

第 29 届 CPHOS 物理竞赛联考 理论试题

本文件于 2026 年 4 月 24 日 12:00 发布，最后更新于 2026 年 4 月 23 日 10:19。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

一、(40 分) 潘宁阱

潘宁阱是一种利用均匀磁场和四极电场来囚禁带电粒子的装置。它就像一个精准的“粒子牢笼”，可以长时间稳定地束缚单个离子或电子，是实现高精度测量的关键工具。

在潘宁阱内建立直角坐标系，空间中的电势分布为：

$$U = \frac{U_0}{4d^2} (2z^2 - x^2 - y^2) \quad (1)$$

空间中存在磁场 $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ 。本题不考虑可能的量子效应。

(1) 假设原点处有一个质量为 m 、电荷量大小为 q 的带正电的质点，固定电场不变，求解能使该质点局限在阱内做周期运动的 B_0 的范围。

(2) 实际的潘宁阱形成的电磁场不可能完美符合理论，答案只需保留一阶近似项，接下来分别考虑可能的误差：

(2.1) 考虑八极势带来的扰动，不考虑其它扰动，电势修正为

$$U = \frac{U_0}{4d^2} (2z^2 - x^2 - y^2) + \frac{U_0}{2d^4} C \left[z^4 - 3z^2 (x^2 + y^2) + \frac{3}{8} (x^2 + y^2)^2 \right] \quad (2)$$

其中 $C \ll 1$ 。已知粒子 z 方向运动振幅为 A ，求解粒子 z 方向运动基频相对变化量 $\frac{\Delta\omega_z}{\omega_z}$ ，已知轴向运动主要受 ΔU 中的 z^4 项影响（径向耦合项在时间平均后贡献很小，且频率不匹配）。

(2.2) 进一步考虑小量轴向阻尼力 $-\gamma_z \dot{z}$ ，并施加一个正弦驱动力 $\vec{F} = F_0 \sin(\omega t + \theta) \hat{z}$ 进行驱动频率扫描，求解振幅关于频率的响应曲线在 $\omega = \sqrt{\frac{U_0 q}{md^2}}$ 附近出现三值区间（即在此频率区间内，对应同一频率有三个不同的振幅解）的驱动力下界。

(2.3) 潘宁阱中粒子运动速率远小于光速，但当进行驱动频率扫描时，相对论效应会对振幅关于频率的响应曲线产生影响。此时粒子在阱中做圆周运动，驱动微波电场是右旋的圆极化波，频率为 ω ，振幅 \mathcal{E}_0 ， $\vec{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0 (\hat{x} \cos \omega t - \hat{y} \sin \omega t)$ ，存在阻力 $-\gamma_c \vec{v}$ ，求解频率 ω 和运动动量大小 u 满足的关系，并说明保留适当的阶数时是否可能出现三值区间。简单起见，忽略空间电势的作用和粒子 z 方向的运动。

解：

(1) 带电粒子在电磁场中的受力：

$$\vec{F} = -q\nabla U - q\dot{x}B_0\hat{y} + q\dot{y}B_0\hat{x} \quad (1)$$

先考虑 z 方向受力

$$F_z = -\frac{U_0 q}{d^2} z \quad (2)$$

z 方向被约束于阱内。考虑 x, y 方向，设 $u = x + iy$ ：

$$m\ddot{u} = \frac{U_0 q}{2d^2} u - iqB_0 \dot{u} \quad (3)$$

令 $u = Ae^{-i\omega t}$ ：

$$\omega^2 - \frac{qB_0}{m}\omega + \frac{U_0 q}{2md^2} = 0 \quad (4)$$

要求判别式大于 0：

$$B_0 > \sqrt{\frac{2U_0 m}{qd^2}} \quad (5)$$

(2) (2.1) 依题意写出略去径向影响的轴向运动方程:

$$m\ddot{z} = -\frac{U_0q}{d^2}z - \frac{2U_0qC}{d^4}z^3 \quad (6)$$

设 $z = A \sin(\omega_z t + \phi)$, 代入式(6)并作小量近似:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U_0q}{md^2}}, \omega_z = \omega_0(1 + \lambda C) \quad (7)$$

利用三倍角公式化简, 只保留一倍频:

$$-\frac{U_0q}{d^2}(1 + 2\lambda C)A \sin(\omega_z t + \phi) = -\frac{U_0q}{d^2}A \sin(\omega_z t + \phi) - \frac{2U_0qC}{d^4}A^3 \cdot \frac{3}{4} \sin(\omega_z t + \phi) \quad (8)$$

化简解得:

$$\lambda = \frac{3A^2}{4d^2}, \omega_z = \sqrt{\frac{U_0q}{md^2}} \left(1 + \frac{3CA^2}{4d^2}\right) \quad (9)$$

最终结果:

$$\frac{\Delta\omega_z}{\omega_z} = \frac{3CA^2}{4d^2} \quad (10)$$

(2.2) 轴向运动方程:

$$m\ddot{z} + \gamma_z \dot{z} + \frac{U_0q}{d^2}z + \frac{2U_0qC}{d^4}z^3 = F_0 \sin(\omega t + \theta) \quad (11)$$

将 $z = A \sin(\omega t + \phi)$ 代入式(11), 利用三倍角公式化简, 只保留一倍频:

$$F_0 \sin(\omega t + \theta) = -mA\omega^2 \sin(\omega t + \phi) + \gamma_z A\omega \cos(\omega t + \phi) + \frac{U_0q}{d^2}A \sin(\omega t + \phi) + \frac{2U_0qC}{d^4}A^3 \cdot \frac{3}{4} \sin(\omega t + \phi) \quad (12)$$

取模:

$$\left(\frac{U_0q}{d^2} - m\omega^2 + \frac{3U_0qCA^2}{2d^4}\right)^2 A^2 + \gamma_z^2 \omega^2 A^2 = F_0^2 \quad (13)$$

由 $\frac{CA^2}{d^2} \ll 1$, 将 $\omega_z = \sqrt{\frac{U_0q}{md^2}} \left(1 + \frac{3CA^2}{4d^2}\right)$ 代入式(13)化简:

$$(m\omega_z^2 - m\omega^2)^2 A^2 + \gamma_z^2 \omega^2 A^2 = F_0^2 \quad (14)$$

归一化处理, 设 $w = \frac{\gamma_z^2 A^2}{F_0^2} \omega_0^2$, $N = \frac{m(\omega_z - \omega_0)}{w\gamma_z}$, $\delta = m \frac{\omega - \omega_0}{\gamma_z}$, 整理得:

$$\left(\frac{\omega + \omega_z}{\omega_0}\right)^2 (Nw - \delta)^2 w + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 w = 1 \quad (15)$$

此时 $\frac{\omega_0}{\omega} - 1$, $\frac{\omega - \omega_z}{\omega_0}$ 应为小量, 在小量近似下:

$$w = \frac{1}{1 + 4(Nw - \delta)^2} \quad (16)$$

$A(\omega)$ 出现三值区间时, 等效于 $w(\delta)$ 出现三值区间, 因此 $\delta(w)$ 应当有至少一个稳定点, 或以下方程应当有解:

$$\frac{d\delta}{dw} = 0 \quad (17)$$

由式(16)解得 δ , 计算得到:

$$\delta = Nw \pm \sqrt{\frac{1}{4w} - \frac{1}{4}} \quad (18)$$

要使 $\frac{d\delta}{dw} = 0$ 可能有解, 式(18)取 +。对式(18)两边求导:

$$\frac{d\delta}{dw} = N - \frac{1}{4w^2 \sqrt{\frac{1}{w} - 1}} \quad (19)$$

将 $\frac{d\delta}{dw} = 0$ 代入式(19), 得到:

$$N \geq \min_{0 < w < 1} \frac{1}{4w^2 \sqrt{\frac{1}{w} - 1}} \quad (20)$$

右边最小值求得:

$$N_{\min} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \quad (21)$$

频率关于振幅的响应曲线出现三值区间的临界驱动力大小:

$$F_0 = \sqrt{\frac{16\sqrt{3}d\gamma_z^3}{27mC}} \sqrt{\frac{U_0 q}{m}} \quad (22)$$

(2.3) 相对论下运动方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}} \right) = -\frac{B_0 q}{m} \hat{z} \times \vec{v} - \frac{\gamma_c}{m} \vec{v} + \frac{q}{m} \vec{\mathcal{E}}(t) \quad (23)$$

用复数 $v = v_x + iv_y$ 表示:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{|v|^2}{c^2}}} \right) = -i \frac{B_0 q}{m} v - \frac{\gamma_c}{m} v + \frac{q}{m} \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (24)$$

引入旋转坐标系下的复动量 $u_c e^{-i\omega t} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{|v|^2}{c^2}}}$, 化简:

$$\dot{u}_c - i \left(\omega - \frac{B_0 q}{m \sqrt{1 + \frac{|u_c|^2}{m^2 c^2}}} \right) u_c + \frac{\gamma_c}{m \sqrt{1 + \frac{|u_c|^2}{m^2 c^2}}} u_c = q \mathcal{E}_0 \quad (25)$$

稳定时 $\dot{u}_c = 0$, 取模:

$$\left(\omega - \frac{B_0 q}{m \sqrt{1 + \frac{u^2}{m^2 c^2}}} \right)^2 u^2 + \frac{\gamma_c^2}{m^2 (1 + \frac{u^2}{m^2 c^2})} u^2 = q^2 \mathcal{E}_0^2 \quad (26)$$

展开到一阶即有

$$\left[\omega \left(1 + \frac{u^2}{2m^2 c^2} \right) - \frac{B_0 q}{m} \right]^2 u^2 + \left(\frac{\gamma_c^2}{m^2} - \frac{q^2 \mathcal{E}_0^2}{m^2 c^2} \right) u^2 = q^2 \mathcal{E}_0^2 \quad (27)$$

与式(13)形式相似, 可能出现三值区间。

注: 若不忽略静电力, 将得到

$$\left[\omega \left(1 + \frac{u^2}{2m^2 c^2} \right) - \left(\frac{qU_0}{2d^2 m \omega} + \frac{B_0 q}{m} \right) \right]^2 u^2 + \left(\frac{\gamma_c^2}{m^2} - \frac{q^2 \mathcal{E}_0^2}{m^2 c^2} \right) u^2 = q^2 \mathcal{E}_0^2 \quad (28)$$

也算作正确。

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 10 分: (1) 式 1 分, (2) (3) (4) 式各 2 分, (5) 式 3 分;

第 (2) 问 30 分:

第 (2.1) 问 6 分: (10) 式 1 分, (6) 式 2 分, (9) 式 3 分;

第 (2.2) 问 12 分: (12) (13) (15) (17) (20) (21) 式各 1 分, (11) (16) (22) 式各 2 分;

