

第 30 届 CPHOS 物理竞赛联考 理论试题

本文件于 2026 年 6 月 26 日 12:00 发布，最后更新于 2026 年 7 月 4 日 16:12。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

一、(40 分) 变径向距离的负载驱动轮子运动

如图所示，一个质量为 M 、半径为 R 的均匀薄壁圆环静置于粗糙的水平地面上，其与地面间的静摩擦因数为 μ_s ，动摩擦因数为 μ_k 。圆环的中心处有一个可视为质点的电机，通过一根可改变长度的轻质刚性杆连接一个质量为 m 的配重（亦可视为质点）。电机可以主动控制杆的长度 $L(t)$ 和杆与竖直向下方向的夹角 $\theta(t)$ 。

设圆环中心的水平位移为 x （向右为正），重力加速度为 g 。我们旨在研究如何通过控制内部配重的运动，使得整个装置在水平地面上实现宏观的定向移动。

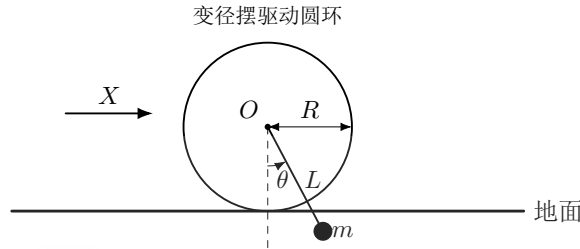


图 1.1: 变径摆驱动环系统示意图

(1) 为分析系统的动力学行为，我们需要建立基本关系。

(1.1) 推导地面施加于圆环的法向支持力 N 的表达式。该表达式应包含 M, m, g 以及 $L(t), \theta(t)$ 和它们的一阶、二阶时间导数。

(1.2) 整个系统（圆环 + 配重）在水平方向的运动由内部质量的相对运动以及外部的摩擦力共同决定。若将内部质量相对圆环中心的运动等效为一个施加于系统质心的“驱动力” F_{drive} ，系统的水平运动方程可写为 $(M + m)\ddot{x} = F_{\text{drive}} + F_{\text{friction}}$ 。请推导此“驱动力” F_{drive} 的表达式，它应包含 m 以及 $L(t), \theta(t)$ 和它们的一阶、二阶时间导数。

(2) 为了实现从静止开始的净位移，需要打破运动的对称性。一种有效的策略是采用非对称的“推进-复位”循环：在“推进”阶段，通过剧烈运动产生超过最大静摩擦力的驱动力使圆环滑动；在“复位”阶段，通过缓慢、平缓的运动将配重恢复原位，此间驱动力始终小于最大静摩擦力，圆环保持静止。请基于你在 (1) 中得到的结论，定性阐述在“推进”和“复位”两个阶段，应如何策略性地控制配重的径向和角向运动，才能最有效地实现向右的净位移。

(3) 现在我们定量研究从静止启动圆环的“点火”过程。设初始时刻 $t = 0$ ，系统完全静止，配重位于最低点（ $x = 0, \theta = 0, \dot{\theta} = 0$ ），杆长为 L_0 （ $\dot{L} = 0$ ）。电机瞬间启动，给予配重一个初始径向加速度 $\ddot{L}(0) = a_r$ 和角加速度 $\ddot{\theta}(0) = \alpha$ 。

(3.1) 写出在 $t = 0$ 时刻，圆环能开始向右滑动的条件，用一个包含 $M, m, g, L_0, \mu_s, a_r, \alpha$ 的不等式表达。

(3.2) 为使圆环能开始向右滑动，电机在 $t = 0$ 时刻需要对配重施加一个作用力 $\vec{F}_{\text{rod}}$ 。若要使启动时该作用力的大小 $|\vec{F}_{\text{rod}}|$ 最小，电机的径向加速度 a_r 应取何值？并求出在此最优 a_r 条件下，圆环恰好开始滑动所对应的角加速度大小 $|\alpha|_{\min}$ 。

解：

(1) (1.1) 以地面为参考系，设圆环中心 O 的坐标为 $(x, 0)$ ，则配重 m 的坐标为 $(x_m, y_m) = (x + L \sin \theta, -L \cos \theta)$ 。配重在竖直方向的加速度为：

$$\ddot{y}_m = \frac{d}{dt^2}(-L \cos \theta) = -\ddot{L} \cos \theta + 2\dot{L}\dot{\theta} \sin \theta + L\ddot{\theta} \sin \theta + L\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (1)$$

对整个系统（圆环 + 配重）应用牛顿第二定律的竖直分量。系统总的竖直方向外力为法向支持力 N 与总重力 $(M + m)g$ 之差。系统质心的竖直加速度为

$$a_{y,CM} = \frac{M \cdot 0 + m\ddot{y}_m}{M + m} \quad (2)$$

于是有

$$N - (M + m)g = (M + m)a_{y,CM} = m\ddot{y}_m \quad (3)$$

联立 (1) 和 (3) 得法向支持力 N 的表达式：

$$N = (M + m)g + m(-\ddot{L} \cos \theta + 2\dot{L}\dot{\theta} \sin \theta + L\ddot{\theta} \sin \theta + L\dot{\theta}^2 \cos \theta) \quad (4)$$

(1.2) 整个系统在水平方向的运动方程由质心运动定理给出。系统质心的水平坐标为

$$x_{CM} = \frac{Mx + mx_m}{M + m} = x + \frac{m}{M + m}L \sin \theta \quad (5)$$

系统所受的唯一水平外力是摩擦力 F_{friction} 。根据质心运动定理：

$$(M + m)\ddot{x}_{CM} = F_{\text{friction}} \quad (6)$$

对质心水平坐标求二阶导数：

$$\ddot{x}_{CM} = \ddot{x} + \frac{m}{M + m} \frac{d^2}{dt^2}(L \sin \theta) \quad (7)$$

将 (7) 代入 (6) 得：

$$(M + m)\ddot{x} + m \frac{d^2}{dt^2}(L \sin \theta) = F_{\text{friction}} \quad (8)$$

整理后与题给方程

$$(M + m)\ddot{x} = F_{\text{drive}} + F_{\text{friction}} \quad (9)$$

比较，可得“驱动力” F_{drive} 的表达式：

$$F_{\text{drive}} = -m \frac{d^2}{dt^2}(L \sin \theta) = -m[(\ddot{L} - L\dot{\theta}^2) \sin \theta + (L\ddot{\theta} + 2\dot{L}\dot{\theta}) \cos \theta] \quad (10)$$

(2) 为实现向右的净位移，需采用非对称循环。推进阶段：产生一个足够大的向右驱动力 $F_{\text{drive}} > \mu_s N$ ，使圆环向右滑动。复位阶段：配重归位，此过程中驱动力始终满足 $|F_{\text{drive}}| \leq \mu_s N$ ，圆环保持静止。根据 (10)， F_{drive} 是配重 m 相对于圆环中心 O 的水平加速度 $\ddot{x}_{\text{rel}}$ 的 $-m$ 倍：

$$F_{\text{drive}} = -m\ddot{x}_{\text{rel}} \quad (11)$$

要获得向右的驱动力，需使配重相对 O 点有向左的加速度。推进阶段（剧烈运动）：为产生大的向左的 $\ddot{x}_{\text{rel}}$ ，可以采用以下策略：(a) 角向运动：在 $\theta \approx 0$ 附近，使配重有大的顺时针角加速度 $\ddot{\theta} < 0$ 。(b) 径向运动：当配重在右侧 ($\sin \theta > 0$) 时，快速收缩杆长（大的负 $\ddot{L}$ ）；当配重在左侧 ($\sin \theta < 0$) 时，快速伸长杆长（大的正 $\ddot{L}$ ）。复位阶段（缓慢运动）：为使 $|F_{\text{drive}}|$ 保持很小，配重的所有运动（径向和角向）都必须缓慢进行，即各阶导数 $\dot{L}, \ddot{L}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ 都应很小。

(3) (3.1)

（解法一）（解法一符合模型原有预期，电机通过自转消除力矩反作用，从而实现固定的驱动效果。本题如果严谨考虑，应按照解法二求解，但本题题干没有指明如何考虑，两种解法都给分）在 $t = 0$ 时刻，系统静止，有 $\theta = 0, \dot{\theta} = 0, \dot{L} = 0, L = L_0$ 。此时给定的加速度为 $\ddot{L}(0) = a_r, \ddot{\theta}(0) = \alpha$ 。代入 (10) 式，得到 $t = 0$ 时的驱动力：

$$F_{\text{drive}}(0) = -m(L_0 \alpha \cos 0) = -mL_0 \alpha \quad (12)$$

代入 (4) 式，得到 $t = 0$ 时的法向支持力：

$$N(0) = (M + m)g + m(-\ddot{L}(0) \cos 0) = (M + m)g - ma_r \quad (13)$$

当圆环在粗糙地面上纯滚动时，需同时考虑平动和转动。设圆环中心水平加速度为 $\ddot{x}$ ，圆环绕中心的角加速度为 β （逆时针为正）。纯滚动约束给出 $\ddot{x} + R\beta = 0$ ，即 $\beta = -\ddot{x}/R$ 。对圆环绕其中心应用转动定律，摩擦力 f （正方向向右）在接触点产生的力矩为 fR （逆时针），故

$$MR^2\beta = fR \quad (14)$$

结合纯滚动约束得 $f = MR\beta = -M\ddot{x}$ 。将此代入系统水平运动方程 $(M + m)\ddot{x} = F_{\text{drive}} + f$ ：

$$(M + m)\ddot{x} = F_{\text{drive}} - M\ddot{x} \implies \ddot{x} = \frac{F_{\text{drive}}}{2M + m} \quad (15)$$

因此纯滚动时地面对圆环的摩擦力为

$$f = -M\ddot{x} = -\frac{M}{2M + m}F_{\text{drive}} = \frac{MmL_0\alpha}{2M + m} \quad (16)$$

圆环开始向右滑动的条件是：纯滚动所需的摩擦力大小超过最大静摩擦力，且圆环有向右运动的趋势（ $\ddot{x} > 0$ ，即 $\alpha < 0$ ）。滑动条件为 $|f| > \mu_s N(0)$ ，即

$$-\frac{MmL_0\alpha}{2M + m} > \mu_s((M + m)g - ma_r) \quad (17)$$

为保证圆环不离地，还需满足 $N(0) > 0$ ，即

$$a_r < \frac{(M + m)g}{m} \quad (18)$$

（解法二）也可从接触点角动量定理出发，修正纯滚动临界状态下摩擦力与圆环平动加速度的关系。点火瞬间仍有

$$F_{\text{drive}}(0) = -mL_0\alpha, \quad N(0) = (M + m)g - ma_r \quad (12^*)$$

若圆环仍处于纯滚动状态，设圆环自身转角为 ϕ ，取 $\ddot{x} = -R\ddot{\phi}$ 。由于电机控制配重转动会改变配重相对于接触点的角动量，不能只写圆环自身的转动方程，而应写

$$fR = -MR^2\ddot{\phi} + \frac{d}{dt}(mL^2\dot{\theta}), \quad f = M\ddot{x} + \frac{m}{R}(L^2\ddot{\theta} + 2L\dot{L}\dot{\theta}) \quad (13^*)$$

代入水平运动方程 $(M + m)\ddot{x} = F_{\text{drive}} + f$ ，得

$$m\ddot{x} = F_{\text{drive}} + \frac{m}{R}(L^2\ddot{\theta} + 2L\dot{L}\dot{\theta}). \quad (14^*)$$

于是点火瞬间

$$\ddot{x}(0) = L_0\alpha \left(\frac{L_0}{R} - 1 \right) \quad (15^*)$$

维持纯滚动所需静摩擦力为

$$f(0) = ML_0\alpha \left(\frac{L_0}{R} - 1 \right) + \frac{mL_0^2}{R}\alpha = L_0 \left(\frac{(M + m)L_0}{R} - M \right) \alpha. \quad (16^*)$$

