 = \lambda_2$ ，因此第一项因子并不为 0；第一种解 $\lambda_{1,2}$ 均为复数，因此对应传播解。将第二种解代入 $\lambda_{1,2}$ 满足的二次方程，可得

$$(\cos \varphi - q \sin \varphi)^2 = 1 + q^2 \cos^2(1 - 2\tau)\varphi \geq 1 \quad (33)$$

故而 $\lambda_{1,2}$ 均为实数，对应指数的衰减解。

评分标准：本题满分 60 分。

第 (1) 问 5 分：(1) 式 1 分，(2) (3) 式各 2 分；

第 (2) 问 18 分：

第 (2.1) 问 8 分：(4) (5) (6) (7) 式各 2 分；

第 (2.2) 问 10 分：(8) (9) (10) 式各 2 分，(11) 式 3 分，(12) 式 1 分；

第 (3) 问 37 分：

第 (3.1) 问 8 分：(13) 式 1 分，(14) (15) (16) 式各 2 分，(17) 式 1 分；

第 (3.2) 问 17 分：(18) (19) 式各 1 分，(20) 式 2 分，(21) (22) (23) 式各 1 分，(24) 式 3 分，(25) 式 1 分，(26) 式 2 分，(27) 式 1 分，(28) 式 3 分；

第 (3.3) 问 12 分: (29) (30) 式各 1 分, (31) 式 2 分, (32) 式 4 分, 第一种解模式 1 分, (33) 式 2 分, 第二种解模式 1 分。

附录:

(1) 系统允许传递波的形式要求越来越高, 实际上来源于从裸弦到无限长弦球链到有现长弦球链过程中对称性的不断破缺。

(2) 题目中假设 M 可以对角化, 这是源于当 τ 取值特殊时, 可能出现 $\cos(1 - 2\tau)\varphi = 0$ 的情况。此时 M 有两个重根, 实际上并不能对角化, 只能化为若当 (Jordan) 标准型的形式

$$M \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

考虑两根 $\lambda_{1,2}$ 无限接近的过程, 因子 $\frac{\lambda_1^N - \lambda_2^N}{\lambda_1 - \lambda_2}$ 不发散, 从这个角度尽管方程需要重新改写, 但是通过极限过程可以将二者过渡连接在一起, 我们讨论的第二个根是没有问题的。

七、(60 分) 盗鲁效应

W. G. Unruh 发现, 在平直时空中具有固有加速度 g 的观者如同处在一个温度为 $T_u(g)$ 的热浴中, 这被称为盗鲁效应。下面我们将考虑一个无质量标量场, 通过分析其粒子数的期望值解释盗鲁效应。

Part 1 坐标变换

固有加速度即观者在自身参考系中 (准确地说, 是瞬时相对静止局域惯性系中) 的加速度。

(1A) 求 $t = 0$ 时位于 $x = \frac{c^2}{g}$ 的, 有正 x 方向恒定固有加速度 g 的粒子的运动轨迹, 用固有时 τ 表示为 $(t(\tau), x(\tau))$;

引入一个 2 维闵氏时空, 在惯性系坐标 (ct, x) 下, 其度规 (线元长度) 为 $ds^2 = (cdt)^2 - (dx)^2$ 。

(1B) 取类光坐标 $u \equiv ct - x, v \equiv ct + x$, 请将度规转换到 (u, v) 坐标下;

(1C) 现在希望构造加速观者坐标 $(c\tau, \xi)$ 。 τ 是 (1A) 中具有固有加速度 g 观者的, 零点取在 $t = 0$ 时的固有时; ξ 是另外一个坐标, 使得度规具有以下形式 $ds^2 = \Omega^2(c\tau, \xi)((cd\tau)^2 - (d\xi)^2)$ 。写出坐标 $(c\tau, \xi)$ 下的度规, 并求出 $\tau(t, x), \xi(t, x)$ 。

提示: 构造类光坐标 $\tilde{u} = c\tau - \xi, \tilde{v} = c\tau + \xi$, 并取 $u = u(\tilde{u}), v = v(\tilde{v})$ 。

Part 2 盗鲁效应

考虑一个无质量标量场 ϕ 的激发。在坐标 (ct, x) 下, ϕ 中 u 平面波的形式为 $e^{-i\omega u} = e^{-i\omega(ct-x)}$; 与其对应, 在坐标 $(c\tau, \xi)$ 下, ϕ 中 u 平面波的形式为 $e^{-i\Omega\tilde{u}} = e^{-i\Omega(c\tau-\xi)}$ 。