第 (2.3) 问 12 分: (27) 式 1 分, (23) (24) (26) 式各 2 分, (25) 式 3 分, 说明可能存在三值区间 2 分。

二、(50 分) 卫星绕地

在普通的二体开普勒运动中, 两天体的相对运动轨迹是一个不变的椭圆; 当存在外界扰动 (摄动) 时, 这个椭圆变为随时间变化的。更具体地, 将小天体 (质量为 m) 相对大天体 (质量为 M) 的瞬时运动视作椭圆运动, 而用椭圆的参数与小天体在椭圆上的位置参数 (统称为轨道根数) 描述小天体的瞬时运动。当存在摄动时, 将小天体受力 \vec{F} 分解为引力 $\vec{P} = -\frac{GMm\vec{e}_r}{r^2}$ 与摄动力 \vec{R} , 即 $\vec{F} = \vec{P} + \vec{R}$, 并利用运动方程求出在 \vec{R} 摄动下轨道根数的变化。

选择地球与人造卫星为考虑的两个天体, 建立参考坐标系如下图, 其中原点 O 为地球中心, xyz 系的方向待定。令小天体位于 C 点, 以 C 为原点建立随体坐标系 $r\theta n$, 其中 r 轴沿 \vec{OC} 方向, n 轴沿轨道平面法向, θ 轴方向与 rn 平面垂直。

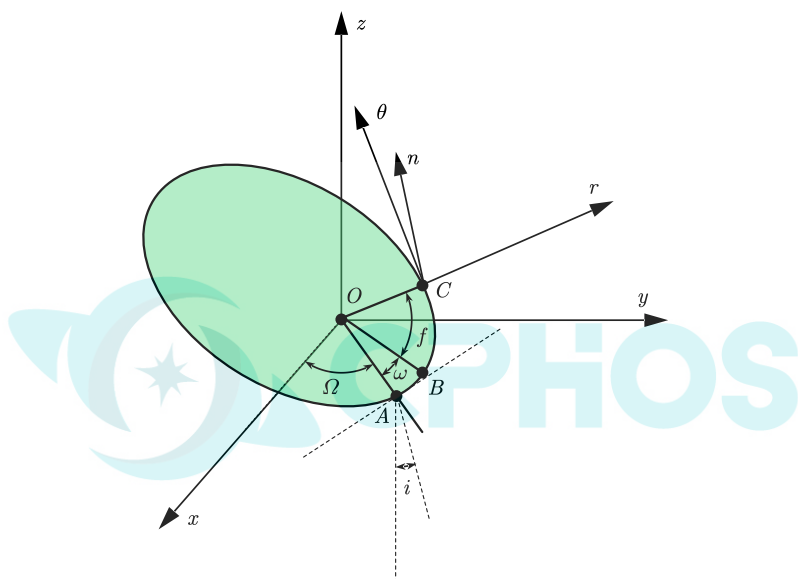


图 2.1: 椭圆轨道及参数

本题第 (1.1) (1.2) (2.1) 问解答请写在答题纸第二页。

(1) 显然, 轨道根数共有 6 个。取 $(a, e, i, \Omega, \omega, f)$ 为一组轨道根数, 其中 a 为轨道半长轴, e 为轨道离心率, i 为轨道平面与 xy 平面的夹角; 作轨道平面与 xy 平面的交线 OA , Ω 为 OA 与 x 轴的夹角, 令轨道近心点为 B , ω 为 OB 与 OA 的夹角, f 为 OB 和 OC 的夹角。

(1.1) 给出前四个轨道根数与能量 E , 角动量 $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ 的关系。提示: 利用角动量与 n 轴平行的特点。

(1.2) 求出此时六个轨道根数的时间导数, 结果可以包含六个轨道根数本身与摄动力在 $r\theta n$ 系的分量 (R_r, R_θ, R_n) 。近似到摄动力的一阶。

(2) 人造卫星在黄道面 (地球的轨道平面) 上绕地球沿 $e \sim 10^{-4}$ 的近圆轨道运行, 轨道高度为 $h = 500 \text{ km}$ 。为计算简便, 认为月球、地球的公转运动都是恒定的椭圆运动, 此时月球有 $\omega_m = \frac{\pi}{2}$, 地球是完美的球体。

已知太阳质量 $M_S = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$, 日地平均距离 $R_S = 1.496 \times 10^8 \text{ km}$, 月球质量 $M_m = 7.342 \times 10^{22} \text{ kg}$, 地月平均距离 $R_m = 3.844 \times 10^5 \text{ km}$, 月球轨道的离心率 $e_m = 0.0549$, 地球轨道的离心率 $e_E = 0.0167$, 月球轨道平面与黄道面夹角 $\phi = 0.0898 \text{ rad}$, 地球质量 $M_E = 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$, 地球半径 $R_E = 6378 \text{ km}$ 。

(2.1) 回答: 月球的摄动效应和太阳的哪个更强? 本问只需要做估算。

本题第 (2.2) (3) 问解答请写在答题纸第三页。

(2.2) 只考虑上问中更强的效应, 以黄道面作为 xy 平面, 前三个轨道根数中变化最明显的

(对应于 $(\frac{\delta a}{a}, \delta e, \delta i)$ 中最大的) 是哪个? 并求出它的变化量。长度量纲取 km, 角度采用弧度制, 保留一位有效数字。

(3) 在近地大气中, 人造卫星受到方向与速度相反的微弱阻力, 大小正比于 v^n 。在按周期平均的意义下, 它的半长轴 a , 离心率 e 会如何变化? 已知 $e \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。(回答: 变大/变小/不变)

提示, 你可能会用到以下公式:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \frac{A + \cos x}{(1 + A \cos x)^2} \, dx = 0 \quad (1)$$

解:

(1) (1.1) 当能量为 E , 角动量大小为 L , 熟知开普勒运动的解:

$$a = -\frac{GMm}{2E} \quad (1)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}} \quad (2)$$

由几何关系可得:

$$i = \arccos\left(\frac{L_z}{L}\right) \quad (3)$$

$$\Omega = -\arctan\left(\frac{L_x}{L_y}\right) \quad (4)$$

(1.2) 此时位置与速度:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (5)$$

$$\dot{f}_0 = \frac{L}{mr^2} = \sqrt{\frac{GM}{a^3(1 - e^2)^3}} (1 + e \cos f)^2 \quad (6)$$

这里, \dot{f}_0 并非 f 的变化率, 而只是瞬时标架下的椭圆运动角速度。

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial f} \dot{f}_0 = \sqrt{\frac{GM}{a(1 - e^2)}} e \sin f \quad (7)$$

由功能原理和角动量定理得到 E, \vec{L} 的变化率

$$\dot{E} = R_r \dot{r} + R_\theta r \dot{f}_0 \quad (8)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{R} \quad (9)$$

即

$$\frac{dL_x}{dt} = r [R_\theta \sin i \sin \Omega + R_n \sin(\omega + f) \cos \Omega + R_n \cos(\omega + f) \cos i \sin \Omega] \quad (10)$$

$$\frac{dL_y}{dt} = r [-R_\theta \sin i \cos \Omega + R_n \sin(\omega + f) \sin \Omega - R_n \cos(\omega + f) \cos i \cos \Omega] \quad (11)$$

$$\frac{dL_z}{dt} = r [R_\theta \cos i - R_n \cos(\omega + f) \sin i] \quad (12)$$

$$\dot{L} = r R_\theta \quad (13)$$

注意到

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{E}}{E} \quad (14)$$

$$\frac{2e\dot{e}}{e^2-1} = \frac{\dot{E}}{E} + \frac{2\dot{L}}{L} \quad (15)$$

可得

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GMm^2(1-e^2)}} [R_r e \sin f + R_\theta (1 + e \cos f)] \quad (16)$$

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{GMm^2}} \left[R_r \sin f + R_\theta \left(\cos f + \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f} \right) \right] \quad (17)$$

同理有

$$\frac{di}{dt} = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{GMm^2}} \frac{R_n \cos(\omega + f)}{1 + e \cos f} \quad (18)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{GMm^2}} \frac{R_n \sin(\omega + f)}{(1 + e \cos f) \sin i} \quad (19)$$

对

$$\frac{L^2}{GMm^2} = r(1 + e \cos f) \quad (20)$$

求导得到

$$\dot{f} = \dot{f}_0 + \frac{\dot{e}}{e \tan f} - \frac{2\dot{L}(1 + e \cos f)}{Le \sin f} \quad (21)$$

即

$$\frac{df}{dt} = \sqrt{\frac{GM}{a^3(1-e^2)^3}} (1 + e \cos f)^2 + \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{GMm^2}} \frac{1}{e} \left(R_r \cos f - R_\theta \sin f \frac{2 + e \cos f}{1 + e \cos f} \right) \quad (22)$$

下面计算 $\dot{\omega}$ ：
(解法一) 由

$$\begin{pmatrix} x \cos \Omega + y \sin \Omega \\ -x \sin \Omega + y \cos \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\omega + f) \\ r \sin(\omega + f) \cos i \end{pmatrix} \quad (23)$$

对第一式求导可得：

$$-r \sin(\omega + f) \dot{\Omega} \cos i = r \sin(\omega + f) \left(\dot{\omega} + (\dot{f} - \dot{f}_0) \right) \quad (24)$$

即

$$\frac{d\omega}{dt} = -\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{GMm^2}} \left[\frac{R_n \sin(\omega + f)}{(1 + e \cos f) \tan i} + \frac{1}{e} \left(R_r \cos f - R_\theta \sin f \frac{2 + e \cos f}{1 + e \cos f} \right) \right] \quad (25)$$

(解法二) 定义隆格-楞次矢量

$$\vec{e} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{GMm^2} - \vec{e}_r \quad (23^*)$$

其中, \vec{p}, \vec{L} 为动量和角动量。可以证明其恒与 OB 平行, 值为 e 。

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{\vec{R} \times \vec{L} + \vec{p} \times \frac{d\vec{L}}{dt}}{GMm^2} \quad (24^*)$$

$$\omega = \arccos \left(\frac{e_x \cos \Omega + e_y \sin \Omega}{e} \right) \quad (25^*)$$

求导可以得到

$$\frac{d\omega}{dt} = -\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{GMm^2}} \left[\frac{R_n \sin(\omega + f)}{(1 + e \cos f) \tan i} + \frac{1}{e} \left(R_r \cos f - R_\theta \sin f \frac{2 + e \cos f}{1 + e \cos f} \right) \right] \quad (26^*)$$