因此圆环在点火瞬间开始向右打滑的条件为

$$\begin{aligned} L_0\alpha \left(\frac{L_0}{R} - 1 \right) &> 0, \\ \left| L_0 \left(\frac{(M + m)L_0}{R} - M \right) \alpha \right| &> \mu_s((M + m)g - ma_r), \\ a_r &< \frac{(M + m)g}{m}. \end{aligned} \quad (17^*)$$

在通常情形 $L_0 < R$ 下，向右运动趋势要求 $\alpha < 0$ 。

（3.2）

（解法一）电机对配重施加的作用力 $\vec{F}_{\text{rod}}$ 可由牛顿第二定律求得：

$$\vec{F}_{\text{rod}} = m\vec{a}_m - m\vec{g} \quad (19)$$

在 $t = 0$ 时刻, 配重的加速度 $\vec{a}_m(0) = \ddot{\vec{r}}_m(0)$ 。在直角坐标系中, $x_m = x + L \sin \theta$, $y_m = -L \cos \theta$ 。

$$\ddot{x}_m(0) = \ddot{x}(0) + L_0\alpha, \quad \ddot{y}_m(0) = -a_r \quad (20)$$

在恰好开始滑动的临界状态, 圆环仍处于纯滚动。由 (15), $\ddot{x}(0) = \frac{F_{\text{drive}}(0)}{2M+m} = \frac{-mL_0\alpha}{2M+m}$ 。故

$$\ddot{x}_m(0) = \frac{-mL_0\alpha}{2M+m} + L_0\alpha = \frac{2ML_0\alpha}{2M+m} \quad (21)$$

$$\vec{a}_m(0) = \frac{2ML_0\alpha}{2M+m} \hat{i} - a_r \hat{j} \quad (22)$$

又 $\vec{g} = -g\hat{j}$, 代入得

$$\vec{F}_{\text{rod}} = m \left(\frac{2ML_0\alpha}{2M+m} \hat{i} - a_r \hat{j} \right) - m(-g\hat{j}) = \frac{2MmL_0\alpha}{2M+m} \hat{i} + m(g - a_r) \hat{j} \quad (23)$$

该力大小的平方为:

$$|\vec{F}_{\text{rod}}|^2 = \left(\frac{2MmL_0\alpha}{2M+m} \right)^2 + m^2(g - a_r)^2 \quad (24)$$

在恰好开始滑动的临界条件下, (17) 取等号:

$$-\frac{MmL_0\alpha}{2M+m} = \mu_s((M+m)g - ma_r) \quad (25)$$

由此解出 $\frac{2MmL_0\alpha}{2M+m} = -2\mu_s((M+m)g - ma_r)$, 代入 $|\vec{F}_{\text{rod}}|^2$ 表达式中消去 α :

$$|\vec{F}_{\text{rod}}|^2 = 4\mu_s^2((M+m)g - ma_r)^2 + m^2(g - a_r)^2 \quad (26)$$

为求 $|\vec{F}_{\text{rod}}|$ 的最小值, 令其平方对 a_r 的导数为零:

$$\frac{d}{da_r} |\vec{F}_{\text{rod}}|^2 = 8\mu_s^2((M+m)g - ma_r)(-m) + 2m^2(g - a_r)(-1) = 0 \quad (27)$$

化简得

$$4\mu_s^2((M+m)g - ma_r) + m(g - a_r) = 0 \quad (28)$$

解出最优的径向加速度 a_r :

$$a_r = \frac{(4\mu_s^2(M+m) + m)g}{m(1 + 4\mu_s^2)} \quad (29)$$

将此最优 a_r 代回临界滑动条件 (25), 求解对应的角加速度大小 $|\alpha|_{\min}$ 。首先计算法向力相关项:

$$\begin{aligned} (M+m)g - ma_r &= (M+m)g - \frac{(4\mu_s^2(M+m) + m)g}{1 + 4\mu_s^2} \\ &= \frac{(1 + 4\mu_s^2)(M+m) - 4\mu_s^2(M+m) - m}{1 + 4\mu_s^2} g = \frac{Mg}{1 + 4\mu_s^2} \end{aligned} \quad (30)$$

则由 (25):

$$|\alpha|_{\min} = |-\alpha| = \frac{(2M+m)\mu_s}{MmL_0} ((M+m)g - ma_r) \quad (31)$$

$$|\alpha|_{\min} = \frac{(2M+m)\mu_s g}{mL_0(1+4\mu_s^2)} \quad (32)$$

(解法二) 沿用修正后的纯滚动临界结果。为书写简洁, 记

$$\Gamma = L_0 \left(\frac{(M+m)L_0}{R} - M \right), \quad B = \frac{L_0^2}{R}. \quad (18^*)$$

由 (16*) 可知 $f(0) = \Gamma\alpha$, 恰好开始滑动时

$$|\Gamma\alpha| = \mu_s((M+m)g - ma_r), \quad |\alpha| = \frac{\mu_s((M+m)g - ma_r)}{|\Gamma|}. \quad (19^*)$$

配重在点火瞬间的绝对加速度为

$$\ddot{x}_m(0) = \ddot{x}(0) + L_0\alpha = \frac{L_0^2}{R}\alpha = B\alpha, \quad \ddot{z}_m(0) = -a_r. \quad (20^*)$$

由 $\mathbf{F}_{\text{rod}} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}_m$, 电机作用力分量为

$$F_x = mB\alpha, \quad F_z = m(g - a_r), \quad |\mathbf{F}_{\text{rod}}| = m\sqrt{(g - a_r)^2 + B^2\alpha^2}. \quad (21^*)$$

将临界滑动条件代入, 得

$$\frac{|\mathbf{F}_{\text{rod}}|^2}{m^2} = (g - a_r)^2 + C((M+m)g - ma_r)^2, \quad C = \frac{\mu_s^2 B^2}{\Gamma^2} = \frac{\mu_s^2 L_0^4}{R^2 \Gamma^2}. \quad (22^*)$$

令上式对 a_r 的导数为零:

$$2(a_r - g) - 2Cm((M+m)g - ma_r) = 0, \quad a_r - g = Cm((M+m)g - ma_r). \quad (23^*)$$

于是最优径向加速度为

$$a_r^* = g \frac{1 + Cm(M+m)}{1 + Cm^2}. \quad (24^*)$$

此时

$$N^* = (M+m)g - ma_r^* = \frac{Mg}{1 + Cm^2}, \quad |\alpha|_{\min} = \frac{\mu_s Mg}{|\Gamma|(1 + Cm^2)}. \quad (25^*)$$

即

$$|\alpha|_{\min} = \frac{\mu_s Mg}{\left| L_0 \left(\frac{(M+m)L_0}{R} - M \right) \right| \left[1 + \frac{\mu_s^2 m^2 L_0^4}{R^2 \left(L_0 \left(\frac{(M+m)L_0}{R} - M \right) \right)^2} \right]}. \quad (26^*)$$

若通常 $L_0 < R$, 向右滑动趋势要求 $\alpha < 0$, 故最优点火时取

$$\alpha^* = -|\alpha|_{\min}, \quad |\mathbf{F}_{\text{rod}}|_{\min} = mMg \sqrt{\frac{\frac{\mu_s^2 L_0^4}{R^2 \Gamma^2}}{1 + \frac{\mu_s^2 m^2 L_0^4}{R^2 \Gamma^2}}}. \quad (27^*)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 12 分:

第 (1.1) 问 6 分: (1) (2) 式各 1 分, (3) (4) 式各 2 分;

第 (1.2) 问 6 分: (5) (6) (7) (9) 式各 1 分, (10) 式 2 分;

第 (2) 问 8 分: 写出力的情况 2 分, 指出加速度的关系 2 分, 推进策略正确 2 分, 复位策略正确 2 分;

第 (3) 问 20 分:

第 (3.1) 问 6 分: (12) (13) (14) (15) 式各 1 分, (17) 式 2 分;

解法二: (12*) (15*) (16*) (17*) 式各 1 分, (13*) 式 2 分;

第 (3.2) 问 14 分: (22) (24) (25) (26) (28) (29) (30) (31) 式各 1 分, (21) (27) (32) 式各 2 分;

解法二: (21*) (24*) 式各 1 分, (19*) (20*) (22*) (23*) (25*) (27*) 式各 2 分。

二、(40 分) 高斯光束的古斯-汉森位移

本题中我们将研究高斯光束的古斯-汉森位移现象。

(1) 众所周知, 当平面波从折射率 n_1 的介质入射到折射率 n_2 的介质且 $n_1 > n_2$ 时, 可能发生全反射, 此时不产生透射光, 即反射率 $R = 1$ 。

(1.1) 直接写出全反射时的最小入射角 θ_c , 接下来的小问答案可借助 θ_c 表示。

(1.2) 当发生全反射时, 反射光与入射光之间存在相位差。设入射角为 θ_i , 分别对偏振方向平行、垂直于入射面的线偏振光写出相位差 ϕ_p, ϕ_s 。

(2) 我们容易发现, 不同角度的入射光对应的相位差也不同; 在实际过程中, 由于并不存在理想的平面波入射, 实际反射的光束中心相比入射的将会有一个小偏移, 这就是古斯-汉森位移 δ_{GH} 。

对于 $\theta > \theta_c$ 的一般情况, 我们不必得知入射光的角谱分布 (不同方向入射光分量的占比) 就可以计算最低阶的 δ_{GH} 。设波长为 λ , 试对于 s 光写出该位移的大小。

(3) 注意到, 上问的结果在入射角趋于临界角时发散! 这时我们就必须引入实际的角谱分布了。设 θ 为给定方向与波矢的夹角, 已知在近似下, 高斯光束的角谱分布为:

$$g(\theta) = \frac{\sqrt{\pi}w_0}{\lambda} \exp \left[- \left(\frac{\pi w_0}{\lambda} \right)^2 \theta^2 \right] \quad (1)$$

其中 w_0 为光束的束腰宽度。试求入射角恰好等于临界角时, s 光的古斯-汉森位移 δ_c 。本题中你可能会用到的公式:

$$\int_0^{+\infty} \exp(-t^s) dt = \Gamma \left(1 + \frac{1}{s} \right) \quad (2)$$

解:

(1) (1.1) 较为简单, 这里直接写出答案:

$$\theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad (1)$$

(1.2) 发生全反射时, 根据波矢切向连续和角频率不变, 透射侧的波矢容易计算:

$$\frac{|\vec{k}_t|}{n_2} = \frac{k_i}{n_1}, \quad \vec{k}_t = k_i \left(\sin \theta_i \hat{x} + i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_2^2/n_1^2} \hat{y} \right) \quad (2)$$

对 p 光, 根据电磁场边界条件, 结合全反射时振幅反射率模长为 1:

$$\begin{cases} r = \exp(i\phi_p) \\ n_1^2(1+r) = n_2^2 t \\ k_i \cos \theta_i(1-r) = i k_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_2^2/n_1^2} t \end{cases} \quad (3)$$

(与通常不同, 由于我们只关心相移, 上面写的是更简洁的磁场强度的方程组) 化简得到:

$$\frac{1+r}{1-r} = i \cot \frac{\phi_p}{2} = \frac{n_2^2 \cos \theta_i}{i n_1^2 \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_2^2/n_1^2}} \quad (4)$$

解得

$$\phi_p = -2 \arctan \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_c}}{\cos \theta_i \sin^2 \theta_c} \quad (5)$$

对 s 光, 同样根据边界条件和 $|r| = 1$ 列出方程:

$$\begin{cases} r = \exp(i\phi_s) \\ 1 + r = t \\ k_i \cos \theta_i (1 - r) = i k_i \sqrt{\sin^2 \theta_i - n_2^2/n_1^2} t \end{cases} \quad (6)$$