形式上可以为坐标 (ct, x) 下的场引入升、降算符 $\hat{a}_\omega^+, \hat{a}_\omega^-$; 坐标 $(c\tau, \xi)$ 下则是 $\hat{b}_\omega^+, \hat{b}_\omega^-$ 。其中升算符是降算符的厄密共轭 (转置并取复共轭)。

已知在两种坐标下, u 平面波场算符 $\hat{\phi}_u$ 相等

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_u &= \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi\sqrt{2}\omega}} (e^{-i\omega u} \hat{a}_\omega^- + e^{i\omega u} \hat{a}_\omega^+) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi\sqrt{2}\Omega}} (e^{-i\Omega\tilde{u}} \hat{b}_\Omega^- + e^{i\Omega\tilde{u}} \hat{b}_\Omega^+) \end{aligned} \quad (1)$$

于是新的场算符可以用旧的场算符表示（Боголюбов 变换）

$$\hat{b}_{\Omega}^{-} = \int_0^{+\infty} d\omega (\alpha_{\Omega\omega} \hat{a}_{\omega}^{-} - \beta_{\Omega\omega} \hat{a}_{\omega}^{+}) \quad (2)$$

（2A）考察 \hat{a}_{ω}^{-} 的系数，求出 $\alpha_{\Omega\omega}, \beta_{\Omega\omega}$ 的积分表达式；

提示：利用

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\Omega-\Omega')\tilde{u}} d\tilde{u} = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') \quad (3)$$

（2B）把上面积分中的 \tilde{u} 用 u 表示，处理积分从而导出 $\frac{|\alpha_{\Omega\omega}|^2}{|\beta_{\Omega\omega}|^2}$ ；

提示：由复平面上的围道积分可以得到积分公式

$$\int_0^{+\infty} e^{ix} x^{-iz-1} dx = e^{\frac{\pi z}{2}} \Gamma(-iz) \quad (4)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix} x^{-iz-1} dx = e^{-\frac{\pi z}{2}} \Gamma(-iz) \quad (5)$$

（2C）已知加速观者看到的真空中的平均粒子数是

$$\langle \hat{N}_{\Omega} \rangle = \int d\omega |\beta_{\Omega\omega}|^2 \quad (6)$$

记 V 为全空间体积（在此题里面是一维空间的体积），则由升降算符的归一性可以得到

$$\int_0^{+\infty} d\omega (|\alpha_{\Omega\omega}|^2 - |\beta_{\Omega\omega}|^2) = V \quad (7)$$

求出加速观者看到的粒子数密度，从而给出盎鲁温度 $T_u(g)$ 。

解：（1A）由固有加速度的定义

$$g = \frac{dv'}{d\tau} \quad (1)$$

速度变换

$$\frac{v + dv'}{1 + \frac{v dv'}{c^2}} = v + dv \quad (2)$$

$$dv = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) g d\tau \quad (3)$$

积分得到

$$v = c \tanh \frac{g\tau}{c} \quad (4)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \cosh \frac{g\tau}{c} \quad (5)$$

由

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma \quad (6)$$

积分得到

$$t = \frac{c}{g} \sinh \frac{g\tau}{c} \quad (7)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \gamma v = c \sinh \frac{g\tau}{c} \quad (8)$$

积分得到

$$x = \frac{c^2}{g} \cosh \frac{g\tau}{c} \quad (9)$$

(1B)

$$ds^2 = (cdt)^2 - (dx)^2 = (cdt - dx)(cdt + dx) = dudv \quad (10)$$

(1C) 根据提示换成类光坐标

$$ds^2 = \Omega^2(ct, \xi) d\tilde{u} d\tilde{v} = \tilde{\Omega}^2(\tilde{u}, \tilde{v}) d\tilde{u} d\tilde{v} \quad (11)$$

又由于

$$\tilde{u}(\tau, 0) = c\tau, \tilde{v}(\tau, 0) = c\tau \quad (12)$$

有

$$\Omega^2(c\tau, 0) = 1 \quad (13)$$

根据描述有

$$u(\tau, 0) = -\frac{c^2}{g} e^{-\frac{g\tau}{c}}, v(\tau, 0) = \frac{c^2}{g} e^{\frac{g\tau}{c}} \quad (14)$$

直接对比(12)和(14)得到

$$u(\tilde{u}) = -\frac{c^2}{g} e^{-\frac{g\tilde{u}}{c^2}}, v(\tilde{v}) = \frac{c^2}{g} e^{\frac{g\tilde{v}}{c^2}} \quad (15)$$