(2) (2.1) 轨道的摄动需要考虑相对地心的潮汐力:

$$\vec{R} = \vec{r} \cdot \nabla \vec{P}' \sim \frac{GMmr}{R^3} \quad (27)$$

式中, P' 为摄动天体 (月球/太阳) 对卫星的引力。计算

$$\frac{R_S}{r} \sim \frac{M_S}{R_S^3} \approx 6 \times 10^5 \text{ kg/km}^3 \quad (28)$$

$$\frac{R_m}{r} \sim \frac{M_m}{R_m^3} \approx 1.3 \times 10^6 \text{ kg/km}^3 \quad (29)$$

$$R_S < R_m \quad (30)$$

因此月球的摄动效应更强。

(2.2) 在以下的计算中, e_m, ϕ 将被当作一阶小量, e 视作二阶小量。

以地心为原点, 为避免 $i = 0$ 导致的发散, 以月球轨道平面为 xy 平面, 地心与月球近心点连线为 x 轴方向, 则在此坐标系中初态的轨道根数为 $(r, e, \phi, 0, \omega_0, f_0)$ 。我们下面先借用符号表示此坐标系中的轨道根数, 在最后换到原系中。

设月球的位矢为 $\vec{\rho}$, 卫星的位矢为 \vec{r} , 考虑潮汐力的一阶展开, 则卫星受到的摄动力为:

$$\vec{R} = (\vec{r} \cdot \nabla) \frac{GM_m m (\vec{\rho} - \vec{r})}{|\vec{\rho} - \vec{r}|^3} = GM_m m \left(-\frac{\vec{r}}{\rho^3} + \frac{3\vec{\rho}(\vec{r} \cdot \vec{\rho})}{\rho^5} \right) \quad (31)$$

容易看出, $\frac{r}{\rho}$ 是和 e_m, ϕ 同阶的小量。

对 e_m, ϕ, e 作恰当的近似, 写出:

$$\vec{\rho} = \frac{a_m(1 - e_m^2)}{1 + e_m \cos \theta} (\cos \theta, \sin \theta, 0) \approx \frac{R_m}{1 + e_m \cos \theta} (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r (\cos \phi \sin(\omega + f), -\cos(\omega + f), \sin \phi \sin(\omega + f)) \\ &= r (\sin(\omega + f), -\cos(\omega + f), \phi \sin(\omega + f)) \end{aligned} \quad (33)$$

式中 $r = R_E + h$ 。

代入(31)式, 再利用:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= (\sin(\omega + f), -\cos(\omega + f), \phi \sin(\omega + f)), \\ \vec{e}_\theta &= (\cos(\omega + f), \sin(\omega + f), \phi \sin(\omega + f)), \\ \vec{e}_n &= (-\phi, 0, 1) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} R_r &= \vec{R} \cdot \vec{e}_r, \\ R_\theta &= \vec{R} \cdot \vec{e}_\theta, \\ R_n &= \vec{R} \cdot \vec{e}_n \end{aligned} \quad (35)$$

得到:

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{GM_m m r (1 + e_m \cos \theta)^3}{R_m^3} (-1 + 3 \sin^2(\omega + f - \theta)) \\ R_\theta &= \frac{3GM_m m r (1 + e_m \cos \theta)^3}{R_m^3} \sin(\omega + f - \theta) \cos(\omega + f - \theta) \\ R_n &= -\frac{3GM_m m r (1 + e_m \cos \theta)^3 \phi \cos \theta \sin(\omega + f - \theta)}{R_m^3} \end{aligned} \quad (36)$$

首先计算 $\frac{d\Omega}{dt}$ 。由(19), 取最低阶近似得到:

$$\frac{d\Omega}{dt} \approx -\frac{3M_m(1 + e_m \cos \theta)^3 \cos \theta \cos(\omega + f - \theta) \sin(\omega + f)}{R_m^3} \sqrt{\frac{Gr^3}{M_E}} \quad (37)$$

由于

$$\dot{\omega} + \dot{f} = \dot{f}_0 - \dot{\Omega} \cos i \approx \dot{f}_0 - \dot{\Omega} \quad (38)$$

而

$$\dot{f}_0 \approx \sqrt{\frac{GM_E}{r^3}} \quad (39)$$

第二项与第一项之比为

$$\frac{\dot{\Omega}}{\dot{f}_0} \sim \frac{M_m r^3}{M_E R_m^3} \approx 7 \times 10^{-8} \quad (40)$$

所以可以认为 $\omega + f$ 的变化率恒定。对 $\omega + f$ 取平均，保留到最低阶，

$$\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle = -\frac{3M_m(1 + e_m \cos \theta)^3 \cos^2 \theta}{2R_m^3} \sqrt{\frac{Gr^3}{M_E}} \quad (41)$$

再对 θ 取平均，

$$\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle = -\frac{3M_m}{4R_m^3} \sqrt{\frac{Gr^3}{M_E}} \quad (42)$$

经过一年的变化量：

$$\delta\Omega = \dot{\Omega} \times (365 \times 86400 \text{ s}) = 2 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad (43)$$

同理，可以得到

$$\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle \approx 0 \quad (44)$$

由(16)，

$$\frac{da}{dt} = 2\sqrt{\frac{r}{GM_E m^2}} [R_r e \sin f + R_\theta (1 + e \cos f)] \quad (45)$$

由于 $\bar{R}_\theta \approx 0$ ，故

$$\frac{da}{dt} \sim e\dot{\Omega} \quad (46)$$

由(17)，

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{r}{GM_E m^2}} \left[R_r \sin f + R_\theta \left(\cos f + \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f} \right) \right] \quad (47)$$

由(22)，

$$\dot{f} - \dot{f}_0 = \sqrt{\frac{r}{GM_E m^2}} \frac{1}{e} \left(R_r \cos f - R_\theta \sin f \frac{2 + e \cos f}{1 + e \cos f} \right) \quad (48)$$

计算

$$\frac{\dot{f} - \dot{f}_0}{\dot{f}_0} \sim \frac{M_m r^3}{e M_E R_m^3} \approx 7 \times 10^{-4} \quad (49)$$

则

$$\dot{\omega} = -\dot{\Omega} \cos i - (\dot{f} - \dot{f}_0) \quad (50)$$

为量级 $10^{-4} \dot{f}_0$ 的小量。

则 $\bar{R}_r \sin(\omega + f - \omega) \approx 0, \bar{R}_\theta \cos(\omega + f - \omega) \approx 0$

$$\frac{d\bar{e}}{dt} \sim 10^{-4} \dot{\Omega} \quad (51)$$

$$\bar{\omega} \sim \dot{\Omega} \quad (52)$$

由于 $\bar{\omega}$ 不引起 i 的变化，所以有：

$$\delta i \approx \phi \delta\Omega \approx 2 \times 10^{-4} \text{ rad} \quad (53)$$

为三者中变化最明显的量。

(3) 总能量变小, 所以 a 会变小。式(17)中摄动力改写为成正比形式:

$$\begin{aligned} R_r &\propto -v^{n-1}\dot{r} \propto -(1+e^2+2e\cos f)^{\frac{n-1}{2}} e \sin f \\ R_\theta &\propto -v^{n-1}r\dot{f}_0 \propto -(1+e^2+2e\cos f)^{\frac{n-1}{2}} (1+e\cos f) \end{aligned} \quad (54)$$

代入得到

$$\frac{de}{df} \propto -\frac{(1+e^2+2e\cos f)^{\frac{n-1}{2}} (e+\cos f)}{(1+e\cos f)^2} \quad (55)$$

特别地, $n=1$ 时, 由题给积分式可得 $\int_0^{2\pi} \frac{de}{df} df = 0$ 。由于 $\cos f > 0$ 时

$$\frac{(e+\cos f)}{(1+e\cos f)^2} - \frac{(e-\cos f)}{(1-e\cos f)^2} = \frac{2\cos f(1+e^2\cos^2 f - 2e^2)}{(1-e^2\cos^2 f)^2} \geq 0 \quad (56)$$

当 $n > 1$ 时, 速度项会为 $\cos f > 0$ 的积分区域乘上一个较大的因子, $n < 1$ 时, 速度项会为 $\cos f > 0$ 的积分区域乘上一个较小的因子, 因此 $n > 1$ 时 e 会变小, $n < 1$ 时 e 会变大, $n=1$ 时 e 不变。

评分标准: 本题满分 50 分。

第 (1) 问 21 分:

第 (1.1) 问 4 分: (1) (2) (3) (4) 式各 1 分;

第 (1.2) 问 17 分: (5) (6) (7) (8) (10) (11) (12) (13) (16) (17) (18) (19) (21) (22) (23) (24) (25) 式各 1 分;

解法二: (24*) (25*) (26*) 式各 1 分;

第 (2) 问 20 分:

第 (2.1) 问 4 分: (27) 式 1 分, 说明月球摄动效应更强 3 分;

第 (2.2) 问 16 分: (34) (37) (40) (42) (43) (44) (46) (49) (51) (52) (53) 式各 1 分, (31) 式 2 分, (36) 式 3 分;

第 (3) 问 9 分: (55) 式 1 分, (54) 式 2 分, 说明 a 变小 1 分, 说明 $n=1$ 时 e 不变 1 分, $n > 1$ 时 e 变小, $n < 1$ 时 e 变大 4 分。

附录

本题考虑的不是实际情况, 事实上对于近地轨道卫星, 题中考虑的摄动太小, 地球的四极矩导致的 J_2 摄动项、空气阻力的摄动都远大于月球摄动; 月球轨道的周期变化也没有考虑。

三、(40 分) 激光制冷技术

激光制冷 (Laser Cooling) 是一种利用激光与原子或分子相互作用来降低物质温度的技术, 广泛应用于原子物理、量子信息等领域。通过精确调控激光频率和强度, 可以实现对原子或分子的有效冷却, 甚至达到接近绝对零度的温度。

设原子某一能级的跃迁频率为 ν , 当一束轻微红失谐的激光照射在原子上时 (激光频率应略小于 ν , 本题中可将其近似为 ν), 原子更倾向于吸收来自与其运动方向相反的激光光子, 从而减慢其运动速度。原子吸收一个光子后会立即发生自发辐射, 在这个过程中, 原子会随机且均匀地向任意方向发射一个频率为 ν 的光子, 导致平均意义上发射过程中的动量变化为零。因此, 原子在吸收光子时动量会减小, 而在自发辐射时动量变化平均为零, 实现冷却效果。

当原子在激光射来的方向上的速度投影为 u 时, 该吸收-发射循环的频率可以表示为

$$R(u) = \Gamma(1 + \kappa u) \quad (1)$$

其中 Γ 是原子在该能级的自然衰变率, κ 是一个与激光频率 ν 和原子质量 m 相关的常数。当有多束激光从不同方向照射时, 各激光均会对应一个由该方向速率决定的吸收-发射循环频率。