同理解得

$$\phi_s = -2 \arctan \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_c}}{\cos \theta_i} = -\arccos \frac{\sin^2 \theta_c + \cos 2\theta_i}{\cos^2 \theta_c} \quad (7)$$

(2) 假设界面上的入射光 $E_i(x)$ 可以分解为不同波矢 x 分量的组合:

$$E_i(x) = \int A(k_x) \exp(ik_x x) dk_x \quad (8)$$

则反射光 $E_r(x)$ 为

$$E_r(x) = \int A(k_x) r(k_x) \exp(ik_x x) dk_x \quad (9)$$

将反射率函数在 $k_x = k_{ix}$ 附近做一阶展开, 化简得

$$r(k_x) = \exp[i\phi(k_x)] = \exp[i\phi(k_{ix})] \exp \left[i \frac{d\phi}{dk_x} \cdot (k_x - k_{ix}) \right] \quad (10)$$

$$E_r(x) = \int A(k_x) \exp \left[i \left(\phi - \frac{d\phi}{dk_x} k_{ix} \right) \right] \exp \left[ik_x \left(x + \frac{d\phi}{dk_x} \right) \right] dk_x \quad (11)$$

根据傅里叶变换的性质

$$E_r(x) = E_i \left(x + \frac{d\phi}{dk_x} \right) \exp \left[i \left(\phi - \frac{d\phi}{dk_x} k_{ix} \right) \right] \quad (12)$$

其中多余的一项相位是 GH 位移的附加影响。由此我们可以看出

$$\delta_{GH} = -\frac{d\phi}{dk_x} = \frac{\lambda}{2\pi \cos \theta_i} \frac{d\phi}{d\theta_i} \quad (13)$$

$$\delta_{GH,s} = \frac{\lambda}{\pi} \frac{\tan \theta_i}{\sqrt{\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_c}} \quad (14)$$

(3) 对不同方向的 GH 位移作平均:

$$\delta_c = \int_{\theta_c}^{+\infty} \frac{\lambda}{\pi} \frac{\tan \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_c}} g(\theta - \theta_c) d\theta \quad (15)$$

在 $\theta = \theta_c$ 附近作展开:

$$\delta_c \approx \frac{\lambda}{\pi} \frac{\tan \theta_c}{\sqrt{\sin 2\theta_c}} \int_0^{+\infty} \frac{g(\delta)}{\sqrt{\delta}} d\delta \quad (16)$$

作代换 $\delta = t^2$, 并代入 $g(\theta)$:

$$\delta_c = \frac{2w_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\tan \theta_c}{\sqrt{\sin 2\theta_c}} \int_0^{+\infty} \exp \left[- \left(\frac{\pi w_0}{\lambda} \right)^2 t^4 \right] dt \quad (17)$$

利用题目给出的公式, 最终算得

$$\delta_c = \frac{2w_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\tan \theta_c}{\sqrt{\sin 2\theta_c}} \frac{\Gamma(5/4)}{\sqrt{\pi w_0/\lambda}} = \frac{\Gamma(1/4)}{2\pi} \sqrt{\lambda w_0} \frac{\tan \theta_c}{\sqrt{\sin 2\theta_c}} \quad (18)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 12 分：

第 (1.1) 问 2 分：(1) 式 2 分；

第 (1.2) 问 10 分：(5) (7) 式各 1 分，(2) 式 2 分，(3) (6) 式各 3 分；

第 (2) 问 13 分：(9) 式 1 分，(8) (10) (11) (12) (13) (14) 式各 2 分；

第 (3) 问 15 分：(16) 式 2 分，(17) 式 3 分，(15) 式 4 分，(18) 式 6 分。

三、(50 分) 雷德利克-邝方程的相关计算

雷德利克-邝方程是对理想气体状态方程进行修正得到的一个实际气体状态方程，曾被认为是精确的双参数实际气体状态方程，满足雷德利克-邝方程的气体称为雷德利克-邝气体。1 mol 雷德利克-邝气体满足：

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{\sqrt{T}V_m(V_m + b)} \quad (1)$$

其中 p 为压强， T 为热力学温度， V_m 为摩尔体积， R 为普适气体常量， a 、 b 为已知常量。

Part A 雷德利克-邝方程的相关热力学量

(A.1) 已知 $T \rightarrow \infty$ 时，1 mol 雷德利克-邝气体的内能 U 趋于 $C_{v,m0}T$ ，请尝试求解 1 mol 雷德利克-邝气体的内能 U 的表达式，用 $C_{v,m0}$ 、 T 、 a 、 b 、 V_m 来表示。

提示：麦克斯韦关系 $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$

(A.2) 接上问，给出 1 mol 雷德利克-邝气体的焓 H 的表达式，用 $C_{v,m0}$ 、 T 、 a 、 b 、 V_m 来表示。

(A.3) 接上问，求解 1 mol 雷德利克-邝气体的熵 S 的表达式，并给出 1 mol 雷德利克-邝气体的绝热方程，用 $C_{v,m0}$ 、 T 、 a 、 b 、 V_m 来表示，表达式中可以包含一个待定常量。

(A.4) 接上问，给出 1 mol 雷德利克-邝气体的亥姆霍兹自由能 F 和吉布斯自由能 G 的表达式，用 $C_{v,m0}$ 、 T 、 a 、 b 、 V_m 来表示，表达式中可以包含上一问中的待定常量。

Part B 雷德利克-邝气体的气液相变相关计算

(B.1) 临界点是气液相变的极限状态，满足以下条件： $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0$ ， $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = 0$ 。计算雷德利克-邝方程的临界压强 p_c 、临界体积 V_{mc} 和临界温度 T_c 。定义临界压缩因子 $Z_c = \frac{p_c V_c}{RT_c}$ ，计算雷德利克-邝方程的临界压缩因子。

解：

Part A 雷德利克-邝方程的相关热力学量

(A.1) 对 1 mol 雷德利克-邝气体，由热力学第一定律

$$dU = T dS - p dV \quad (1)$$

并代入提示中的麦克斯韦关系 $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ ，有

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \quad (2)$$

由雷德利克-邝方程

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V_m - b} + \frac{1}{2} \frac{a}{T^{\frac{3}{2}} V_m (V_m + b)} \quad (3)$$

代入 (2) 式得

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{3}{2} \frac{a}{\sqrt{T} V_m (V_m + b)} = \frac{3a}{2b\sqrt{T}} \left(\frac{1}{V_m} - \frac{1}{V_m + b}\right) \quad (4)$$

而对于 $U = U(V, T)$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad (5)$$

注意到（积分得）

$$\left(\frac{\partial}{\partial V} \left(CT - \frac{3a}{2b\sqrt{T}} \ln \left(1 + \frac{b}{V_m} \right) \right) \right)_T = \frac{3}{2} \frac{a}{\sqrt{T} V_m (V_m + b)} = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \quad (6)$$

其中 C 为待定常量。所以内能

$$U = CT - \frac{3a}{2b\sqrt{T}} \ln \left(1 + \frac{b}{V_m} \right) \quad (7)$$

根据题意，当 $T \rightarrow \infty$ 时，1 mol 雷德利克-邦气体的内能 U 趋于 $C_{v,m0}T$ ，从而得到

$$C = C_{v,m0} \quad (8)$$

$$U = C_{v,m0}T - \frac{3a}{2b\sqrt{T}} \ln \left(1 + \frac{b}{V_m} \right) \quad (9)$$

(A.2) 焓的定义

$$H = U + pV \quad (10)$$

代入得

$$H = C_{v,m0}T - \frac{3a}{2b\sqrt{T}} \ln \left(1 + \frac{b}{V_m} \right) + \frac{RTV_m}{V_m - b} - \frac{a}{\sqrt{T}(V_m + b)} \quad (11)$$

(A.3) 考虑熵 S

$$dS = \frac{dU + p dV}{T} = C_{v,m0} \frac{dT}{T} + \frac{3a}{4bT^{\frac{5}{2}}} \ln \left(1 + \frac{b}{V_m} \right) dT + \frac{a}{2T^{\frac{3}{2}} V_m (V_m + b)} dV_m + \frac{R}{V_m - b} dV_m \quad (12)$$

类似地，注意到（积分得）

$$d \left[-\frac{a}{2bT^{\frac{3}{2}}} \ln \left(1 + \frac{b}{V_m} \right) \right] = \frac{3a}{4bT^{\frac{5}{2}}} \ln \left(1 + \frac{b}{V_m} \right) dT + \frac{a}{2T^{\frac{3}{2}} V_m (V_m + b)} dV_m \quad (13)$$

得到

$$S = C_{v,m0} \ln T + R \ln(V_m - b) - \frac{a}{2bT^{\frac{3}{2}}} \ln \left(1 + \frac{b}{V_m} \right) + S_0 \quad (14)$$

其中 S_0 为待定常量。绝热方程满足 $dS = 0$ ，即

$$S = C_{v,m0} \ln T + R \ln(V_m - b) - \frac{a}{2bT^{\frac{3}{2}}} \ln \left(1 + \frac{b}{V_m} \right) + S_0 = \text{Const} \quad (15)$$

即为所求，其中 Const 为待定常量。

(A.4) 根据定义

$$F = U - TS \quad (16)$$

$$G = U - TS + pV \quad (17)$$

代入得

$$F = C_{v,m0}T - \frac{a}{b\sqrt{T}} \ln \left(1 + \frac{b}{V_m} \right) - C_{v,m0}T \ln T - RT \ln(V_m - b) - TS_0 \quad (18)$$

$$G = C_{v,m0}T - \frac{a}{b\sqrt{T}} \ln \left(1 + \frac{b}{V_m} \right) - C_{v,m0}T \ln T - RT \ln(V_m - b) - TS_0 + \frac{RTV_m}{V_m - b} - \frac{a}{\sqrt{T}(V_m + b)} \quad (19)$$

Part B 雷德利克-厄气体的气液相变相关计算

(B.1) 临界点处满足

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{(V_m - b)^2} + \frac{a(2V_m + b)}{\sqrt{T}V_m^2(V_m + b)^2} = 0 \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = \frac{2RT}{(V_m - b)^3} - \frac{2a[(2V_m + b)^2 - V_m(V_m + b)]}{\sqrt{T}V_m^3(V_m + b)^3} = 0 \quad (21)$$

联立解得临界体积

$$V_{mc} = 3.847b \quad (22)$$

代回得到

$$T_c = 0.3450 \left(\frac{a}{Rb}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (23)$$

$$p_c = 0.02989 \left(\frac{a^2 R}{b^5}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (24)$$

$$Z_c = \frac{p_c V_c}{RT_c} = \frac{1}{3} \quad (25)$$

评分标准：本题满分 50 分。

Part A 34 分：

第 (A.1) 问 11 分：(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) 式各 1 分，(9) 式 3 分；

第 (A.2) 问 4 分：(10) 式 1 分，(11) 式 3 分；

第 (A.3) 问 9 分：(12) 式 1 分，(13) 式 2 分，(14) (15) 式各 3 分；

第 (A.4) 问 10 分：(16) (17) 式各 2 分，(18) (19) 式各 3 分；

Part B 16 分：

第 (B.1) 问 16 分：(20) (21) 式各 2 分，(22) (23) (24) (25) 式各 3 分。

四、(40 分) 一维黑体辐射与 Johnson 噪声

任何导体内部的电荷载流子都会因热运动而产生微弱的、随机的电压波动，这种现象被称为热噪声或 Johnson-Nyquist 噪声。一个处于热力学温度 T 的电阻 R ，在频率带宽 $\Delta\nu$ 内产生的开路噪声电压均方值满足 $V_n^2 = 4k_B T R \Delta\nu$ ，其中 k_B 是玻尔兹曼常数。本题旨在通过一个一维光子气体的模型，从电磁场量子化的角度，探讨这一现象的物理根源。

