

第 31 届 CPHOS 物理竞赛联考暨复赛模拟 理论试题

本文件于 2026 年 9 月 4 日 12:00 发布，最后更新于 2026 年 9 月 4 日 14:20。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

一、(45 分) 环形长槽中的界面波

一闭合环形长槽的周长为 L 。槽的横截面为矩形，其尺度远小于 L 。认为环形槽的曲率很小，对本题中结论的影响可以忽略。沿槽建立坐标 x ，竖直向上建立坐标 z ，本系统的各个函数只与 x, z, t 有关。刚性顶壁、底壁分别位于 $z = h_1$ 与 $z = -h_2$ 。槽内有上下两层互不相溶的理想流体：上层密度为 ρ_1 ，占据 $0 < z < h_1$ ；下层密度为 ρ_2 ，占据 $-h_2 < z < 0$ ，其中 $\rho_2 > \rho_1$ 。重力加速度为 g ，方向沿 z 轴负向。未受扰动时，两层流体分别以恒定速度 U_1 、 U_2 沿 x 方向运动，界面为 $z = 0$ ；受扰动后，界面的位置记为 $z = \eta(x, t)$ 。界面张力系数为 σ 。沿圆周展开后的纵剖面如图 1.1 所示。

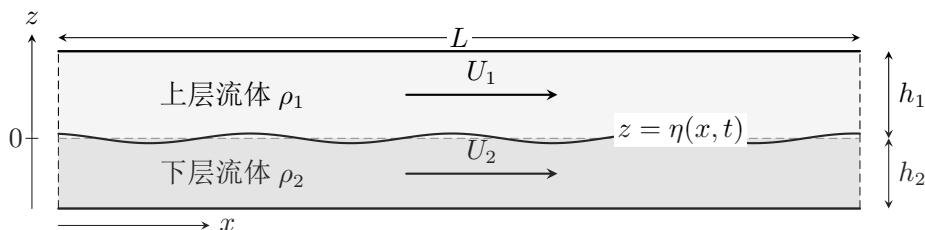


图 1.1: 沿圆周展开后的环形长槽纵剖面示意图

流体均无黏、不可压缩，扰动流动无旋，故可对第 i 层流体引入扰动速度势 ϕ_i ，使扰动速度为 $\nabla\phi_i$ ；其 x, z 分量分别为 $\partial\phi_i/\partial x$ 、 $\partial\phi_i/\partial z$ ， $i = 1, 2$ 分别表示上、下层流体。 $|\partial\eta/\partial x| \ll 1$ 。考察一列沿槽周向传播、波数为 k 的简谐扰动：

$$\eta(x, t) = \text{Re}\{ae^{i(kx - \omega t)}\}, \quad \phi_i(x, z, t) = \text{Re}\{\Phi_i(z)e^{i(kx - \omega t)}\}$$

其中 a 为常数， ω 可以为复数。若 $\text{Im}\omega > 0$ ，界面扰动的振幅将随时间指数增长，称该扰动不稳定。

无黏流体的运动方程为

$$\rho_i \left[\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{v}_i \right] = -\nabla p_i - \rho_i g \vec{e}_z,$$

记第 i 层内任意点 (x, z) 处的实际压强为 $p_i(x, z, t)$ ，同一位置处未扰动时的压强为 $p_i^{(0)}(z)$ ，定义 $\Delta p_i = p_i - p_i^{(0)}$ （如果未受扰动的时候 z 处没有 i 液体，那么 $p_i^{(0)}(z)$ 可以理解为整缸均为液体 i 时 z 处的压强）。对于所考察的单一简谐模态，压强改变量与界面扰动具有相同的 x, t 依赖，记

$$\Delta p_i(x, z, t) = \text{Re}\{Q_i(z)e^{i(kx - \omega t)}\}.$$

本题中只保留各扰动量的一阶项。

双曲函数的定义为

$$\begin{aligned} \sinh u &= \frac{e^u - e^{-u}}{2}, & \cosh u &= \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \\ \tanh u &= \frac{\sinh u}{\cosh u}, & \coth u &= \frac{\cosh u}{\sinh u}. \end{aligned}$$

(1) 若 a, k, ω 已知，求两层流体的扰动速度势 $\Phi_1(z)$ 、 $\Phi_2(z)$ （答案中不要用指数，用双曲函数表示）。

(2) 记 $A = \rho_1 \coth(kh_1)$ ， $B = \rho_2 \coth(kh_2)$ ， $V = U_1 - U_2$ 。求给定波数 k 时 ω 的两个可能值，并求界面扰动不稳定的条件。

(3) 若 $h_1, h_2 \rightarrow \infty$, 并且认为波数可连续取任意正值。为使得界面扰动稳定, 求相对速度所需满足的条件。

(4) 现考虑一油-水环形槽, 取

$$\begin{aligned}\rho_1 &= 800 \text{ kg/m}^3, & \rho_2 &= 1000 \text{ kg/m}^3, \\ \sigma &= 3.00 \times 10^{-2} \text{ N/m}, & g &= 9.80 \text{ m/s}^2, \\ h_1 &= h_2 = h = 5.00 \text{ mm}, & L &= 0.100 \text{ m}.\end{aligned}$$