注意：原子激光制冷技术中，激光通常在近红外/可见光/近紫外波段，光子能量与原子相对论静能的量级关系为

$$\frac{h\nu}{m_p c^2} = \frac{h}{m_p c \lambda} \sim 10^{-9}$$

因此本题可以忽略相对论效应的影响。

(1) 本问中只考虑原子在 z 方向上的运动，有两束制冷激光分别从 $+z$ 和 $-z$ 方向照射原子。

(1.1) 将原子吸收光子的过程看作近似连续的，证明原子的受到的阻尼力与速度的关系满足

$$F_z = -\gamma m u_z \quad (2)$$

并使用 ν, Γ, κ, m 以及光速 c 、普朗克常量 h 来表示阻尼系数 γ 。

(1.2) 在真实情况下，原子吸收光子的过程是离散的。原子的初始速度为 u_z ，当原子吸收了一个从 $+z$ 方向来的光子后，计算原子的动能改变量 ΔE （不考虑接下来的发射过程影响）。

(2) 本问中考虑原子在三维空间中的运动，六束制冷激光分别从 $\pm x, \pm y, \pm z$ 方向照射原子。

(2.1) 暂不考虑发射光子产生的影响，设原子的方均速率为 $\langle u^2 \rangle$ ，表示出原子在六束激光制冷下单位时间的动能变化率 $\langle \dot{E}_c \rangle$ 。

(2.2) 接着考虑发射光子产生的影响，原子随机且均匀地向任意方向发射频率为 ν 的光子，该过程可以视为动量空间中的随机游走。设原子在动量空间进行了 N 步随机游走： $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N$ ，由于是均匀随机的，累积的动量改变为零，但是动量改变的方均值不为零且满足

$$\Delta p = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N = 0 \quad (3)$$

$$(\Delta p)^2 = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_N^2 \quad (4)$$

试求原子在发射光子产生的随机游走影响下单位时间的动能增加率 $\langle \dot{E}_h \rangle$ 。

(2.3) 结合前两小问的结果，原子的动能总变化率为 $\langle \dot{E} \rangle = \langle \dot{E}_c \rangle + \langle \dot{E}_h \rangle$ ，试推导出激光制冷能达到的最低极限温度 T_{limit} 。

解：

(1) (1.1) 在单位时间内，原子从 $+z$ 方向吸收光子的次数为 $R(u_z)$ ，从 $-z$ 方向吸收光子的次数为 $R(-u_z)$ 。每次吸收一个光子，原子动量改变 $\Delta p = h\nu/c$ ，发射光子的平均动量改变为零，因此原子在 z 方向受到的力为

$$F_z = \frac{dp}{dt} \approx \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\frac{h\nu}{c} [R(u_z) - R(-u_z)] \quad (1)$$

将 R 代入上式，得到

$$F_z = -\frac{h\nu}{c} \Gamma [\kappa u_z - (-\kappa u_z)] = -\frac{2h\nu \Gamma \kappa}{c} u_z \quad (2)$$

故阻尼系数为

$$\gamma = \frac{2h\nu \Gamma \kappa}{mc} \quad (3)$$

(1.2) 记吸收光子造成的动量改变量为 $\delta p_z = -h\nu/c$ ，则原子的动能改变量为

$$\Delta E = \frac{1}{2} m \left(u_z + \frac{\delta p_z}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} m u_z^2 = -\frac{u_z h\nu}{c} + \frac{(h\nu)^2}{2mc^2} \quad (4)$$

(2) (2.1) 由(4)可知， $+z$ 方向射来的激光造成的动能变化率为

$$\dot{E}_{+z} = R(u_z) \Delta E = \Gamma (1 + \kappa u_z) \left(-\frac{u_z h\nu}{c} + \frac{(h\nu)^2}{2mc^2} \right) \quad (5)$$

类似地可以写出其他五束激光造成的动能变化率，最终得到原子在六束激光制冷下单位时间的动能变化率为

$$\begin{aligned} \langle \dot{E}_c \rangle &= \langle \dot{E}_{+x} \rangle + \langle \dot{E}_{-x} \rangle + \langle \dot{E}_{+y} \rangle + \langle \dot{E}_{-y} \rangle + \langle \dot{E}_{+z} \rangle + \langle \dot{E}_{-z} \rangle \\ &= -\frac{2h\nu \Gamma \kappa}{c} \langle u^2 \rangle + \frac{3(h\nu)^2 \Gamma}{mc^2} \end{aligned} \quad (6)$$

(2.2) 由题意, 原子在动量空间中的随机游走满足 $\Delta p = 0$ 和 $(\Delta p)^2 = N(\delta p)^2$, 其中 $\delta p = h\nu/c$ 每一次发射光子造成的动量改变量。原子每吸收一个光子就会发射一个光子, 因此单位时间内的发射次数为

$$R_{tot} = R(u_x) + R(-u_x) + R(u_y) + R(-u_y) + R(u_z) + R(-u_z) = 6\Gamma \quad (7)$$

因此单位时间内的动量空间随机游走步数为 $N = R_{tot}$, 原子在发射光子产生的随机游走影响下单位时间的动能增加率为

$$\langle \dot{E}_h \rangle = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{N(\delta p)^2}{2m} = \frac{3(h\nu)^2 \Gamma}{mc^2} \quad (8)$$

(2.3) 结合前两小问的结果, 原子的动能总变化率为

$$\langle \dot{E} \rangle = \langle \dot{E}_c \rangle + \langle \dot{E}_h \rangle = -\frac{2h\nu\Gamma\kappa}{c} \langle u^2 \rangle + \frac{6(h\nu)^2 \Gamma}{mc^2} \quad (9)$$

当 $\langle \dot{E} \rangle = 0$ 时, 原子达到最低极限温度, 此时方均速率为

$$\langle u^2 \rangle = \frac{3h\nu}{m\kappa} \quad (10)$$

根据动能与温度的关系 $E = \frac{1}{2}m\langle u^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$, 可以得到激光制冷能达到的最低极限温度为

$$T_{\text{limit}} = \frac{h\nu}{k_B \kappa} \quad (11)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 11 分:

第 (1.1) 问 6 分: (1) (3) 式各 3 分;

第 (1.2) 问 5 分: (4) 式 5 分;

第 (2) 问 29 分:

第 (2.1) 问 9 分: (5) 式 4 分, (6) 式 5 分;

第 (2.2) 问 9 分: (7) 式 4 分, (8) 式 5 分;

第 (2.3) 问 11 分: (9) 式 3 分, (10) (11) 式各 4 分。

四、(50 分) 磁偶极矩

在静磁学当中, 磁偶极矩和电偶极矩类似, 被定义为磁矢势多级展开一阶量对应的、与系统电流分布有关的某个物理量。其具体表达式为:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') dV' \quad (1)$$

其中 \vec{r}' 表示系统中某处电流的位矢。磁偶极矩在外场中的能量为:

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (2)$$

(1) 考虑最简单的情况: 一个通有电流 I 的平面圆环放在匀强磁场中, 计算其磁偶极矩的大小和系统与外场的相互作用能。系统与外磁场相互作用能的公式:

$$W = \oint I d\vec{l} \cdot \vec{A} \quad (3)$$

其中 \vec{A} 是磁矢势。得到的结果与式(2)相同吗? 若不同, 试解释之。

(2) 计算总电量为 Q 的均匀带电球以角速度 $\vec{\omega}$ 旋转时的磁偶极矩。假设该球是匀质的且质量为 M , 给出其角动量与磁偶极矩的关系。

(3) 考虑两个位置固定的、距离为 d 的半径为 R , 带电量为 Q , 质量为 M 的带电旋转球之间的相互作用。以下小问中忽略感生电场的作用。

(3.1) 直接写出可以将两个球的相互作用看作两个磁偶极子之间相互作用的条件。

(3.2) 设球 1 的角速度为 $\vec{\omega}_1$, 球 2 的角速为 $\vec{\omega}_2$, 写出系统总能量的表达式。

(3.3) 固定球 1 的角速度矢量为 $\vec{\omega}_0$ 不变。忽略感生电场, 给出球 2 角速度随时间的变化关系 $\vec{\omega}_2(t)$ 。球 2 的初始角速度 $\vec{\omega}_2(0)$ 已知。

(3.4) 考虑球 1 的角速度矢量也在变化的情形。忽略感生电场, 给出两球角速度满足的微分方程。计算系统的总角动量和总能量的变化率。角动量守恒吗? 能量守恒吗?

解:

(1) 不妨考虑磁感应强度与电流环平面垂直的情形, \vec{S} 和 \vec{B} 都沿 z 轴正方向。将原点取在电流环的圆心, 此时磁矢势在柱坐标下可以取为:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} B \rho \hat{\theta} \quad (1)$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为柱坐标下径向的值。直接积分得到相互作用能:

$$W = \oint I d\vec{l} \cdot \vec{A} = \pi R^2 I B \quad (2)$$

系统的磁偶极矩:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint \vec{r}' \times \vec{j} dV' = I \left(\frac{1}{2} \oint \vec{r}' \times d\vec{l}' \right) = I \vec{S} \quad (3)$$

由此得到系统在外场中的能量:

$$W' = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -\pi R^2 I B = -W \quad (4)$$

二者不同。这是因为 W' 指的是将电流环与外场之间的相互作用能 (即外力移动电流环所需的能量), 而 W 是自能与互能的和 (还包括移动过程中为保持电流大小不变, 克服感应电动势做的功)。

(2) 位置为 \vec{r}' 处的电流密度为:

$$\vec{j}(\vec{r}') = \rho_e \vec{v}(\vec{r}') \quad (5)$$

其中 ρ_e 为电荷密度。代入题给式(2)得到:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint \vec{r}' \times \rho_e \vec{v}(\vec{r}') dV' \quad (6)$$

而系统的角动量表达式为:

$$\vec{L} = \iiint \vec{r}' \times \rho_m \vec{v}(\vec{r}') dV' \quad (7)$$

其中 ρ_m 为质量密度。由于 ρ_e 和 ρ_m 均为常数, 可得:

$$\vec{L} = \frac{2\rho_m}{\rho_e} \vec{m} = \frac{2M}{Q} \vec{m} \quad (8)$$

匀质球的角动量:

$$\vec{L} = \frac{2}{5} M R^2 \vec{\omega} \quad (9)$$

因此体系的磁偶极矩:

$$\vec{m} = \frac{1}{5} Q R^2 \vec{\omega} \quad (10)$$

(3) (3.1) 磁偶极矩的能量表达式推导中用到体系尺度远小于场变化特征尺度的条件。放在题给条件中就是:

$$R \ll d \quad (11)$$

注: 如果说是因为远场近似导致需要 $R \ll d$, 原则上可以扣分。(题给情形中, 系统对外界产生的场和偶极子场形式相同。)