考虑一个理想的无损耗传输线，其特性阻抗为 R 。我们将电阻的热噪声建模为与传输线一端相连的噪声源，而传输线的另一端接有另一个阻值同为 R 的电阻作为匹配负载，以吸收所有来波，避免反射。整个系统处于热力学平衡，温度为 T 。电磁波在传输线中以光速 c 传播。在这个模型中，从一个电阻发出并沿传输线传播的电磁波，可以被看作是一维腔体中的黑体辐射。

(1) 首先考虑一个长度为 L 的理想传输线，并假设其满足周期性边界条件。(1.1) 只考虑电磁波的单向传播（从噪声源到负载电阻），且电缆传输线系统没有偏振，求该一维系统在频率区间 $[\nu, \nu + d\nu]$ 内的电磁模式数 dN 。(1.2) 根据普朗克理论，在温度 T 下，每个模式的平均能量为

$$\langle E(\nu) \rangle = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (1)$$

其中 h 为普朗克常数。推导从一个电阻发出、沿传输线单向传播的噪声功率谱密度（单位频率的功率） $dP/d\nu$ 。进一步地，利用电路理论推导电阻两端开路时可测量的噪声电压谱密度 $dV_n^2/d\nu$ 。

提示：一个 Thévenin 等效噪声源（电压为 V_n ，内阻为 R ）向一个匹配负载 R 输送的功率为 $V_n^2/(4R)$ 。

(1.3) 在经典极限下, 即 $h\nu \ll k_B T$ 时, 对你在 (1.2) 中得到的结果进行近似, 证明在频率带宽 $\Delta\nu$ 内测得的总噪声电压均方值 V_n^2 恰好为 Johnson-Nyquist 公式。

(2) 真实的传输线具有色散效应, 其微观结构决定了可传播电磁波的频率上限。我们用一个无限长的 LC 阶梯网络来模拟这种效应, 该网络由许多重复的 “T” 型单元串联而成, 每个单元的长度为 l_0 。

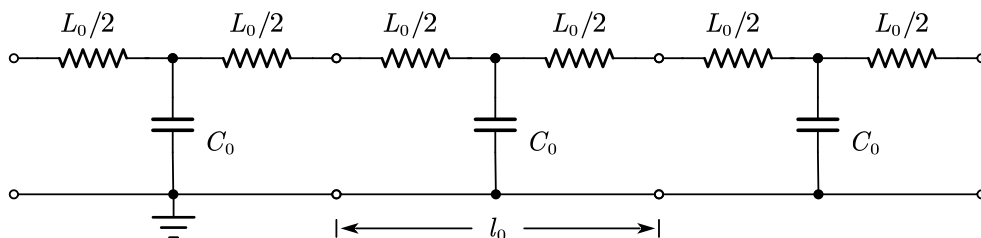


图 4.1: 传输线的 “T” 型 LC 单元模型

(2.1) 考虑一个角频率为 ω 、波数为 k 的正弦电压/电流波在该网络中传播。通过分析单个单元的电压和电流关系, 并利用周期性结构中物理量的关系式, 如 $V(x + l_0) = V(x)e^{ikl_0}$, 推导该传输线的色散关系 $\omega(k)$ 。

(2.2) 根据你得到的色散关系, 确定该传输线能够传播电磁波的截止角频率 ω_c 。在 $h\nu \ll k_B T$ 的经典近似下, 计算由该物理截止频率所限制的电阻总开路噪声电压均方值 V_{total}^2 。

(3) 现在考虑一个长度为 L 的、由 (2) 中描述的 LC 单元构成的有限长传输线。其一端 ($x = 0$) 与噪声源电阻 R 相连, 另一端 ($x = L$) 开路。

(3.1) 简要说明为什么在这种阻抗失配的情况下, 系统的电磁模式不再是连续的, 而是形成分立的共振模式。在长波极限 ($kl_0 \ll 1$) 下, 通过施加合适的边界条件, 求出系统允许的驻波共振角频率 ω_m ($m = 1, 2, 3, \dots$)。

提示: 开路端是电流波节。在 $R \ll \sqrt{L_0/C_0}$ 的近似下, 与电阻连接的一端可视为电压波节。

(3.2) 对于该系统最低的非零共振模式 ω_1 , 计算使其平均热激发光子数 $\langle n_1 \rangle$ 恰好为 1 的特征温度 T^* (一个光子的能量即为 $\hbar\omega_1$)。将 T^* 用 L, l_0, L_0, C_0, h, k_B 表示。

解:

(1) (1.1) 对于长度为 L 的一维系统, 周期性边界条件要求波矢 k 满足:

$$kL = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

波矢与频率 ν 的关系为 $k = 2\pi\nu/c$ 。因此, 允许的频率是分立的, $\nu_n = nc/L$ 。在频率区间 $[\nu, \nu + d\nu]$ 内, 模式数 dN 为:

$$dN = \frac{L}{c} d\nu \quad (2)$$

(1.2) 在频率区间 $[\nu, \nu + d\nu]$ 内, 系统的总热能为模式数乘以每个模式的平均能量 $\langle E \rangle$:

$$dE_{\text{total}} = \langle E \rangle dN = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \frac{L}{c} d\nu \quad (3)$$

这部分能量在长度为 L 的传输线中以速度 c 传播, 因此总功率流为 $P_{\text{total}} = E_{\text{total}}/(L/c)$ 。因此, 从一个电阻发出的单向传播功率谱密度为:

$$\frac{dP}{d\nu} = \frac{dE_{\text{total}}}{d\nu} \frac{c}{L} \quad (4)$$

代入 (3) 得:

$$\frac{dP}{d\nu} = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (5)$$

根据电路理论, 一个 Thévenin 等效噪声源 (电压 V_n , 内阻 R) 向匹配负载 R 输送的功率为 $P = V_n^2/(4R)$ 。其功率谱密度为:

$$\frac{dP}{d\nu} = \frac{1}{4R} \frac{dV_n^2}{d\nu} \quad (6)$$

联立 (5) 和 (6)，得到开路噪声电压谱密度：

$$\frac{dV_n^2}{d\nu} = \frac{4Rh\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (7)$$

(1.3) 在经典极限下， $h\nu \ll k_B T$ 。对指数函数进行一阶泰勒展开：

$$\exp(h\nu/k_B T) - 1 \approx \left(1 + \frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1 = \frac{h\nu}{k_B T} \quad (8)$$

将此近似代入 (7)：

$$\frac{dV_n^2}{d\nu} \approx 4Rh\nu \left(\frac{k_B T}{h\nu}\right) = 4k_B T R \quad (9)$$

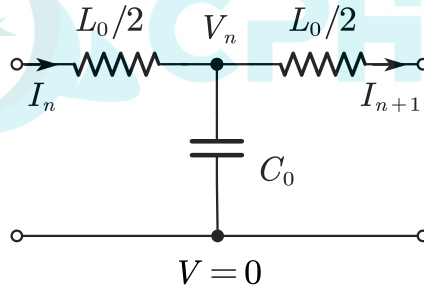
在频率带宽 $\Delta\nu$ 内，总的噪声电压均方值为：

$$V_n^2 = \int_{\Delta\nu} \frac{dV_n^2}{d\nu} d\nu = 4k_B T R \Delta\nu \quad (10)$$

此即 Johnson-Nyquist 公式。

(2) (2.1) 考虑由重复的“T”型单元构成的无穷长 LC 阶梯网络。取第 n 个单元中心的电容（值为 C_0 ）上方的节点为分析点，设该点的电压幅值为 V_n ，如答图 4.1 所示。

相邻两个电容之间的等效串联电感，由前一个单元右侧的 $L_0/2$ 和当前单元左侧的 $L_0/2$ 串联组成，总电感为 L_0 。设从第 $n-1$ 个电容流向第 n 个电容的电流为 I_n ，从第 n 个电容流向第 $n+1$ 个电容的电流为 I_{n+1} 。



答图 4.1: LC 阶梯网络中第 n 个单元的电压和电流关系示意图

根据基尔霍夫电压定律 (KVL)，电感上的电压与电流关系为：

$$I_n = \frac{V_{n-1} - V_n}{i\omega L_0}, \quad I_{n+1} = \frac{V_n - V_{n+1}}{i\omega L_0} \quad (11)$$

对于第 n 个电容所在的节点，根据基尔霍夫电流定律 (KCL)，流入该节点的净电流等于流过该电容的电流：

$$I_n - I_{n+1} = i\omega C_0 V_n \quad (12)$$

将电流表达式代入 KCL 方程中，得到关于相邻节点电压的差分方程：

$$\frac{V_{n-1} - V_n}{i\omega L_0} - \frac{V_n - V_{n+1}}{i\omega L_0} = i\omega C_0 V_n \quad (13)$$

两边同乘 $i\omega L_0$ 并化简得：

$$V_{n-1} + V_{n+1} - 2V_n = -\omega^2 L_0 C_0 V_n \quad (14)$$

根据题目提示，在周期性结构中，电压分布满足关系式 $V_{n\pm 1} = V_n e^{\pm ikl_0}$ 。将其代入上式，得：

$$V_n (e^{-ikl_0} + e^{ikl_0} - 2) = -\omega^2 L_0 C_0 V_n \quad (15)$$

利用欧拉公式 $e^{-ikl_0} + e^{ikl_0} = 2\cos(kl_0)$, 约去非零的 V_n 后得到:

$$\cos(kl_0) = 1 - \frac{\omega^2 L_0 C_0}{2} \quad (16)$$

利用三角恒等式 $\cos(x) = 1 - 2\sin^2(x/2)$, 可得色散关系:

$$\omega(k) = \frac{2}{\sqrt{L_0 C_0}} \left| \sin\left(\frac{kl_0}{2}\right) \right| \quad (17)$$

(2.2) 由 (17) 可知, 当 $|\sin(kl_0/2)| = 1$ 时, 角频率达到最大值, 即截止角频率 ω_c 。

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{L_0 C_0}} \quad (18)$$

在 $h\nu \ll k_B T$ 的经典近似下, 电压均方值由 (10) 式给出, 代入截止频率 $\nu_c = \omega_c/(2\pi)$:

$$V_{\text{total}}^2 = 4k_B T R \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{4k_B T R}{\pi \sqrt{L_0 C_0}} \quad (19)$$

(3) (3.1) 传输线两端阻抗失配导致行波发生反射。反射波与入射波叠加, 只有在特定频率下才能形成稳定的驻波, 即共振模式。因此系统的电磁模式是分立的。

在长波极限 ($kl_0 \ll 1$) 下, 色散关系 (17) 近似为线性关系:

$$\omega \approx \frac{2}{\sqrt{L_0 C_0}} \left(\frac{kl_0}{2} \right) = \frac{l_0}{\sqrt{L_0 C_0}} k = v_p k \quad (20)$$

其中波速 $v_p = l_0/\sqrt{L_0 C_0}$ 。边界条件为: $x = L$ 开路, 电流为零 $I(L) = 0$; $x = 0$ 近似为电压波节, $V(0) = 0$ 。

$$V(0) = 0, \quad I(L) = 0 \quad (21)$$

驻波电压通解为 $V(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$ 。由 $V(0) = 0$ 得 $B = 0$, 故 $V(x) \propto \sin(kx)$ 。对于无损耗线, 电流与电压空间导数成正比, 即 $I(x) \propto dV/dx \propto \cos(kx)$ 。

$$I(L) \propto \cos(kL) = 0 \quad (22)$$

此条件要求 kL 为 $\pi/2$ 的奇数倍:

$$k_m L = (m - 1/2)\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (23)$$

将 k_m 代入长波极限色散关系, 得到共振角频率:

$$\omega_m = v_p k_m = \frac{l_0}{\sqrt{L_0 C_0}} \frac{(m - 1/2)\pi}{L} \quad (24)$$