由于周向周期性, 允许的正波数为 $k_n = 2\pi n/L$, $n = 1, 2, \dots$ 。当 $|V| = 0.160 \text{ m/s}$ 时, 判断哪些 n 对应的界面扰动不稳定, 并求相应的增长率 $\gamma_n = \text{Im} \omega_n$ 。数值结果取三位有效数字。

解:

(1) 不可压缩条件给出 $\nabla^2 \phi_i = 0$ 。代入得

$$\Phi_i'' - k^2 \Phi_i = 0. \quad (1)$$

刚性顶壁的边界条件为

$$\Phi_1'(h_1) = 0. \quad (2)$$

刚性底壁的边界条件为

$$\Phi_2'(-h_2) = 0. \quad (3)$$

界面上的流体质点始终满足 $z = \eta(x, t)$ 。设该质点的坐标为 $x(t)$ 、 $z(t)$, 对上式两边关于时间求导, 得

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{dx}{dt}. \quad (4)$$

由于 $\partial \eta / \partial x \ll 1$, 故 dx/dt 取 U_i , 得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta = \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right|_{z=0}. \quad (5)$$

代入得到

$$\Phi_i'(0) = -i(\omega - kU_i)a. \quad (6)$$

综上可得

$$\Phi_1(z) = \frac{ia(\omega - kU_1)}{k \sinh(kh_1)} \cosh[k(z - h_1)]. \quad (7)$$

$$\Phi_2(z) = -\frac{ia(\omega - kU_2)}{k \sinh(kh_2)} \cosh[k(z + h_2)]. \quad (8)$$

(2) 流体运动方程线性化后的 x 分量为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\Delta p_i + \rho_i \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) \right] = 0. \quad (9)$$

故

$$\Delta p_i + \rho_i \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) = F_i(z, t). \quad (10)$$

题设扰动的波数 $k \neq 0$, 等式左端的相应模态含因子 $e^{i(kx - \omega t)}$, 而 $F_i(z, t)$ 不含该因子。因此, 对所考察的模态有 $F_i(z, t) = 0$, 从而

$$\Delta p_i = -\rho_i \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right). \quad (11)$$

代入题给条件, 得

$$Q_i(z) = i\rho_i(\omega - kU_i)\Phi_i(z). \quad (12)$$

记 $P_i = Q_i(0)$ 。利用式 (7)、(8)、(12), 得到

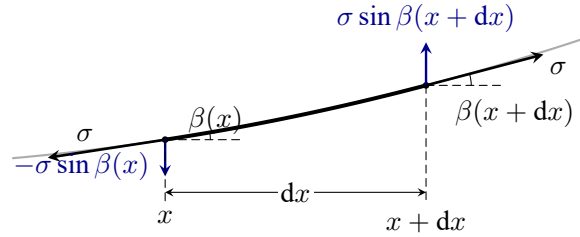
$$P_1 = -\frac{\rho_1 a}{k} \coth(kh_1)(\omega - kU_1)^2. \quad (13)$$

同理

$$P_2 = \frac{\rho_2 a}{k} \coth(kh_2)(\omega - kU_2)^2. \quad (14)$$

$$P_2 - P_1 = \frac{a}{k} [\rho_1 \coth(kh_1)(\omega - kU_1)^2 + \rho_2 \coth(kh_2)(\omega - kU_2)^2]. \quad (15)$$

取横向长度为 dx 、单位槽宽的界面微元，其左、右端横坐标分别为 x 和 $x + dx$ 。设界面切线与 x 轴正向的夹角为 $\beta(x)$ 。界面左侧部分对微元的张力沿切线指向左方，其竖直分量为 $-\sigma \sin \beta(x)$ ；界面右侧部分对微元的张力沿切线指向右方，其竖直分量为 $\sigma \sin \beta(x + dx)$ ，如图 1.1 所示。



答图 1.1: 界面微元两端的界面张力及其竖直分量

所以两端界面张力的竖直合力为

$$F_{\sigma,z} = \sigma [\sin \beta(x + dx) - \sin \beta(x)]. \quad (16)$$

将方括号内的量对 dx 作一阶展开。由于 $\partial\eta/\partial x \ll 1$ ，故有 $\sin \beta \simeq \partial\eta/\partial x$ ，故

$$F_{\sigma,z} = \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} dx. \quad (17)$$

未扰动时界面两侧压强相等。扰动后界面两侧的压强差

$$p_2(x, \eta, t) - p_1(x, \eta, t) = \Delta p_2(x, 0, t) - \Delta p_1(x, 0, t) - (\rho_2 - \rho_1)g\eta. \quad (18)$$