(3.2) 磁偶极子 1 产生的磁场:

$$\vec{B}_{m_1}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}_1) \quad (12)$$

相互作用能:

$$U = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_{m_1}(\vec{d}) = \frac{\mu_0}{4\pi d^3} (-3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r}) + (\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2)) \quad (13)$$

代入 \vec{m} 和 $\vec{\omega}$ 的关系得到:

$$U = \frac{\mu_0 Q^2 R^4}{100\pi d^3} (-3(\vec{\omega}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\omega}_2 \cdot \hat{r}) + (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2)) \quad (14)$$

其中 \hat{r} 表示由球 1 球心指向球 2 球心的单位矢径。

(3.3) 磁偶极子在外场中受力矩:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (15)$$

由式(12), 球 2 受到的力矩为:

$$\vec{\tau}_2 = \vec{\omega}_2 \times \frac{\mu_0 Q^2 R^4}{100\pi d^3} (3(\vec{\omega}_1 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{\omega}_1) \quad (16)$$

角动量定理:

$$\vec{\tau}_2 = \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \frac{2MR^2}{5} \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \quad (17)$$

得到 $\vec{\omega}_2$ 满足的微分方程:

$$\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} = \vec{\omega}_2 \times \frac{\mu_0 Q^2 R^2}{40\pi M d^3} (3(\vec{\omega}_1 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{\omega}_1) \quad (18)$$

这表明 $\vec{\omega}_2$ 绕固定轴进动。进动轴:

$$\hat{n} = \frac{3(\vec{\omega}_1 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{\omega}_1}{|3(\vec{\omega}_1 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{\omega}_1|} \quad (19)$$

进动角速度:

$$\vec{\Omega} = \frac{\mu_0 Q^2 R^2}{40\pi M d^3} |3(\vec{\omega}_1 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{\omega}_1| \quad (20)$$

注: 说明了 $\vec{\omega}_2$ 绕固定轴进动, 并给出进动轴方向、进动角速度即可得分。

(3.4) 和式(18)对称地有:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{\omega}_1 \times \frac{\mu_0 Q^2 R^4}{100\pi d^3} (3(\vec{\omega}_2 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{\omega}_2), \quad \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \frac{\mu_0 Q^2 R^2}{40\pi M d^3} (3(\vec{\omega}_2 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{\omega}_2) \quad (21)$$

球 2 受球 1 的作用力:

$$\vec{F}_2(d) = \nabla(\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_{m_1}) = \frac{3\mu_0 Q^2 R^4}{100\pi d^4} [(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2)\hat{r} + (\vec{\omega}_1 \cdot \hat{r})\vec{\omega}_2 + (\vec{\omega}_2 \cdot \hat{r})\vec{\omega}_1 - 5(\vec{\omega}_1 \cdot \hat{r})(\vec{\omega}_2 \cdot \hat{r})\hat{r}] \quad (22)$$

为了将球 2 的位置固定, 球 2 将会受到一个大小相同, 方向相反的约束力作用。以球 1 球心为参考点, 系统受到的总力矩:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{tot}} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 - d\hat{r} \times \vec{F}_2 = 0 \quad (23)$$

因此总角动量守恒。

由式(18)和(21)可知:

$$\frac{d(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2)}{dt} = \frac{d((\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \cdot \hat{r})}{dt} = \frac{d\omega_1^2}{dt} = \frac{d\omega_2^2}{dt} = 0 \quad (24)$$

系统的动能为:

$$E_k = \frac{MR^2}{5} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \quad (25)$$

势能由式(14)给出, 从而:

$$\frac{d(E_k + U)}{dt} = 0 \quad (26)$$

因此总能量守恒。

评分标准：本题满分 50 分。

第 (1) 问 11 分：(1) (2) (3) (4) 式各 2 分，说明不同 1 分，说明区别的来源 2 分；

第 (2) 问 10 分：(6) (9) 式各 1 分，(5) (7) (8) (10) 式各 2 分；

第 (3) 问 29 分：

第 (3.1) 问 1 分：(11) 式 1 分；

第 (3.2) 问 5 分：(14) 式 1 分，(12) (13) 式各 2 分；

第 (3.3) 问 10 分：(15) (16) (19) 式各 1 分，(17) (18) 式各 2 分，(20) 式 3 分；

第 (3.4) 问 13 分：(25) (26) 式各 1 分，(23) (24) 式各 2 分，(21) 式 3 分，(22) 式 4 分。

五、(50 分) 量子比特的制备

量子计算利用量子比特的叠加与纠缠特性，能并行处理海量数据，在特定问题上远超经典计算机。自上世纪八十年代该概念产生，到近年“量子霸权”(Quantum Supremacy)的提出，该行业迅猛发展，成为当今物理科研的热门话题。

在超导量子计算中，我们通过微波电路来人工构建二能级系统，即量子比特。本题将引导你推导并理解如何从一个简单的 LC 谐振腔，一步步演变为目前主流的 Transmon 量子比特。

在量子化过程中，物理量被视作算符，乘法交换律一般情况下不再成立。可引入算符 \hat{A} 、 \hat{B} 的对易子 $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ 。

(1) LC 电路的量子化

考虑一个由理想电容 C 和理想电感 L 组成的无耗散 LC 振荡电路。设电容器上的电荷为 Q，穿过电感的磁通为 Φ 。

(1.1) 请写出该经典 LC 电路的哈密顿量 H (能量表达式)，用 Φ 、Q 表示。

(1.2) 为了对该电路进行量子化，引入共轭变量 Q 和 Φ 的对易子 $[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar$ 。又该电路的哈密顿量与谐振子的哈密顿量形式相似，故引入产生湮灭算符 \hat{a}^\dagger 、 \hat{a} 满足 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ 且 $\hat{\Phi} = \Phi_0 (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ 与 $\hat{Q} = iQ_0 (\hat{a}^\dagger - \hat{a})$ ，不妨设 $\frac{\Phi_0}{Q_0} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ ，请问 \hat{H} 的表达式，用 \hat{a} 、 \hat{a}^\dagger 及其他已知量表示。

(1.3) \hat{H} 的本征态为该电路的能级，已知 $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ 的本征值为 n ($n = 0, 1, 2, \dots$)，请直接写出该电路能级 E_n 。

(1.4) 为与经典计算机保持一致，量子计算机通常构造仅在基态与第一激发态间跃迁的二能级系统作为量子比特。请问上述 LC 量子电路适合作为量子计算机的基本电路吗？若适合，请给出理由。若不适合，说明应该如何安排能级分布。

(2) 约瑟夫森结 (Josephson Junction) 的引入

为制作量子计算机，物理学家们在电路中引入约瑟夫森结，约瑟夫森结由两块超导体和中间的极薄绝缘层组成，其满足两个约瑟夫森关系

$$I = I_c \sin \phi, \quad V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\phi}{dt} \quad (2)$$

其中 ϕ 是一个随时间变化的参量。现考虑一个电容与约瑟夫森结形成闭合回路。

(2.1) 请计算该电路的哈密顿量 (用库伯对数 $n_{2e} = \frac{Q}{2e}$ 与 ϕ 及其他已知量表示，常数部分可略去不写)。

(2.2) 将该电路的哈密顿量展开至 ϕ^4 项，并由此定性说明，为什么约瑟夫森结可作为量子比特被引入。

(3) Transmon 量子比特

为解决早期超导量子比特受到环境中电荷噪声 n_{2e} 的严重干扰，物理学家提出了 Transmon 量子比特，其哈密顿量为

$$H = 4E_C (n_{2e} - n_g)^2 - E_J \cos \phi \quad (3)$$

其中 n_g 的引入是为了抑制 n_{2e} 的噪声。

(3.1) 引入 n_g 在抑制噪声的同时，也带来其自身的噪音。因此，我们该如何设定 E_J, E_C 来有效抑制噪声？

(3.2) 假设系统参数使得 $E_J \gg E_C$, 其中 $E_C = \frac{e^2}{2C}$ 是充电能。在该极限下, 系统的能级间隔对 ϕ 的涨落不敏感 (transmon regime)。已知在这种情况下, 能级可以近似为

$$E_m \approx -E_J + \sqrt{8E_J E_C} \left(m + \frac{1}{2} \right) - \frac{E_C}{12} (6m^2 + 6m + 3) + \dots \quad (4)$$

其中 $m = 0, 1, 2, \dots$ 。计算非谐性 (anharmonicity) $\alpha = (E_2 - E_1) - (E_1 - E_0)$, 为了使近似更精确, $\frac{E_J}{E_C}$ 是否可以无限大?

(4) Rabi 振荡

(4.1) 实现量子比特的反转不仅需要能级量子化的系统, 还需要外界的驱动。已知在频率 $\omega > 0$, 振幅 $a \ll E_1, E_2$ 的驱动下, 由能级 E_1 和 E_2 ($E_1 < E_2$) 构成的量子比特具有哈密顿算符:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & a \cos(\omega t) \\ a \cos(\omega t) & E_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

而运动方程写作

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \\ c_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} c_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \\ c_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \end{pmatrix} \quad (6)$$

求出 $\frac{dc_1}{dt}$, $\frac{dc_2}{dt}$ 。

(4.2) 由上问结果可以看出, c_1, c_2 的变化很缓慢, 在求平均时将它们看作不变, 求出使 $\frac{dc_1}{dt}$, $\frac{dc_2}{dt}$ 的时间平均值不为 0 的频率 ω , 此时系统的状态称为 Rabi 振荡。

(4.3) 在上述共振频率下, 求出量子比特从 $|c_1| = 1, |c_2| = 0$ 第一次演化到 $|c_1| = 0, |c_2| = 1$ 所需时间。

解:

(1) (1.1)

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L} \quad (1)$$

(1.2) 反解出

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0} - i \frac{\hat{Q}}{Q_0} \right) \quad (2)$$

$$\hat{a} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0} + i \frac{\hat{Q}}{Q_0} \right) \quad (3)$$

代入产生湮灭算符的对易子, 可得

$$Q_0 \Phi_0 = \frac{\hbar}{2} \quad (4)$$

结合以

$$\frac{\Phi_0}{Q_0} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5)$$

可以解得

$$\Phi_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Q_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (6)$$

将其代入 \hat{H} , 可以得到

$$\hat{H} = \hbar \sqrt{\frac{1}{LC}} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (7)$$

(1.3)

$$E_n = \hbar \sqrt{\frac{1}{LC}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (8)$$

(1.4) 不适合。

原因: 当我们选择最低的两个能级作为运算空间的时候, 其相邻能级之间的能量之差应该不同, 否则在外界能量输入时, 无法保证原子仅在选取的两个能级间跃迁, 运算空间将一片混乱。而 LC 量子电路体系各能级之差一样, 故不适合作为量子计算机的基本电路。