(3.2) 最低的非零共振模式对应 $m = 1$:

$$\omega_1 = \frac{\pi l_0}{2L \sqrt{L_0 C_0}} \quad (25)$$

模式的平均光子数 $\langle n_1 \rangle = (\exp(h\nu_1/k_B T) - 1)^{-1}$ 。令 $\langle n_1 \rangle = 1$ 时的温度为 T^* :

$$\exp\left(\frac{h\nu_1}{k_B T^*}\right) - 1 = 1 \implies \exp\left(\frac{h\nu_1}{k_B T^*}\right) = 2 \quad (26)$$

解得 T^* :

$$T^* = \frac{h\nu_1}{k_B \ln 2} = \frac{h\omega_1}{2\pi k_B \ln 2} \quad (27)$$

将 (25) 代入得:

$$T^* = \frac{h}{2\pi k_B \ln 2} \frac{\pi l_0}{2L \sqrt{L_0 C_0}} = \frac{h l_0}{4k_B L \ln 2 \sqrt{L_0 C_0}} \quad (28)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 14 分：

第 (1.1) 问 4 分：(1) (2) 式各 2 分；

第 (1.2) 问 6 分：(3) (5) (6) (7) 式各 1 分，(4) 式 2 分；

第 (1.3) 问 4 分：(9) (10) 式各 1 分，(8) 式 2 分；

第 (2) 问 13 分：

第 (2.1) 问 9 分：(11) (12) (14) 式各 1 分，(13) (15) (17) 式各 2 分；

第 (2.2) 问 4 分：(18) (19) 式各 2 分；

第 (3) 问 13 分：

第 (3.1) 问 8 分：(20) (23) (24) 式各 1 分，(21) (22) 式各 2 分，说明不连续原因 1 分；

第 (3.2) 问 5 分：(25) (27) (28) 式各 1 分，(26) 式 2 分。

五、(40 分) 弹性莫比乌斯环

莫比乌斯环是一种具有独特拓扑结构的二维曲面，只有一个边界和一个面，它可以通过将一条长带扭转半圈后连接两端形成，如图 5.1 所示。

本题中使用各向同性的弹性薄带材料制成一个莫比乌斯环，可以被建模为一个具有固定宽度 $2l$ ，且中心线形成总长度为 $L = 2\pi R$ 、半径为 R 的圆（如图 5.1 中弹性带中心的实线圆圈所示，且有 $L \gg l$ ）的莫比乌斯环结构。弹性带的质量面密度为 σ ，厚度忽略不计，自由状态的原长为 L_0 ($L_0 < L$)，不考虑重力。带的中心线本身被固定不可伸长。

该种弹性材料具有二维杨氏模量 G ，定义为当宽度为 w ，长度为 L 的矩形材料在长度方向被拉伸 ΔL 时，所产生的弹性恢复力 F 可表示为

$$F = G \frac{\Delta L}{L} w \quad (1)$$

设 x 为沿带中心线的弧长坐标 ($0 \leq x < L$)，在 x 处取薄带的一个截面（如图 5.1 中的虚线段），为了简化分析，假设所有的截面在扭动中保持直线段形状，记该截面（线）与水平面的夹角为 $\phi(x, t)$ 。

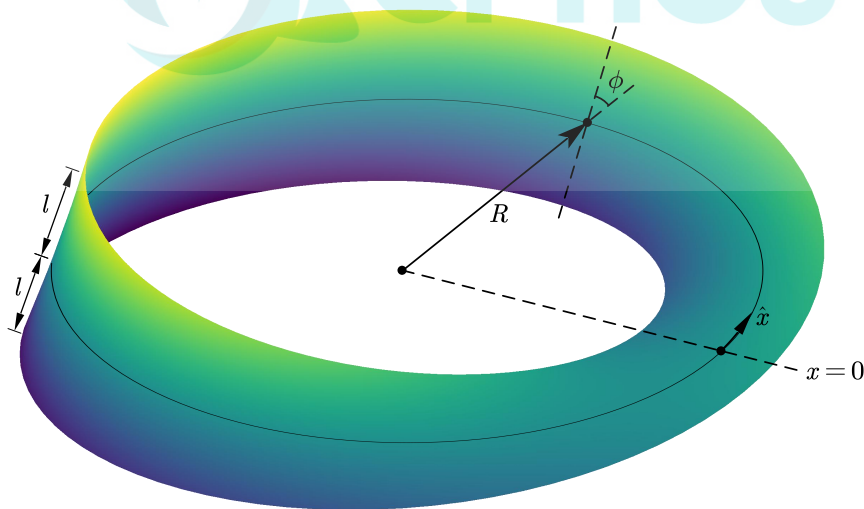


图 5.1: 莫比乌斯弹性带模型示意图

(1) 因为该弹性带被制成了莫比乌斯环拓扑结构，当从 $x = 0$ 处沿中心线行进一周回到原位时，带平面的法向反向。据此在静平衡状态下用 $\phi(0)$ 表示 $\phi(x)$ 。

(2) 给带面一个微扰，弹性带的扭转可以发生微小的波动，导出描述截面扭转角 $\phi(x, t)$ 传播的波动方程，假设弹性带的扭转相对静平衡状态的变化是小角度的。求此扭转波的波速 v ，并用给定的物理量 σ, G, L, L_0 表示。

提示：对于场变量 $\phi(x, t)$ 和拉格朗日量密度 $\mathcal{L} = T - V$ ，连续系统的拉格朗日方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (2)$$

其中 T 和 V 分别为系统的动能密度和势能密度, $\partial_t \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \partial_x \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ 。你需要先计算系统的动能和势能表达式, 然后代入上述方程得到波动方程。

(3) 莫比乌斯环的拓扑结构要求, 任何沿环传播的物理场 (如此处的偏转角 $\phi(x, t)$) 在环绕一周后反向, 这可以表述为反对称周期性边界条件: $\phi(L, t) = \phi(0, t) + \pi$ 及其空间导数 $\frac{\partial \phi}{\partial x}|_{x=L} = \frac{\partial \phi}{\partial x}|_{x=0}$ 。据此求出系统的所有驻波模式。

(4) 现将一个转动惯量为 I_0 的微小刚性细棒固定在弹性带中心线 $x = L/2$ 处, 随该处截面一同扭转。假定 I_0 是一个小量, 满足 $I_0 \ll \sigma l^3 L$ 。附加的细棒会破坏系统的对称性, 并可能解除模式的简并。

(4.1) 直接写出添加细棒后频率不受影响的模式。

(4.2) 求出添加细棒后新产生的模式的频率 ω' 的表达式, 计算结果保留到 $I_0/(\sigma l^3 L)$ 的一阶。提示: 可以将转动惯量 I_0 的影响作为 δ 函数加入到系统的动能中, 然后再利用拉格朗日方程求解新的波动方程; 或者分别对细棒两侧的系统进行分析, 两个子系统仍然满足标准波动方程, 但在 $x = L/2$ 处需要找到额外的边界条件来连接两个子系统。

解:

(1) 由于莫比乌斯环的拓扑结构, 当从 $x = 0$ 处沿中心线行进一周回到原位时, 带平面的法向反向。这意味着 $\phi(L) = \phi(0) + \pi$ 。分析易知静平衡情况下 $\phi(x)$ 随 x 的变化是线性的, 故

$$\phi(x) = \phi(0) + \frac{\pi}{L}x \quad (1)$$

(2) 由题目 (1) 式可知, 弹性带的弹性恢复力与相对拉伸量成正比, 因此可以计算宽度为 b 、长度为 a 的矩形材料在长度方向被拉伸 Δa 时的弹性势能为

$$U = \int_0^{\Delta a} G \frac{s}{a} b ds = \frac{Gb}{2a} (\Delta a)^2 \quad (2)$$

在环面上取一个矩形微元, 长度方向平行于中心线, 长度为 δL , 宽度方向平行于带宽, 宽度为 δw , 且与中心线的距离为 w ($w \in [-l, l]$), 则该微矩形元从长度 δL 被拉伸到

$$\delta L' = \sqrt{(\delta L)^2 + (w\delta\phi)^2} \approx \delta L + \frac{w^2}{2\delta L} (\delta\phi)^2 = \delta L + \frac{w^2}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \delta L \quad (3)$$

其中 $\delta\phi$ 是在矩形微元长度两端截面扭转角的变化。该矩形微元的原长为

$$\delta L_0 = \frac{L_0}{L} \delta L \quad (4)$$

因此该微矩形元的弹性势能为

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{G\delta w}{2\delta L_0} (\delta L' - \delta L_0)^2 \\ &\approx \frac{G\delta w}{2\delta L_0} \left[\left(1 - \frac{L_0}{L} \right) \delta L + \frac{w^2}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \delta L \right]^2 \\ &\approx \frac{1}{2} G\delta w \left(\frac{L}{L_0} - 1 \right)^2 \frac{L_0}{L} \delta L + \frac{1}{2} G\delta w \left(\frac{L}{L_0} - 1 \right) w^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \delta L + O((\partial_x \phi)^4) \end{aligned} \quad (5)$$

积分得到整个环的弹性势能为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-l}^l \int_0^L \left[\frac{1}{2} G \left(\frac{L}{L_0} - 1 \right)^2 \frac{L_0}{L} + \frac{1}{2} G \left(\frac{L}{L_0} - 1 \right) w^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] dw dx \\ &= GL_0 \left(\frac{L}{L_0} - 1 \right)^2 + \frac{1}{3} Gl^3 \left(\frac{L}{L_0} - 1 \right) \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (6)$$

环的动能为

$$T = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \int_0^L \sigma \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 w^2 dw dx = \frac{1}{3} \sigma l^3 \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx \quad (7)$$

因此系统的拉格朗日量密度为

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{3}\sigma l^3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{3}Gl^3 \left(\frac{L}{L_0} - 1 \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \text{Const} \quad (8)$$

将上述拉格朗日量密度代入题目 (2) 式中, 得到描述截面扭转角 $\phi(x, t)$ 传播的波动方程为

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{G}{\sigma} \left(\frac{L}{L_0} - 1 \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

这是一个标准的波动方程, 波速 v 为

$$v = \sqrt{\frac{G}{\sigma} \left(\frac{L}{L_0} - 1 \right)} \quad (10)$$

(3) 不妨设驻波解为 $\phi(x, t) = X(x) \cos(\omega t) + Y(x)$, 由静平衡态解可知

$$Y(x) = \phi_0 + \frac{\pi}{L}x \quad (11)$$

将驻波解代入波动方程 (9) 式中, 得到 $X(x)$ 满足的方程为

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 X = 0 \quad (12)$$

其中 $k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ 。解为三角函数, 由边界条件知 $k_n = \frac{2n\pi}{L}, n = 1, 2, 3, \dots$, 故驻波模式为

$$\phi_n(x, t) = \phi_0 + \frac{\pi}{L}x + A_n \cos \left(\frac{2n\pi}{L}x + \varphi_n \right) \cos \left(\frac{2n\pi v}{L}t \right) \quad (13)$$

(4) (4.1) 由于添加的细棒位于 $x = L/2$ 处, 因此对于满足 $X(L/2) = 0$ 的模式, 细棒不会对其产生任何影响, 这些模式的表达式为

$$\phi_n(x, t) = \phi_0 + \frac{\pi}{L}x + A_n \sin \left(\frac{2n\pi}{L}x \right) \cos \left(\frac{2n\pi v}{L}t \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

(4.2) 新的拉格朗日量密度为

$$\mathcal{L}' = \left[\frac{1}{3}\sigma l^3 + \frac{1}{2}I_0\delta \left(x - \frac{L}{2} \right) \right] \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{3}Gl^3 \left(\frac{L}{L_0} - 1 \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \text{Const} \quad (15)$$