这样得到新坐标下的度规

$$ds^2 = dudv = e^{-\frac{g(\tilde{u}-\tilde{v})}{c^2}} d\tilde{u} d\tilde{v} \quad (16)$$

转回要求的坐标得到

$$ds^2 = e^{\frac{2g\xi}{c^2}} ((cd\tau)^2 - (d\xi)^2) \quad (17)$$

$$\tau = \frac{1}{2c} (\tilde{u} + \tilde{v}) = \frac{c}{2g} \ln \frac{x + ct}{x - ct} \quad (18)$$

$$\xi = \frac{1}{2} (\tilde{v} - \tilde{u}) = \frac{c^2}{2g} \ln \frac{g^2}{c^4} (x^2 - c^2 t^2) \quad (19)$$

(2A) 直接在等式两边提取 \hat{a}_ω 的系数

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{-i\omega u} = \int_0^{+\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{\Omega}} (e^{-i\Omega \tilde{u}} \alpha_{\Omega\omega} - e^{i\Omega \tilde{u}} \beta_{\Omega\omega}^*) \quad (20)$$

使用傅里叶技巧，即对左侧做傅里叶分解以得到 $\alpha_{\Omega\omega}, \beta_{\Omega\omega}$

$$\alpha_{\Omega\omega} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{u} e^{-i\omega u + i\Omega \tilde{u}} \quad (21)$$

$$\beta_{\Omega\omega} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{u} e^{i\omega u + i\Omega \tilde{u}} \quad (22)$$

(2B)

$$\alpha_{\Omega\omega} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^0 du e^{-i\omega u} \left(-\frac{gu}{c^2}\right)^{i\Omega\left(-\frac{c^2}{g}\right)-1} = \frac{c^2}{2\pi g} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \left(\frac{\omega c^2}{g}\right)^{\frac{i\Omega c^2}{g}} e^{\frac{\pi\Omega c^2}{2g}} \Gamma\left(-\frac{i\Omega c^2}{g}\right) \quad (23)$$

$$\beta_{\Omega\omega} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^0 du e^{i\omega u} \left(-\frac{gu}{c^2}\right)^{i\Omega\left(-\frac{c^2}{g}\right)-1} = -\frac{c^2}{2\pi g} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \left(\frac{\omega c^2}{g}\right)^{\frac{i\Omega c^2}{g}} e^{-\frac{\pi\Omega c^2}{2g}} \Gamma\left(-\frac{i\Omega c^2}{g}\right) \quad (24)$$

当然, 即使处理不到这一步, 能搞出来

$$\frac{|\alpha_{\Omega\omega}|^2}{|\beta_{\Omega\omega}|^2} = e^{\frac{2\pi\Omega c^2}{g}} \quad (25)$$

就行了, 但是不要混。

(2C) 把题目给的式子和 (25) 联立得到

$$\langle \hat{N}_{\Omega} \rangle = \frac{V}{e^{\frac{2\pi\Omega c^2}{g}} - 1}, n_{\Omega} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\Omega c^2}{g}} - 1} \quad (26)$$

直接与玻色气体的玻色-爱因斯坦分布律对比

$$n_{\Omega} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\Omega}{kT_u(g)}} - 1} \quad (27)$$

得到盖鲁温度

$$T_u(g) = \frac{g\hbar}{2\pi c^2 k} \quad (28)$$

评分标准: 本题满分 60 分。

第 (1A) 问 14 分: (1) (5) (6) (8) 式 1 分, (2) (3) (4) (7) (9) 式 2 分;

第 (1B) 问 2 分: (10) 式 2 分;

第 (1C) 问 19 分: (11) (12) (13) (14) 式 1 分, (15) (16) (17) (18) (19) 式 3 分;

第 (2A) 问 7 分: (21) (22) 式 2 分, (20) 式 3 分;

第 (2B) 问 9 分: (23) (24) (25) 式 3 分;

第 (2C) 问 9 分: (26) (27) (28) 式 3 分。

版权信息

命题人

黄启宸 李锴瑞 张鑫睿 常皓凌 吴恒旭 张颖续

审题人

黄启宸 李锴瑞 张鑫睿 常皓凌 吴恒旭 张颖续 付亦轩 刘家亦

联系方式



微信公众号
CPHOS



官方网站
www.cphos.cn



CPHOS 论坛

邮箱
service@cphos.cn

微信小程序
CPHOS 物理竞赛联考