(2) (2.1) 根据静电能的定义, 可得

$$U = \int_0^t IV dt = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} (\cos \phi_0 - \cos \phi) \quad (9)$$

其中 $\Phi = \frac{h}{2e}$, 略去常数, 有

$$H = \frac{2e^2}{C} n_{2e}^2 - \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \cos \phi \quad (10)$$

(2.2)

$$H = \frac{2e^2}{C} n_{2e}^2 - \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} + \frac{1}{2} \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \phi^2 - \frac{1}{24} \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \phi^4 \quad (11)$$

相比于之前的体系, 此体系多了恒负的一项。除此之外, 我们还可以知道对越高的能级, 此项作用越大, 故可知能级差随着能级上升而减小, 因此适合作为量子比特。

(3) (3.1) 为使噪音足够小, 应该让

$$E_J \gg E_C \quad (13)$$

(3.2) 代入数值有

$$\alpha = -E_C \quad (12)$$

能级间隔单调递减, 故同上, 此系统可以作为量子比特。

$\frac{E_J}{E_C}$ 不能无限大。如果 $\frac{E_J}{E_C}$ 过大, 会使得非谐性相对能级差过小, 因此也不可接受。

(4) (4.1)

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{iac_2}{\hbar} \cos(\omega t) \exp\left(\frac{i(E_1 - E_2)t}{\hbar}\right) \quad (14)$$

$$\frac{dc_2}{dt} = -\frac{iac_1}{\hbar} \cos(\omega t) \exp\left(-\frac{i(E_1 - E_2)t}{\hbar}\right) \quad (15)$$

(4.2) 展开

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \quad (16)$$

由于当 $\Omega \neq 0$ 时, 对时间的平均值

$$\langle e^{i\Omega t} \rangle = 0 \quad (17)$$

所以仅当

$$\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \quad (18)$$

时, 有非零的平均值。

(4.3)

$$\left\langle \frac{dc_1}{dt} \right\rangle = -\frac{iac_2}{2\hbar} \quad (19)$$

$$\left\langle \frac{dc_2}{dt} \right\rangle = -\frac{iac_1}{2\hbar} \quad (20)$$

因此 c_1, c_2 振荡的频率为

$$\Omega = \frac{a}{2\hbar} \quad (21)$$

初始 $|c_1| = 1, |c_2| = 0$, 第一次演化到 $|c_1| = 0, |c_2| = 1$ 时相位为 $\frac{\pi}{2}$, 则经过的时间:

$$t = \frac{\pi}{2\Omega} = \frac{\pi\hbar}{a} \quad (22)$$

评分标准: 本题满分 50 分。

第 (1) 问 23 分:

第 (1.1) 问 2 分: (1) 式 2 分;

第 (1.2) 问 14 分: (2) (3) (6) 式各 2 分, (4) (7) 式各 4 分;

第 (1.3) 问 2 分: (8) 式 2 分;

第 (1.4) 问 5 分: 指出不适合 2 分, 说明相邻能级差应该不同及原因 3 分;

第 (2) 问 8 分:

第 (2.1) 问 4 分: (10) 式 1 分, (9) 式 3 分;

第 (2.2) 问 4 分: (11) 式 2 分, 解释适合作为量子比特的原因 2 分;

第 (3) 问 6 分:

第 (3.1) 问 2 分: (13) 式 2 分;

第 (3.2) 问 4 分: (12) 式 2 分, 指出 $\frac{E_L}{E_C}$ 不能无限大 1 分, 说明原因 1 分;

第 (4) 问 13 分:

第 (4.1) 问 4 分: (14) (15) 式各 2 分;

第 (4.2) 问 3 分: (16) 式 1 分, (18) 式 2 分;

第 (4.3) 问 6 分: (19) (20) 式各 1 分, (21) (22) 式各 2 分。

六、(50 分) 双折射晶体

本题中我们将研究一种双折射晶体, 其双折射率分别为 $n_o = \sqrt{\varepsilon_1}$ 、 $n_e = \sqrt{\varepsilon_2}$ 。本题假设光线都在 xOz 平面内传播, 忽略介质磁导率的影响。

(1) 已知在线性介质中电位移矢量 \vec{D} 与电场强度 \vec{E} 的关系为 $\vec{D} = \vec{\varepsilon}_r \varepsilon_0 \cdot \vec{E}$, 设光轴方向为 \hat{z} , 求这种晶体的相对介电张量 $\vec{\varepsilon}_r$ 。

(2) 假设一列线偏振平面波在晶体中传播, 其波矢为 \vec{k} , 圆频率为 ω , 根据麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

求解:

(2.1) 将光轴方向取为 \hat{z} , 求电场强度 \vec{E} 满足的线性方程, 用 $\varepsilon_{1,2}, \hat{z}, c, \vec{k}, \omega$ 与 \vec{E} 表示;

(2.2) 继 (2.1), 设 $\hat{k} = \hat{z} \cos \theta + \hat{x} \sin \theta$ 。注意到双折射介质中相速度与群速度不再相同, 因此折射率也分为相折射率和群折射率。求出这列平面波可能对应的相折射率 n 。

(2.3) 对 (2.2) 中求出的每种情况分别求解 \vec{D}, \vec{E} (可保留常系数, 不计相位), 并求出这列平面波传播的方向与光轴的夹角 ϕ 。

(3) 本问中我们将讨论光线从双折射晶体出射到各向同性介质时的行为。简化起见, 我们认为光轴在入射面内, 并且在表达式中使用 n_o, n_e 代替 $\varepsilon_{1,2}$ 。取界面法向 (朝向晶体一侧) 为 \hat{z} , 设光轴方向为 $\hat{x} \sin \alpha + \hat{z} \cos \alpha$, 入射光方向为 $\hat{x} \sin i - \hat{z} \cos i$, 反射光方向为 $\hat{x} \sin r + \hat{z} \cos r$ 。

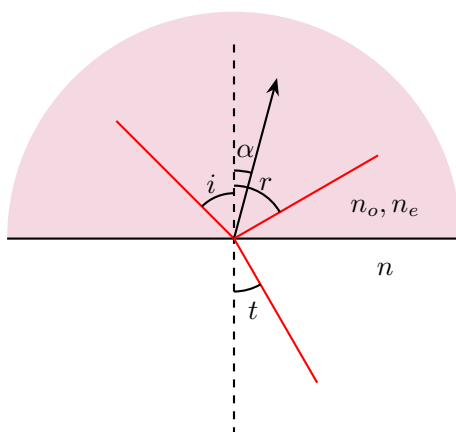


图 6.1: 双折射晶体入射出射光示意图

(3.1) 若入射光偏振方向在入射面内, 试用 $\tan i, \tan \alpha, n_o, n_e$ 表示 $\tan r$ 。

提示: 计算 $\tan r - \tan i$ 。

(3.2) 设各向同性介质折射率为 n , 试求出射角 t 与光强反射率 R 。 R 的结果可保留 r, t 。

解:

(1) 由于忽略磁化, 折射率与相对介电常数的关系为 $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = \sqrt{\varepsilon_r}$ 。因此

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_o^2 = \varepsilon_1, \varepsilon_z = n_e^2 = \varepsilon_2 \Rightarrow \vec{\varepsilon}_r = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

(2) (2.1) 将平面波代换 $\nabla \rightarrow i\vec{k}$ 代入麦克斯韦方程组:

$$\begin{cases} i\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \\ i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \\ i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ i\vec{k} \times \vec{H} = -i\omega \vec{D} \end{cases} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}, \quad \frac{\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E})}{\mu_0 \omega^2} = -\vec{D} \quad (3)$$

代入电位移矢量与电场强度的关系并利用 $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$:

$$\frac{c^2}{\omega^2} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\vec{\varepsilon}_r \cdot \vec{E} \quad \text{or} \quad \frac{c^2}{\omega^2} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \varepsilon_1 \vec{E} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\hat{z} \cdot \vec{E})\hat{z} = 0 \quad (4)$$

(2.2) 将折射率的定义 $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$ 代入(3)式:

$$\frac{n^2}{k^2} \left[(\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - k^2 \vec{E} \right] + \vec{\varepsilon}_r \cdot \vec{E} = 0 \quad (5)$$

(解法一) 将(5)式重写为 $\mathcal{M}_{ij} E_j = 0$ 的形式:

$$n^2(k_i k_j E_j - k^2 \delta_{ij} E_j) + \varepsilon_{ij} k^2 E_j = 0 \Rightarrow \det(n^2(k_i k_j - k^2 \delta_{ij}) + \varepsilon_{ij} k^2) = 0 \quad (6)$$

$$n^2(k_i k_j - k^2 \delta_{ij}) + \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} n^2(k_x^2 - k^2) + \varepsilon_1 & n^2 k_x k_y & n^2 k_x k_z \\ n^2 k_x k_y & n^2(k_y^2 - k^2) + \varepsilon_1 & n^2 k_y k_z \\ n^2 k_x k_z & n^2 k_y k_z & n^2(k_z^2 - k^2) + \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

将行列式展开:

$$\det \mathcal{M} = (n^2 - \varepsilon_1) \left[(k_x^2 + k_y^2) \varepsilon_1 + k_z^2 \varepsilon_2 \right] n^2 - k^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0 \quad (8)$$

$$\Rightarrow n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, n_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_2 \cos^2 \theta}} \quad (9)$$

(解法二) 将(5)式重写为 \vec{D} 满足的方程

$$\vec{D} = \frac{n^2}{k^2} \left[k^2 \vec{\varepsilon}_r^{-1} \cdot \vec{D} - \vec{k} \left(\vec{k} \cdot \left(\vec{\varepsilon}_r^{-1} \cdot \vec{D} \right) \right) \right] \quad (6^*)$$

$$(\vec{I} - n^2 \vec{\varepsilon}_r^{-1}) \cdot \vec{D} = -n^2 \frac{\vec{k} \left[\vec{k} \cdot \left(\vec{\varepsilon}_r^{-1} \cdot \vec{D} \right) \right]}{k^2} \quad (7^*)$$

写成分量式并利用(2)式:

$$D_i = \frac{-n^2 k_i (\vec{k} \cdot (\vec{\varepsilon}_r^{-1} \cdot \vec{D}))}{k^2 (1 - n^2 \varepsilon_i^{-1})}, \vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \sum \frac{k_i^2}{n^2 / \varepsilon_i - 1} = 0 \text{ or } \vec{k} \cdot (\vec{\varepsilon}_r^{-1} \cdot \vec{D}) = 0 \quad (8^*)$$