将 $\mathcal{L}'$ 代入题目 (2) 式中, 得到新的波动方程为

$$\left[\sigma l^3 + \frac{3}{2}I_0\delta \left(x - \frac{L}{2} \right) \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - Gl^3 \left(\frac{L}{L_0} - 1 \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (16)$$

注意到在 $x \in [0, \frac{L}{2}) \cup (\frac{L}{2}, L]$ 区间内, ϕ 仍然满足波动方程 (9) 式。在 $x = \frac{L}{2}$ 处, ϕ 满足以下边界条件:

$$-I_0\omega'^2\phi \left(x = \frac{L}{2} \right) = I_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Big|_{x=\frac{L}{2}} = \frac{2}{3}Gl^3 \left(\frac{L}{L_0} - 1 \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=\frac{L}{2}^+} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=\frac{L}{2}^-} \right) \quad (17)$$

注意如果对 δ 函数不熟悉, 对 $x = \frac{L}{2}$ 处进行力矩和转动定理分析也可得到上述边界条件, 此处不再赘述。

将驻波解 $\phi(x, t) = X(x) \cos(\omega't) + Y(x)$ 代入上述边界条件中, 不妨设解为

$$X(x) = \begin{cases} A_1 \sin k'x + B_1 \sin k' \left(\frac{L}{2} - x \right), & x \in [0, \frac{L}{2}) \\ A_2 \sin k'(L - x) + B_2 \sin k' \left(x - \frac{L}{2} \right), & x \in (\frac{L}{2}, L] \end{cases} \quad (18)$$

由边界条件 $X(0) = X(L)$ 和 $X(\frac{L}{2}^-) = X(\frac{L}{2}^+)$ 可知 $A_1 = A_2, B_1 = B_2$, 以下简记为 A, B 。由 $x = 0, L$ 和 $x = \frac{L}{2}$ 处的一阶导边界条件分别得到

$$\begin{cases} A = B \cos \frac{k'L}{2} \\ -I_0 \omega^2 A \sin \frac{k'L}{2} = \frac{4}{3} G l^3 k' \left(1 - \frac{L_0}{L}\right) \left(B - A \cos \frac{k'L}{2}\right) \end{cases} \quad (19)$$

代入色散关系 $k' = \frac{\omega'}{v}$, 得到新产生的模式的波矢 ω' 的满足的关系为

$$\tan \frac{\omega' L}{2v} = -\frac{3I_0}{4\sigma l^3 v} \omega' \quad (20)$$

利用小量近似 $I_0 \ll \sigma l^3 L$, 解的频率 ω' 的表达式为

$$\omega'_n = \frac{2n\pi v}{L} \left(1 - \frac{3I_0}{2\sigma l^3 L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

其中 v 为 (10) 式中求得的波速。可以发现新的模式的频率相较于原模式有一个负的修正, 且修正量与 I_0 成正比, 同样是小量。

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 2 分: (1) 式 2 分;

第 (2) 问 16 分: (2) (3) (4) (5) (6) (7) (9) (10) 式各 2 分;

第 (3) 问 6 分: (11) (12) (13) 式各 2 分;

第 (4) 问 16 分:

第 (4.1) 问 2 分: (14) 式 2 分;

第 (4.2) 问 14 分: (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) 式各 2 分。

六、(60 分) 电子空腔

考虑一束沿 $\hat{z}$ 方向传播、角频率为 ω 的激光入射一团等离子体, 背景正离子可认为固定不动, 其数密度为常量 n_i 、单个正离子带电 Ze 。考虑等离子体对激光本身的影响。电子静质量 m_0 , 元电荷量 e ; 定义 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$, $\vec{u}$ 为电子速度。对于低密度等离子体, 一倍频、二倍频共振不可发生, 从而零频 (静电) 效应更为显著, 这被称作激光尾波场效应。在本题中, 采用磁矢势来描述激光波。矢势为: $\vec{A} = a_L e^{-\frac{\eta^2}{k^2 L^2}} U(x, y, z) e^{-i\omega t} \hat{\alpha}$, 其中 $\eta = kz - \omega t$, $k = \frac{\omega}{c}$; $\hat{\alpha}$ 是与激光主要传播方向 $\hat{z}$ 方向垂直的常矢量; L 充分大, 以至于本题中所有导数、积分都不需要对 $e^{-\frac{\eta^2}{k^2 L^2}}$ 进行作用。已知:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{A} + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_{r1} - 1) \vec{A} = \vec{0} \quad (1)$$

其中 $\varepsilon_{r1} = 1 - \frac{n_0 e^2}{\gamma \varepsilon_0 m_0 \omega^2}$ 在 (2.5) 问以前可认为是已知常量;

Part I 电子的运动

(1) 写出电场 $\vec{E}$ 、磁场 $\vec{B}$ 中, 速度为 $\vec{u}$ 的单电子能量对时间的全导数 $\frac{d\varepsilon}{dt}$, 并由此证明单电子动力学方程为: $\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = -e\vec{E} - \nabla\varepsilon$, 其中 ε 为单电子能量, $\vec{p}$ 为电子动量;

Part II 电子空腔的形成

(2.1) 分别指出 $\hat{\alpha} = \hat{x}$ 、 $\hat{x} + i\hat{y}$ 、 $\hat{x} - i\hat{y}$ 对应什么种类的偏振光, 注意区分左右旋;

以下认为 $\hat{\alpha} = \hat{x} + i\hat{y}$ 。真实的 $\vec{A}$ 为上述复数域下的 $\vec{A}$ 取实部。先在复数域求解;

(2.2) 写出直角坐标下, 标量 U 满足的关于 x 、 y 、 z 的二阶偏微分方程;

(2.3) 进一步令 $U = f(z) e^{-g(z)(x^2+y^2)+ikz}$ 。由于缓变, 可以忽略 $f(z)$ 、 $g(z)$ 对 z 的二阶偏导数项并只保留对 z 一阶偏导数项的最低非零阶项。请导出 $f(z)$ 、 $g(z)$ 满足的两个一阶微分方程, 可以包含 k , ε_{r1} ;

(2.4) 设 $z=0$ 处 $g(0) = \frac{1}{w_0^2}$, 求出 $g(z)$ 并写出 $f(z)$ 满足的一阶微分方程;

(2.5) 设 $z=0$ 处 $f(0) = 1$, 求出 $f(z)$ 的解。进一步在 $\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_0 \omega^2}$ 与 1 相比可忽略的近似下写出 $f(z)$ 的近似解, 并写出 $\vec{A}$ 取实部后的完整近似解;

(2.6) 设 n_0 为电子数密度 (为时空的函数)。认为动力学方程中, 电场几乎全部由电子激发产生的零频电场贡献。写出等离子体满足的泊松方程; 已知稳态情况下, 各物理量不显含时间, 给出 $Zn_i - n_0$ 与 $\nabla^2 \gamma$ 的关系;

(2.7) 求解 γ : 考虑原本的物理图像——激光中电子的运动。注意到各物理量近似与 x 、 y 无关, 且 $A_z = 0$ 。定义 $\vec{u}_\perp = u_x \hat{x} + u_y \hat{y}$, 由动力学方程证明: $\gamma m_0 \vec{u}_\perp - e \vec{A}$ 守恒, 且 $\gamma(u_z - c)$ 守恒; 考虑未加激光时静止的电子, 从而导出 γ 与 $\vec{A}$ 的关系;

(提示: 本小问和之前的讨论无关。即本小问中取一倍频横向电场 $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$; 而前面计算中, 泊松方程中用到的电场是在脉冲附近稳态电子激发的零频纵模静电场, 两者并不相同且不矛盾。)

(2.8) 忽略关于 z 的二阶导数项, 即认为 $\nabla^2 \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial}{\partial \rho})$, ρ 为柱坐标系的径向长度。电子的有质动力会排空轴附近的电子, 从而在轴附近形成一个电子空腔, 记 (z, t) 处其半径为 R_e 。利用 (z, t) 处径向电荷守恒, 求出 R_e 与 (z, t) 的关系 (提示: $\rho \leq R_e$ 内仅存在正离子, 而 $\rho > R_e$ 的空间内, $Zn_i - n_0$ 符合前述小问的结果), 用 a_L 、 w_0 及题给参量表示; 给出电子空腔存在的条件, 并说明只有强激光或低密度等离子体中才会出现该效应。

Part III 电子空腔对光线的次级影响

考虑电子空腔结构对光束的次级影响。为了简化, 本问中认为电子数密度在空间形成稳态分布 $n_e(\rho) = n_i(1 - e^{-\frac{\rho^2}{R_e^2}})$, 且仅存在于 $0 \leq z \leq d$ 的范围内。忽略电子在外电场驱动下运动时所受正离子的回复力与阻尼力; 且已知 $\frac{n_i e^2}{\epsilon_0 m_0 \omega^2} \ll 1$ (低密度等离子体)

(3.1) 写出电子在平面光波 (电场 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$) 驱动下的复数域稳态相对原平衡位置位移的解, 进而求解折射率分布 $n(\rho)$;

(3.2) 考虑从 $z = 0$ 处入射、沿 z 轴正方向传播的激光, 本问中近似为平面光波。考虑傍轴光线 ($\rho \ll R_e$)、薄透镜 ($d \ll R_e$) 近似, 求出该结构的等效焦距 f , 结果保留至首阶即可。

解:

Part I 电子的运动

(1) 电场做功使 ε 改变:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -e \vec{E} \cdot \vec{u} \quad (1)$$

全导数与偏导数关系:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \varepsilon \quad (2)$$

可见只需凑矢量和 $\vec{u}$ 的点乘。注意到微分关系:

$$d\varepsilon \equiv \vec{u} \cdot d\vec{p} \quad (3)$$

代入:

$$\vec{u} \cdot \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + e \vec{E} + \nabla \varepsilon \right) = 0 \quad (4)$$

由 $\vec{u}$ 的任意性:

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + e \vec{E} + \nabla \varepsilon = \vec{0} \quad (5)$$

Part II 电子空腔的形成

(2.1)

$$\hat{\alpha} = \hat{x}: \text{沿 } x \text{ 方向偏振的线偏振光} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \hat{x} + i\hat{y}: \text{左旋圆偏振光} \\ \hat{\alpha} &= \hat{x} - i\hat{y}: \text{右旋圆偏振光} \end{aligned} \quad (7)$$

(2.2) 由题:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (U(x, y, z) e^{-i\omega t}) + \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_{r1} - 1) U(x, y, z) e^{-i\omega t} = 0 \quad (8)$$

化简得到:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \varepsilon_{r1} k^2 U = 0 \quad (9)$$

(2.3) 将 $U = f(z)e^{-g(z)(x^2+y^2)+ikz}$ 代入, 略去 $f''(z)$ 、 $g''(z)$ 得:

$$\left(4fg^2 - 2ikf \frac{dg}{dz}\right)(x^2 + y^2) + \left[2ik \frac{df}{dz} - 4fg + (\varepsilon_{r1} - 1)k^2 f\right] = 0 \quad (10)$$

上式恒成立, 即:

$$\frac{dg}{dz} = -\frac{2i}{k}g^2 \quad (11)$$

$$(\varepsilon_{r1} - 1)k^2 f + 2ik \frac{df}{dz} = 4fg \quad (12)$$

(2.4) 求解(11)式得:

$$g(z) = \frac{1}{w_0^2 + \frac{2iz}{k}} \quad (13)$$

代入(12)式得:

$$(\varepsilon_{r1} - 1)k^2 f + 2ik \frac{df}{dz} = \frac{4f}{w_0^2 + \frac{2iz}{k}} \quad (14)$$