若 $\sum \frac{k_i^2}{n^2 / \varepsilon_i - 1} = 0$, 代入 $k_x = k \sin \theta, k_z = k \cos \theta$ 得:

$$\frac{\varepsilon_1 \sin^2 \theta}{n^2 - \varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2 \cos^2 \theta}{n^2 - \varepsilon_2} = 0, n = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_2 \cos^2 \theta}} \quad (9^*)$$

若 $k \cdot (\vec{\varepsilon}_r^{-1} \cdot \vec{D}) = 0$, 则:

$$(1 - n^2 \vec{\varepsilon}_r^{-1}) \cdot \vec{D} = 0, \det(1 - n^2 \vec{\varepsilon}_r^{-1}) = \left(1 - \frac{n^2}{\varepsilon_1}\right)^2 \left(1 - \frac{n^2}{\varepsilon_2}\right) = 0 \quad (10^*)$$

若取 $n = \sqrt{\varepsilon_2}$, 则 $\vec{D} // \hat{z}$, 要求 $\vec{k} \perp \hat{z}$, 此时情况 1 求出的 n 也为 $\sqrt{\varepsilon_2}$, 故此解舍去, 最终答案为:

$$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, n_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_2 \cos^2 \theta}} \quad (11)$$

(2.3)

$$\text{case 1} \Rightarrow D_i = \frac{\alpha k_i}{n^2 / \varepsilon_i - 1} = D_0 \left(\frac{\hat{x}}{\sin \theta} - \frac{\hat{z}}{\cos \theta} \right), E_i = \frac{\beta k_i}{n^2 - \varepsilon_i} = E_0 \left(\frac{\hat{x}}{\varepsilon_1 \sin \theta} - \frac{\hat{z}}{\varepsilon_2 \cos \theta} \right) \quad (12)$$

光线传播的方向平行于坡印廷矢量 \vec{S} :

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E})}{\mu_0 \omega} = S_0 \left(\frac{\hat{z}}{\varepsilon_1 \sin \theta} + \frac{\hat{x}}{\varepsilon_2 \cos \theta} \right) \quad (13)$$

(方向对即可, 系数无所谓) 即, 若设传播方向为 $(\sin \phi, \cos \phi)$, 则有

$$\text{case 1} \Rightarrow \phi = \arctan \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tan \theta \right) \quad (14)$$

$$\text{case 2} \Rightarrow \vec{D} = D_0 \hat{y}, \vec{E} = E_0 \hat{y}, \phi = \theta \quad (15)$$

可以看出, case 2 的光线为 o 光。

(3) (3.1)

(解法一) 本问可以利用边界条件爆算。

$$\hat{s} = (\sin \alpha, \cos \alpha), \hat{t} = (\cos \alpha, -\sin \alpha), \hat{i} = (\sin i, -\cos i), \hat{r} = (\sin r, \cos r) \quad (16)$$

$$\phi_i = \pi - i - \alpha, \phi_r = r - \alpha \quad (17)$$

$$\tan \theta_i = -\frac{n_e^2}{n_o^2} \tan(i + \alpha), \tan \theta_r = \frac{n_e^2}{n_o^2} \tan(r - \alpha) \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{k}_i &= \hat{s} \cos \theta_i + \hat{t} \sin \theta_i = \frac{\frac{n_e^2}{n_o^2} \tan(i + \alpha) \hat{t} - \hat{s}}{\sqrt{1 + \left(\frac{n_e^2}{n_o^2} \tan(i + \alpha) \right)^2}} \\ \hat{k}_r &= \hat{s} \cos \theta_r + \hat{t} \sin \theta_r = \frac{\frac{n_e^2}{n_o^2} \tan(r - \alpha) \hat{t} + \hat{s}}{\sqrt{1 + \left(\frac{n_e^2}{n_o^2} \tan(r - \alpha) \right)^2}} \end{aligned} \right. \quad (19)$$

由波矢平行界面的分量连续:

$$\sqrt{\frac{n_o^2 n_e^2}{n_o^2 \sin^2 \theta_i + n_e^2 \cos^2 \theta_i}} \frac{\frac{n_e^2}{n_o^2} \tan(i + \alpha) \cos \alpha - \sin \alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{n_e^2}{n_o^2} \tan(i + \alpha) \right)^2}} = \sqrt{\frac{n_o^2 n_e^2}{n_o^2 \sin^2 \theta_r + n_e^2 \cos^2 \theta_r}} \frac{\frac{n_e^2}{n_o^2} \tan(r - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{n_e^2}{n_o^2} \tan(r - \alpha) \right)^2}} \quad (20)$$

代入(18)式并化简:

$$\frac{\frac{n_e^2}{n_o^2} \tan(i + \alpha) \cos \alpha - \sin \alpha}{\sqrt{\frac{n_e^4}{n_o^2} \tan^2(i + \alpha) + n_e^2}} = \frac{\frac{n_e^2}{n_o^2} \tan(r - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha}{\sqrt{\frac{n_e^4}{n_o^2} \tan^2(r - \alpha) + n_e^2}} \quad (21)$$

$$\frac{n_e^2 \tan(i + \alpha) - n_o^2 \tan \alpha}{n_e^2 \tan(r - \alpha) + n_o^2 \tan \alpha} = \sqrt{\frac{n_e^2 \tan^2(i + \alpha) + n_o^2}{n_e^2 \tan^2(r - \alpha) + n_o^2}} \quad (22)$$

为了求解这个方程，我们分离变量并引入常数 K ：

$$K = \frac{n_e^2 \tan(i + \alpha) - n_o^2 \tan \alpha}{\sqrt{n_e^2 \tan^2(i + \alpha) + n_o^2}} = \frac{n_e^2 \tan(r - \alpha) + n_o^2 \tan \alpha}{\sqrt{n_e^2 \tan^2(r - \alpha) + n_o^2}} \quad (23)$$

可以看出，这可以化简为一个关于 $\tan i$ 或 $\tan r$ 的二次方程，二者的区别仅在于 $\alpha \rightarrow -\alpha$ 。

$$\begin{cases} A \tan^2 i + B \tan i + C = 0 \\ A \tan^2 r - B \tan r + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \tan r - \tan i = \frac{B}{A} \quad (24)$$

将原方程展开并提取系数（可用求导法）：

$$[n_e^2(\tan i + \tan \alpha) - n_o^2 \tan \alpha(1 - \tan i \tan \alpha)]^2 = K^2[n_e^2(\tan i + \tan \alpha)^2 + n_o^2(1 - \tan i \tan \alpha)^2] \quad (25)$$

$$B = 2(n_e^2 - n_o^2) \tan \alpha(n_e^2 + n_o^2 \tan^2 \alpha - K^2), A = (n_e^2 + n_o^2 \tan^2 \alpha)(n_e^2 + n_o^2 \tan^2 \alpha - K^2) \quad (26)$$

因此有一个漂亮的关系，即

$$\frac{B}{A} = \frac{2(n_e^2 - n_o^2) \tan \alpha}{n_e^2 + n_o^2 \tan^2 \alpha} \quad (27)$$

与 K 无关，最终得到

$$\tan r = \tan i + \frac{2(n_e^2 - n_o^2) \tan \alpha}{n_e^2 + n_o^2 \tan^2 \alpha} \quad (28)$$

（解法二）本问也可以有更优雅解法。写出波矢椭球方程

$$k_0^2 = \frac{k_{//}^2}{n_o^2} + \frac{k_{\perp}^2}{n_e^2}, k_{//} = k_x \sin \alpha + k_y \cos \alpha, k_{\perp} = k_x \cos \alpha - k_y \sin \alpha \quad (16^*)$$

化为 $Ak_x^2 + Bk_x k_y + Ck_y^2 = k_0^2$ 的形式，结合边界上 k_x 连续，注意到这个方程对给定 k_x 的两个解就是入射光与反射光的 k_y ，因此根据韦达定理：

$$k_{yi} + k_{yr} = -\frac{B}{C}k_x \quad (17^*)$$

根据光线传播速度 $\vec{v}_g = c \nabla_{\mathbf{k}} k_0$ ：

$$\vec{v}_g = \frac{c}{2k_0} \nabla_{\mathbf{k}} (Ak_x^2 + Bk_x k_y + Ck_y^2) = \frac{c}{2k_0} (2Ak_x + Bk_y, 2Ck_y + Bk_x) \quad (18^*)$$

运用我们强大的注意力，计算 $v_{iy} + v_{ry}$ ：

$$v_{iy} + v_{ry} = \frac{c}{2k_0} (2C(k_{yi} + k_{yr}) + 2Bk_x) = 0 \quad (19^*)$$

由此我们可以得到一个优雅的结论：入射光与反射光的 y 分量速度等大反向。

代入 $v_g = c/n$ ，假设光线传播方向为 s_x, s_y ，(19*)化为：

$$\frac{s_{iy}}{n_i} + \frac{s_{ry}}{n_r} = 0 \quad (20^*)$$

其中 n_i, n_r 为入射、反射光线的群折射率，注意不能代入(11)式中的 n ！

利用速度椭球的结论：

$$n^2 = n_o^2 s_{//}^2 + n_e^2 s_{\perp}^2 = (n_o^2 \sin^2 \alpha + n_e^2 \cos^2 \alpha) s_x^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha (n_o^2 - n_e^2) s_x s_y + (n_o^2 \cos^2 \alpha + n_e^2 \sin^2 \alpha) s_y^2 \quad (21^*)$$

将(20*)两边取倒数并平方：

$$\begin{cases} A' = n_o^2 \sin^2 \alpha + n_e^2 \cos^2 \alpha \\ B' = 2 \sin \alpha \cos \alpha (n_o^2 - n_e^2) \\ C' = n_o^2 \cos^2 \alpha + n_e^2 \sin^2 \alpha \end{cases} \quad (22^*)$$

$$\frac{A's_{ix}^2 + B's_{ix}s_{iy} + C's_{iy}^2}{s_{iy}^2} = \frac{A's_{rx}^2 + B's_{rx}s_{ry} + C's_{ry}^2}{s_{ry}^2} \quad (23^*)$$

利用 $\tan i = -\frac{s_{ix}}{s_{iy}}$ 和 $\tan r = \frac{s_{rx}}{s_{ry}}$ 化简:

$$A' \tan^2 i - B' \tan i + C' = A' \tan^2 r + B' \tan r + C', \quad \tan r - \tan i = -\frac{B'}{A'} \quad (24^*)$$

化简得

$$\tan r = \tan i + \frac{2(n_e^2 - n_o^2) \tan \alpha}{n_e^2 + n_o^2 \tan^2 \alpha} \quad (25^*)$$

(3.2) 由界面上切向波矢连续:

$$k_x = \frac{\omega}{c} \frac{n_e^2 \tan(i + \alpha) \cos \alpha - n_o^2 \sin \alpha}{\sqrt{n_e^2 \tan^2(i + \alpha) + n_o^2}} = \frac{n\omega}{c} \sin t \quad (29)$$

解得

$$t = \arcsin \frac{n_e^2 \sin(i + \alpha) \cos \alpha - n_o^2 \cos(i + \alpha) \sin \alpha}{n \sqrt{n_e^2 \sin^2(i + \alpha) + n_o^2 \cos^2(i + \alpha)}} \quad (30)$$

设振幅反射率 $r_a = E_r/E_i$ 、振幅透射率 $t_a = E_t/E_i$, 由 \vec{E}, \vec{H} 切向连续:

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_r - \vec{E}_t) \cdot \hat{x} = 0 \Rightarrow \cos i - r_a \cos r = t_a \cos t \quad (31)$$

结合(3)式求出 H_i, H_r, H_t :

$$\begin{aligned} H_i &= \frac{\vec{k}_i \times \vec{E}_i}{\mu_0 \omega} \\ &= \frac{(n_e^2 \tan(i + \alpha) \cos \alpha - n_o^2 \sin \alpha, -n_e^2 \tan(i + \alpha) \sin \alpha - n_o^2 \cos \alpha)}{\mu_0 c \sqrt{n_e^2 \tan^2(i + \alpha) + n_o^2}} \times E_i (\cos i, \sin i) \\ &= \frac{\sqrt{n_e^2 \sin^2(i + \alpha) + n_o^2 \cos^2(i + \alpha)}}{\mu_0 c} E_i \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{(n_e^2 \tan(r - \alpha) \cos \alpha + n_o^2 \sin \alpha, -n_e^2 \tan(r - \alpha) \sin \alpha + n_o^2 \cos \alpha)}{\mu_0 c \sqrt{n_e^2 \tan^2(r - \alpha) + n_o^2}} \times E_r (-\cos r, \sin r) \\ &= \frac{\sqrt{n_e^2 \sin^2(r - \alpha) + n_o^2 \cos^2(r - \alpha)}}{\mu_0 c} E_r \end{aligned} \quad (33)$$

$$H_t = \frac{n}{\mu_0 c} E_t \quad (34)$$

$$H_i + H_r = H_t \Rightarrow \sqrt{n_e^2 \sin^2(i + \alpha) + n_o^2 \cos^2(i + \alpha)} + \sqrt{n_e^2 \sin^2(r - \alpha) + n_o^2 \cos^2(r - \alpha)} r_a = n t_a \quad (35)$$

记 $n_i = \sqrt{n_e^2 \sin^2(i + \alpha) + n_o^2 \cos^2(i + \alpha)}$, $n_r = \sqrt{n_e^2 \sin^2(r - \alpha) + n_o^2 \cos^2(r - \alpha)}$ (事实上这正是入射光与反射光对应的群折射率), 可得

$$\begin{cases} r_a = \frac{n \cos i - n_i \cos t}{n \cos r + n_r \cos t} \\ t_a = \frac{n_i \cos r + n_r \cos i}{n \cos r + n_r \cos t} \end{cases} \quad (36)$$

由 $S \propto (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n}$, 即 $S \propto H E_x$, 由此可求出反射率:

$$S_i = \frac{n_i \cos i}{\mu_0 c} E_i^2, \quad S_r = -\frac{n_r \cos r}{\mu_0 c} E_r^2, \quad R = \frac{n_r \cos r}{n_i \cos i} r_a^2 \quad (37)$$

为了化简 R 的结果，我们要用到(20*)的等效表达式：

$$\frac{\cos i}{n_i} = \frac{\cos r}{n_r} \quad (38)$$

该结论也可以证明如下：

记 $x_i = E_i \cos i, x_r = -E_r \cos r, x_t = E_t \cos t, y_i = n_i E_i, y_r = n_r E_r, y_t = n E_t$ ，则

$$\begin{cases} x_i + x_r = x_t \\ y_i + y_r = y_t \end{cases} \quad (39)$$

又由法向能流守恒， $x_i y_i + x_r y_r = x_t y_t$ ，联立解得 $x_i y_r + x_r y_i = 0$ ，证毕。
将该结论代入(36)(37)式，最终得到与菲涅尔公式完全相同的表达式：

$$R = \left(\frac{n \cos i - n_i \cos t}{n \cos i + n_i \cos t} \right)^2 \quad (40)$$

评分标准：本题满分 50 分。

第 (1) 问 3 分：(1) 式 3 分；

第 (2) 问 24 分：

第 (2.1) 问 8 分：(3) (4) 式各 2 分，(2) 式 4 分；

第 (2.2) 问 11 分：(5) 式 1 分，(6) (7) (11) 式各 2 分，(8) 式 4 分；

解法二：(7*) (10*) 式各 1 分，(6*) (8*) (9*) 式各 2 分；

第 (2.3) 问 5 分：(13) (14) (15) 式各 1 分，(12) 式 2 分；

第 (3) 问 23 分：

第 (3.1) 问 11 分：(18) 式 2 分，(28) 式 4 分，(22) 式 5 分；

解法二：(17*) (21*) (25*) 式各 2 分，(19*) 式 5 分；

第 (3.2) 问 12 分：(29) (30) (31) 式各 1 分，(36) (37) (40) 式各 2 分，(35) 式 3 分。

七、(40 分) 啊啊啊宝宝你是一个软软的小蛋糕

笔者于某次集训的酒店吃早饭时观察到，如果使用筷子击打一小块蛋糕的底部，蛋糕会滑动并在一个新的位置停下，然后开始很可爱的摇头晃脑。本题将以一个有趣但未必正确的方式来解释这一现象。

(1) 首先可以想到的是，我们可以把蛋糕简化为一根长宽高分别为 a, b, l 的匀质刚体 (a 为垂直纸面的宽度)，其质量为 m ，且 $a, b \ll l$ 。如下图黑线所示，其底端被铰链固定，宽垂直于纸面方向。将其从 $\theta = 0$ 处静止释放，其会向下旋转，重力加速度为 g 。求出这一过程中的 $\dot{\theta}$ 和 $\ddot{\theta}$ ，本问不考虑 a, b 的影响。

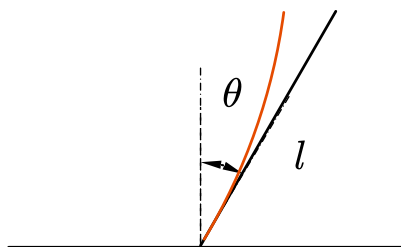


图 7.1: 蛋糕模型简化示意图

(2) 求出为了使整个刚体同步转动，其距底端 xl 处的切向应力 F 和应力矩 M 。

(3) 想必你一定注意到了上图中的红线。因为其有杨氏模量 E ，在上问的力矩 M 下，其会发生形变，如红线所示。假设形变较小，求出距底端 xl 处实际形状较原形状的偏离 y 。

(4) 由于形变，其受到的总重力矩发生了 ΔM 的变化。在最低阶近似下求出该变化。

(5) 在上述的简化情况下，求出在 $\theta = 0$ 附近振动的角频率 ω 。这需要 E 满足什么条件？譬如，取蛋糕为 $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ ，密度 1000 kg/m^3 ，估算临界杨氏模量 E_c 的数值。

(6) 讨论该模型有哪些问题。

解:

(1) 根据能量守恒 $\frac{1}{2}mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2$, 结合 $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}^2}{2d\theta}$ 得到:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos \theta)}{l}}, \quad \ddot{\theta} = \frac{3g \sin \theta}{2l} \quad (1)$$

(2) 对最上方 $l - xl$ 段分析受力, 有

$$\begin{aligned} F &= (1 - x)m(g \sin \theta - r\ddot{\theta}) = (1 - x)m \left(g \sin \theta - \frac{1 + x}{2}l \cdot \frac{3g \sin \theta}{2l} \right) \\ &= \frac{mg \sin \theta}{4}(1 - 3x)(1 - x) \end{aligned} \quad (2)$$

$$M = \int_0^{xl} F dx \cdot l = \frac{mgl \sin \theta}{4}x(1 - x)^2 \quad (3)$$

(3) 截面抗弯矩

$$E_0 = E \iint z^2 dS = Ea \int_{-b/2}^{b/2} z^2 dz = \frac{Eab^3}{12} \quad (4)$$

又因为

$$y'' = \frac{M}{E_0} \quad (5)$$

代入积分得

$$y = \frac{3mgl^3 \sin \theta}{Eab^3} \left(\frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{6} \right) \quad (6)$$

(4) 附加力矩

$$\Delta M = \int_0^1 -mgy \cos \theta dx = -\frac{m^2 g^2 l^3 \sin \theta \cos \theta}{20Eab^3} \quad (7)$$

(5) 总力矩

$$M_t = \left(\frac{mgl}{2} - \frac{m^2 g^2 l^3}{20Eab^3} \right) \sin \theta \quad (8)$$

$$I = \frac{ml^2}{3} \quad (9)$$

根据 $M_t = I\ddot{\theta}$ 并作小量近似, 有

$$\frac{mgl}{2} - \frac{m^2 g^2 l^3}{20Eab^3} + \frac{ml^2}{3}\omega^2 = 0 \quad (10)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3mg^2 l}{20Eab^3} - \frac{3g}{2l}} \quad (11)$$

要求

$$E < \frac{mgl^2}{10ab^3} \quad (12)$$

譬如, 取蛋糕为 $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$, 密度 1000 kg/m^3 , 估算可得 $E = 270 \text{ Pa}$ 。

(6)

1. 算出的杨氏模量太小, 显然不合理;

2. 忽略了内部质点的上下振动；
3. 计算出的附加力矩会反作用于运动，从而再反过来使力矩变化；
4. 水平线度并不远小于竖直线度；
- 等等。

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 3 分：(1) 式 3 分；

第 (2) 问 6 分：(2) (3) 式各 3 分；

第 (3) 问 9 分：(5) 式 2 分，(4) 式 3 分，(6) 式 4 分；

第 (4) 问 6 分：(7) 式 6 分；

第 (5) 问 12 分：(9) 式 1 分，(8) (12) 式各 2 分，(11) 式 3 分，结果与 270 Pa 差一个数量级以内均可得 4 分；

第 (6) 问 4 分：言之有理即可；答出一个方面 2 分，两个方面及以上 4 分。

版权信息

命题人

常皓凌 顿翔文 付亦轩 黄子轩 刘子言 宋安东 余杭

审题人

赵文腾 宋安东 小夜 常皓凌 刘子言 黄子轩 付亦轩 顿翔文

联系方式



微信公众号
CPHOS



官方网站
www.cphos.cn



CPHOS 论坛

邮箱
service@cphos.cn
微信小程序
CPHOS 物理竞赛联考