(2.5) 求解(14)式得:

$$f(z) = \frac{1}{1 + \frac{2iz}{kw_0^2}} \exp\left(-\frac{ikzn_0 e^2}{2\gamma\varepsilon_0 m_0 \omega^2}\right) \quad (15)$$

近似解:

$$f(z) \approx \frac{1}{1 + \frac{2iz}{kw_0^2}} \quad (16)$$

代入化简得:

$$\vec{A} = \frac{a_L}{\sqrt{1 + \frac{4z^2}{k^2 w_0^4}}} \exp\left[-\left(\frac{z - ct}{L}\right)^2 - \frac{(x^2 + y^2)w_0^2}{w_0^4 + \frac{4z^2}{k^2}}\right] (\cos\Phi \hat{x} - \sin\Phi \hat{y}) \quad (17)$$

$$\Phi = kz - \omega t + \frac{2z(x^2 + y^2)}{kw_0^4(1 + \frac{4z^2}{k^2 w_0^4})} - \arctan\left(\frac{2z}{kw_0^2}\right) \quad (18)$$

(2.6) 泊松方程:

$$\nabla \cdot \vec{E}_0 = \frac{(Zn_i - n_0)e}{\varepsilon_0} \quad (19)$$

稳态条件:

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = -e\vec{E}_0 - \nabla\varepsilon = \vec{0} \quad (20)$$

质能关系:

$$\varepsilon = \gamma m_0 c^2 \quad (21)$$

得到:

$$\nabla^2 \gamma = -\frac{(Zn_i - n_0)e^2}{\varepsilon_0 m_0 c^2} \quad (22)$$

(2.7) 注意到:

$$\frac{\partial}{\partial z} = k \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\omega \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \nabla \approx \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (23)$$

从而代入单电子动力学方程得:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\gamma m_0 \vec{u} - e \vec{A} - \gamma m_0 c \hat{z}) = \vec{0} \quad (24)$$

考虑(24)式的横向分量有:

$$\gamma m_0 \vec{u}_\perp - e \vec{A} = \text{Const} \quad (25)$$

再考虑其 z 方向分量有:

$$\gamma(u_z - c) = \text{Const} \quad (26)$$

从而由初始条件:

$$\gamma m_0 \vec{u}_\perp = e \vec{A} \quad (27)$$

$$\gamma(u_z - c) = -c \quad (28)$$

利用 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ 联立解得:

$$\gamma = 1 + \frac{e^2 |\vec{A}|^2}{2m_0^2 c^2} \quad (29)$$

(2.8) 径向电荷守恒:

$$\int_0^{R_e} Z n_i \rho \, d\rho + \int_{R_e}^{+\infty} (Z n_i - n_0(\rho, z, t)) \rho \, d\rho = 0 \quad (30)$$

由前问结果: (注意对 $\vec{A}$ 应当先取实部再取矢量的模)

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{e a_L}{m_0 c} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{4z^2}{k^2 w_0^4}} \exp \left(-\frac{2(z - ct)^2}{L^2} - \frac{2w_0^2 \rho^2}{w_0^4 + \frac{4z^2}{k^2}} \right) \quad (31)$$

将(22)式代入(30)式并利用 $\nabla^2 \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \frac{\partial}{\partial \rho})$ 有:

$$\frac{1}{2} Z n_i R_e^2 \approx \frac{\varepsilon_0 m_0 c^2 R_e}{e^2} \left(-\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=R_e} \quad (32)$$

代入(31)式得:

$$R_e = w_0 \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{4z^2}{k^2 w_0^4} \right) \left[\ln \frac{4\varepsilon_0 a_L^2}{Z n_i m_0 w_0^2} - 2 \ln \left(1 + \frac{4z^2}{k^2 w_0^4} \right) - \frac{2(z - ct)^2}{L^2} \right]} \quad (33)$$

存在 R_e 要求:

$$n_i < \frac{4\varepsilon_0 a_L^2}{Z m_0 w_0^2} \quad (34)$$

所以电子空腔仅存在于强激光激发下的低密度等离子体中。

Part III 电子空腔对光线的次级影响

(3.1) 设 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$, $\vec{x}$ 为电子相对平衡位置的位移, 有:

$$m_0 \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -e \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (35)$$

稳态解:

$$\vec{x} = \frac{e\vec{E}_0}{m_0\omega^2} e^{-i\omega t} \quad (36)$$

从而电极化强度矢量为:

$$\vec{P} = n_e(\rho)(-e)\vec{x} = -\frac{n_e(\rho)e^2\vec{E}}{m_0\omega^2} \quad (37)$$

物态方程:

$$\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\vec{E} \quad (38)$$

从而折射率:

$$n(\rho) = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 - \frac{n_i e^2}{\varepsilon_0 m_0 \omega^2} \left(1 - e^{-\frac{\rho^2}{R_e^2}}\right)} \quad (39)$$

(3.2) 考虑 $\rho = 0$ 处与 ρ 处入射的两束光线, 由等光程原理:

$$n(\rho = 0) \cdot d + f \approx n(\rho) \cdot d + \sqrt{f^2 + \rho^2} \quad (40)$$

展开至 ρ^2 的首阶:

$$d + f \approx \left(1 - \frac{n_i e^2 \rho^2}{2\varepsilon_0 m_0 \omega^2 R_e^2}\right) \cdot d + f + \frac{\rho^2}{2f} \quad (41)$$

即得:

$$f \approx \frac{\varepsilon_0 m_0 \omega^2}{n_i e^2} \cdot \frac{R_e^2}{d} \quad (42)$$

可见 $f \gg R_e \gg d, \rho$, 该结果是合理的。

评分标准: 本题满分 60 分。

Part I 5 分:

第 (1) 问 5 分: (1) (2) (3) (4) (5) 式各 1 分;

Part II 44 分:

第 (2.1) 问 4 分: (6) 式 1 分, (7) 式 3 分;

第 (2.2) 问 2 分: (8) (9) 式各 1 分;

第 (2.3) 问 4 分: (11) (12) 式各 1 分, (10) 式 2 分;

第 (2.4) 问 2 分: (13) (14) 式各 1 分;

第 (2.5) 问 7 分: (16) 式 1 分, (15) (17) (18) 式各 2 分;

第 (2.6) 问 5 分: (19) (20) (21) 式各 1 分, (22) 式 2 分;

第 (2.7) 问 9 分: (23) (25) (26) (27) (28) 式各 1 分, (24) (29) 式各 2 分;

第 (2.8) 问 11 分: (31) 式 1 分, (30) (32) (34) 式各 2 分, (33) 式 3 分, 说明电子空腔仅存在于强激光激发下的低密度等离子体中 1 分;

Part III 11 分:

第 (3.1) 问 6 分: (35) (36) (37) (38) 式各 1 分, (39) 式 2 分;

第 (3.2) 问 5 分: (41) 式 1 分, (40) (42) 式各 2 分。

七、(50 分) π 介子

在原子核物理中, π 介子被认为是传递核力的中间玻色子, 由手征对称性自发破缺产生。在本题中, 我们尝试在经典非相对论极限下, 构建一个用于描述 π 介子相关物理机制的模型。已知: 质子质量 $m_p = 938.272 \text{ MeV}/c^2$, 中子质量 $m_n = 939.565 \text{ MeV}/c^2$, $\hbar c = 197.327 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ 。

(1) 粒子物理中, π 介子是标量粒子, 其质量约为 $m_\pi \approx 138 \text{ MeV}/c^2$ 。

(1.1) 请根据相对论能动量关系 $H^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m_\pi^2 c^4$, 做替换:

$$H \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (1)$$

导出 π 介子波函数 $\phi(\vec{r}, t)$ 满足的二阶偏微分方程, 即 Klein-Gordon 方程。在 ϕ 只依赖球坐标距离 r 的情况, 求出 $\phi(r)$, 可包含一个待定常数。

(1.2) 核力实际上可以等效成一个 π 介子场的作用 (你可以类比静电势), 你在上一小问求出的波函数实际上就是 π 介子场。我们建立一个经典场论模型: (i) 假设核子携带某种“荷” g ; (ii) 一个具有“荷” g 的粒子在 π 介子场 ϕ 下的势能为 $-g\phi$; (iii) 一个位于 $\vec{r}'$ 具有“荷” g 的点粒子产生的 π 介子场满足如下方程:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \mu^2 \right) \phi = g \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2)$$

其中, $\mu = \frac{m_\pi c}{\hbar}$, $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$ 为三维狄拉克函数, 满足:

$$\delta^3(\vec{r}) = 0, \quad \text{对 } \vec{r} \neq \vec{0} \quad (3)$$

$$\int_V \delta^3(\vec{r}) d^3r = 1, \quad \text{若区域 } V \text{ 包含原点} \quad (4)$$

试写出位于原点的荷 g 产生的静 π 介子场, 即确定上一小问中的待定常数。

(2) 考虑一个氘原子核, 将其视为一个质子和一个中子构成的两体束缚态。为方便起见, 本问中请取两核子相互作用势能为 $V = -A \frac{e^{-\mu r}}{r}$, 最终答案用 A, μ 表达。

(2.1) 认为质子和中子都做圆周运动, 用玻尔模型求出能级、质子中子间距的表达式。你可以令 $x = \mu r$, 并给出 x 满足的代数方程, 最后的结果可以保留 x 。

(2.2) 若已知氘的基态结合能 $E = -2.2 \text{ MeV}$, 求出 $\frac{A}{\hbar c}$ 的值, 保留 3 位有效数字。

(2.3) 考虑定态薛定谔方程:

$$\hat{H}\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(r) \right) \psi = E\psi \quad (5)$$

其中, M 为两体约化质量 $M = \frac{m_n m_p}{m_n + m_p}$ 。我们只关心基态的行为, 所以有 $\psi = \psi(r)$ 。再

令 $u(r) = r\psi(r)$, 请写出 $u(r)$ 满足的方程。

(2.4) 接上一小问。由于该方程的精确解不易求出, 我们使用变分法近似求解。量子力学中, 基态是所有态中能量期望值最小的态, 所以我们可以先任取一个可归一化的波函数 $\psi(r)$, 然后计算其能量期望值

$$\bar{E} = \frac{\int \psi^* \hat{H} \psi dV}{\int |\psi|^2 dV} \quad (6)$$

最后调整 $\psi(r)$ 使得能量尽可能小, 这就是变分法的基本思想。现在请取 $u(r) = C r e^{-\sigma r}$, 利用基态能量 $E = -2.2 \text{ MeV}$, 求出 $\frac{A}{\hbar c}$ 以及此时的 σ 。

(3) π 介子场也存在辐射, 可以通过类比电磁辐射来导出经典意义下的 π 介子散射截面。

(3.1) 将“荷”的概念推广至“荷密度” $\rho(\vec{r}, t)$, 可以写出 π 介子场方程:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \mu^2 \right) \phi(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \quad (7)$$

场的能量密度和能流密度如下:

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + \mu^2 \phi^2 \right), \quad \vec{S} = -\dot{\phi} \nabla \phi \quad (8)$$

证明荷密度为 0 的空间中满足能量守恒式: $\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0$ 。

(3.2) 考虑“偶极辐射”，即具有如下形式的荷分布：

$$\rho(\vec{r}, t) = -\text{Re}\{\vec{p}_\omega \cdot \nabla \delta^3(\vec{r}) e^{-i\omega t}\}, \quad \omega > \mu c \quad (9)$$

设含时 π 介子场 $\phi(\vec{r}, t) = \text{Re}\{\phi_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega t}\}$ ，求出 ϕ_ω 满足的微分方程。

(3.3) 已知对于 Helmholtz 方程 $(\nabla^2 + k^2)y(\vec{r}) = f(\vec{r})$ ，其辐射解为：

$$y(\vec{r}) = - \int f(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \quad (10)$$

其中，积分是对全空间进行的。试求出“偶极辐射”的解 $\phi_\omega(\vec{r})$ 。

(3.4) 类比经典电动力学的散射模型，考虑一个质子与一个 π 介子的弹性散射过程，入射 π 介子场为 $\phi_\omega = \phi_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ ，其中 $\vec{k}$ 满足 $|\vec{k}| = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \mu^2}$ 。质子在入射场的作用下做简谐振动，

可视为一个偶极源，并进一步激发偶极辐射。求出辐射功率的角分布 $\frac{dP}{d\Omega}$ 。已知质子可以视为“荷”为 g 的点源。

(3.5) 接上一小问，记入射 π 介子的平均能流密度（即强度）为 I ，微分散射截面的定义为 $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I} \frac{dP}{d\Omega}$ 。求出该散射过程的微分散射截面以及总散射截面（对角度积分）。

解：

(1) (1.1) 不难得出 Klein-Gordon 方程：

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \phi + m_\pi^2 c^4 \phi \quad (1)$$

若 $\phi = \phi(r)$ ，则该方程变为：

$$-\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\phi) + \left(\frac{m_\pi c}{\hbar} \right)^2 \phi = 0 \quad (2)$$

波函数在无穷远取值应为零，所以方程解为：

$$\phi = \frac{C}{r} \exp\left(-\frac{m_\pi c}{\hbar} r\right) \quad (3)$$

(1.2) 在以 $\vec{r}'$ 为中心，半径为 ε 的球内对题述场方程积分，并取 $\varepsilon \rightarrow 0$ ：

$$\int_{V_\varepsilon} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \mu^2 \right) \phi d^3r = g \int_{V_\varepsilon} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') d^3r = g \quad (4)$$

利用 Gauss 定理：

$$\int_{V_\varepsilon} \nabla^2 \phi d^3r = \int_{V_\varepsilon} \nabla \cdot (\nabla \phi) d^3r = \oint_{S_\varepsilon} \nabla \phi \cdot d\vec{S} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi \varepsilon^2 \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=\varepsilon}$$

完成积分后，可以求得：

$$\phi(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (5)$$

(2) (2.1) 圆周运动：

$$\frac{L^2}{Mr^3} = -F_r = \frac{\partial V}{\partial r} = A \frac{1 + \mu r}{r^2} e^{-\mu r} \quad (6)$$

其中， L 为总角动量， $M = \frac{m_n m_p}{m_n + m_p}$ 为约化质量。由角动量量子化：

$$L = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

把(7)式代入(6)式，并令 $x = \mu r$ ，得：

$$x_n(1 + x_n) e^{-x_n} = \frac{\mu \hbar^2}{MA} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

能量:

$$E = \frac{L^2}{2Mr^2} - A \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (9)$$

最终得出两体间距和能量的表达式:

$$r_n = \frac{1}{\mu} x_n, \quad E_n = -\frac{\hbar^2 \mu^2}{2M} \frac{n^2(1-x_n)}{x_n^2(1+x_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

(2.2) 将 $E_1 = -2.2 \text{ MeV}$ 代入(10)式可解得:

$$x_1 = 0.8535 \quad (11)$$

代入(8)式得:

$$\frac{A}{\hbar c} = \frac{\mu \hbar}{Mc x_1(1+x_1)} = 0.436 \quad (12)$$

(2.3) 由薛定谔方程得:

$$\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + \left(E + A \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) \psi = 0 \quad (13)$$

做变量替换 $\psi(r) = \frac{u(r)}{r}$ 容易得出:

$$\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left(E + A \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) u = 0 \quad (14)$$

(2.4) 根据题述, 并做替换 $\psi(r) = \frac{u(r)}{r}$, 可写出能量期望值满足的方程:

$$\bar{E} \int_0^\infty u(r)^2 dr = -\frac{\hbar^2}{2M} \int_0^\infty u(r) u''(r) dr - A \int_0^\infty \frac{e^{-\mu r}}{r} u(r)^2 dr \quad (15)$$

利用分部积分

$$\int_0^\infty u(r) u''(r) dr = [u(r) u'(r)]_0^\infty - \int_0^\infty u'(r)^2 dr = - \int_0^\infty u'(r)^2 dr \quad (16)$$

化简得:

$$\bar{E} \int_0^\infty u(r)^2 dr = \frac{\hbar^2}{2M} \int_0^\infty u'(r)^2 dr - A \int_0^\infty \frac{e^{-\mu r}}{r} u(r)^2 dr \quad (17)$$

将 $u(r) = C r e^{-\sigma r}$ 代入得:

$$\bar{E} \int_0^\infty r^2 e^{-2\sigma r} dr = \frac{\hbar^2}{2M} \int_0^\infty (1 - \sigma r)^2 e^{-2\sigma r} dr - A \int_0^\infty r e^{-(2\sigma + \mu)r} dr \quad (18)$$

完成积分, 可得:

$$\bar{E} = \frac{\hbar^2 \sigma^2}{2M} - A \frac{\sigma^3}{(\sigma + \mu/2)^2} \quad (19)$$

对 σ 求导并令其导数值为零, 可得极值点满足的方程:

$$\frac{\mu \hbar^2}{MA} = \frac{y^2 + 3y/2}{(y + 1/2)^3}, \quad (y = \sigma/\mu) \quad (20)$$

联立(19)式与(20)式解得:

$$\sigma = 0.8517\mu = 0.595 \text{ fm}^{-1}, \quad \frac{A}{\hbar c} = 0.362 \quad (21)$$

(3) (3.1)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 + (\nabla \phi)^2 + \mu^2 \phi^2 \right) \right) + \nabla \cdot (-\dot{\phi} \nabla \phi) \\
&= \frac{1}{c^2} \dot{\phi} \ddot{\phi} + \nabla \phi \cdot \nabla \dot{\phi} + \mu^2 \phi \dot{\phi} - \nabla \dot{\phi} \cdot \nabla \phi - \dot{\phi} \nabla^2 \phi \\
&= \dot{\phi} \left(\frac{1}{c^2} \ddot{\phi} - \nabla^2 \phi + \mu^2 \phi \right)
\end{aligned} \tag{22}$$

根据场方程知等式右侧为零，故得证。

(3.2) 将单频场代入场方程即得：

$$\left(\nabla^2 - \mu^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \phi_\omega = \vec{p}_\omega \cdot \nabla \delta^3(\vec{r}) \tag{23}$$

(3.3) 记 $k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \mu^2}$ ，则(23)的解为：

$$\phi_\omega = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \vec{p}_\omega \cdot \nabla' \delta^3(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{24}$$

运用分部积分：

$$\phi_\omega = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' \left[\nabla' \cdot \left(\vec{p}_\omega \delta^3(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) - \delta^3(\vec{r}') \vec{p}_\omega \cdot \nabla' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] \tag{25}$$

积分的第一项可转化为无穷远边界值，故为零。所以有：

$$\phi_\omega = \frac{\vec{p}_\omega}{4\pi} \cdot \nabla' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \Big|_{\vec{r}'=\vec{0}} = -\frac{\vec{p}_\omega \cdot \hat{r}}{4\pi r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) e^{ikr} \tag{26}$$

(3.4) 对质子有运动方程：

$$m_p \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = g \nabla \phi = \text{Re} \left\{ ig \phi_0 \vec{k} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\} \tag{27}$$

稳定解为：

$$\vec{r} = \text{Re} \left\{ \frac{g \phi_0 \vec{k}}{im_p \omega^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right\} \tag{28}$$

对应的偶极矩为：

$$\vec{p} = g \vec{r} = \text{Re} \left\{ \frac{g^2 \phi_0 \vec{k}}{im_p \omega^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right\} \tag{29}$$

频域偶极矩为：

$$\vec{p}_\omega = \frac{g^2 \phi_0}{im_p \omega^2} \vec{k} \tag{30}$$

由上一小问的结果得散射场：

$$\phi_\omega^{\text{out}} = -\frac{g^2 \phi_0 \vec{k} \cdot \hat{r}}{i4\pi m_p \omega^2 r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) e^{ikr} \tag{31}$$

辐射只与无穷远处的场的行为有关，辐射能流密度只需要保留到 $\frac{1}{r^2}$ 阶，所以 π 介子场只需保留到 $\frac{1}{r}$ 阶即可：

$$\phi^{\text{rad}} = -\text{Re} \left\{ \frac{g^2 \phi_0 \vec{k} \cdot \hat{r}}{4\pi m_p \omega^2 r} e^{i(kr - \omega t)} \right\} \tag{32}$$

$$\dot{\phi}^{\text{rad}} = \text{Re} \left\{ \frac{ig^2 \phi_0 k \vec{k} \cdot \hat{r}}{4\pi m_p \omega r} e^{i(kr - \omega t)} \right\} \quad (33)$$

$$\nabla \phi^{\text{rad}} = -\text{Re} \left\{ \frac{ig^2 \phi_0 k^2 \vec{k} \cdot \hat{r} \hat{r}}{4\pi m_p \omega^2 r} e^{i(kr - \omega t)} \right\} \quad (34)$$

辐射能流密度:

$$\vec{S} = \left(\frac{g^2 \vec{k} \cdot \hat{r}}{4\pi m_p r} \right)^2 \frac{k^3}{2\omega^3} |\phi_0|^2 \hat{r} \quad (35)$$

有辐射功率分布:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \vec{S} \cdot \hat{r} = \frac{g^4 k^5 |\phi_0|^2 \cos^2 \theta}{32\pi^2 m_p^2 \omega^3} \quad (36)$$

其中, θ 是散射方向与入射波矢 $\vec{k}$ 的夹角。

(3.5) 入射场的能流密度:

$$\vec{S}_{\text{in}} = \text{Re} \left\{ i\omega \phi_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right\} \text{Re} \left\{ i\vec{k} \phi_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right\} \quad (37)$$

对时间取平均得:

$$I = \frac{1}{2} |\phi_0|^2 \omega k \quad (38)$$

得出微分散射截面:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g^4 k^4}{16\pi^2 m_p^2 \omega^4} \cos^2 \theta \quad (39)$$

总截面:

$$\sigma_T = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^\pi \frac{g^4 k^4 \cos^2 \theta}{16\pi^2 m_p^2 \omega^4} 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{g^4 k^4}{12\pi m_p^2 \omega^4} \quad (40)$$

评分标准: 本题满分 50 分。

第 (1) 问 7 分:

第 (1.1) 问 4 分: (1) (2) 式各 1 分, (3) 式 2 分;

第 (1.2) 问 3 分: (4) 式 1 分, (5) 式 2 分;

第 (2) 问 20 分:

第 (2.1) 问 7 分: (6) (7) (9) 式各 1 分, (8) (10) 式各 2 分;

第 (2.2) 问 3 分: (11) 式 1 分, (12) 式 2 分;

第 (2.3) 问 2 分: (13) (14) 式各 1 分;

第 (2.4) 问 8 分: (15) (17) (18) (20) 式各 1 分, (19) (21) 式各 2 分;

第 (3) 问 23 分:

第 (3.1) 问 2 分: (22) 式 2 分;

第 (3.2) 问 2 分: (23) 式 2 分;

第 (3.3) 问 4 分: (24) (25) 式各 1 分, (26) 式 2 分;

第 (3.4) 问 11 分: (27) (28) (29) (30) (31) (32) (33) (34) (35) 式各 1 分, (36) 式 2 分;

第 (3.5) 问 4 分: (37) (38) (39) (40) 式各 1 分。

版权信息

命题人

张文骞 宋安东 陈奥博 付亦轩 王家成 李圣和

审题人

小夜 李圣和 陈奥博 王家成 付亦轩 宋安东

联系方式

微信公众号
CPHOS官方网站
www.cphos.cn

CPHOS 论坛

邮箱

service@cphos.cn

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考