界面上下表面的力相同，故

$$[p_2(x, \eta, t) - p_1(x, \eta, t)] dx + F_{\sigma,z} = 0. \quad (19)$$

将式 (17)、式 (18) 代入式 (19)，得到

$$P_2 - P_1 - (\rho_2 - \rho_1)ga = \sigma k^2 a. \quad (20)$$

将式 (13)、(14) 代入式 (20)，得到 ω 与 k 的函数关系

$$\rho_1 \coth(kh_1)(\omega - kU_1)^2 + \rho_2 \coth(kh_2)(\omega - kU_2)^2 = (\rho_2 - \rho_1)gk + \sigma k^3, \quad (21)$$

采用题设记号 A 、 B 、 V ，解得

$$\omega = \frac{k(AU_1 + BU_2)}{A + B} \pm \frac{\sqrt{(A + B)[(\rho_2 - \rho_1)gk + \sigma k^3] - ABk^2 V^2}}{A + B}. \quad (22)$$

当根号中的量为负时，一个根的虚部为正，故失稳条件为

$$V^2 > \frac{(A + B)[(\rho_2 - \rho_1)gk + \sigma k^3]}{ABk^2}. \quad (23)$$

(3) 在深水极限中， $A \simeq \rho_1$ ， $B \simeq \rho_2$ 。由式 (23)，波数为 k 的界面扰动不发生指数增长的条件为 $|V| \leq V_c(k)$ ，其中

$$V_c^2 \simeq \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \left[\frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{k} + \sigma k \right]. \quad (24)$$

由于 $k > 0$ ，由基本不等式可得

$$\frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{k} + \sigma k \geq 2\sqrt{(\rho_2 - \rho_1)g\sigma}. \quad (25)$$

等号在 $(\rho_2 - \rho_1)g/k = \sigma k$ 时成立。因此， $V_c(k)$ 取最小值时的波数为

$$k_0 = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{\sigma}}. \quad (26)$$

因此，使任意波数的界面扰动均不发生指数增长的条件为

$$|V| \leq \left[\frac{2(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2} \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)g\sigma} \right]^{1/2}. \quad (27)$$

(4) 由式 (22) 得

$$\gamma_n^2 = \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} V^2 k_n^2 - \frac{[(\rho_2 - \rho_1)g k_n + \sigma k_n^3] \tanh(k_n h)}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (28)$$

由式 (23) 逐个计算各离散模态的临界速度。前三个模态分别给出

$$V_{c,1} = 0.150 \text{ m/s}. \quad (29)$$

$$V_{c,2} = 0.156 \text{ m/s}. \quad (30)$$

$$V_{c,3} = 0.163 \text{ m/s}. \quad (31)$$

题设相对速度满足 $|V| = 0.160 \text{ m/s} < V_{c,3}$ ，故 $n = 3$ 对应的模态稳定。对于 $n \geq 4$ ，有 $k_n \geq k_4$ ，故

$$V_{c,n}^2 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \tanh(k_n h) \left[\frac{(\rho_2 - \rho_1)g}{k_n} + \sigma k_n \right] \geq \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \tanh(k_4 h) \left[2\sqrt{(\rho_2 - \rho_1)g\sigma} \right]. \quad (32)$$

代入数据得

$$V_{c,n} \geq 0.171 \text{ m/s} > |V|. \quad (33)$$

因此不稳定的界面扰动对应

$$n = 1, 2. \quad (34)$$

由式 (28)，得到

$$\gamma_1 = 1.70 \text{ s}^{-1}. \quad (35)$$

$$\gamma_2 = 2.28 \text{ s}^{-1}. \quad (36)$$

评分标准：本题满分 45 分。

第 (1) 问 10 分：(1) (2) (3) (6) 式各 1 分，(5) (7) (8) 式各 2 分；

第 (2) 问 18 分：(12) (13) (14) 式各 1 分，(17) (18) (20) (21) (22) (23) 式各 2 分，(11) 式 3 分；

第 (3) 问 5 分：(24) (25) (26) 式各 1 分，(27) 式 2 分；

第 (4) 问 12 分：(35) (36) 式各 1 分，(28) (34) 式各 2 分，正确证明不稳定模态仅为 $n = 1, 2$ ，给 6 分。

二、(50 分)

考虑一个无限高的柱形绝热容器，其底面积为 A ，放在水平桌面上。容器内有一个质量为 M 的隔板，可以上下自由移动。隔板下方有 N 个单原子气体分子，每个分子的质量为 m 。假设隔板不漏气，不考虑隔板的热容，并且容器的外界环境为真空。初态，系统达到温度为 T_0 的平衡态。已知重力加速度 g ，玻尔兹曼常数 k 。

(1) 求初态缸内气体总机械能 E_0 。重力势能以地面为零点。

(2) 隔板收到微扰后, 在容器中上下作微振动, 求其振动频率。忽略气体宏观运动的动能, 并认为气体处于准静态, 隔板与容器壁无摩擦。

(3) 假设隔板与容器壁之间有微小的摩擦, 并且摩擦损耗的能量全部转化为热并被缸内气体分子吸收, 准静态近似仍然成立。\$t = 0\$ 时刻, 隔板质量突然变为 \$\alpha M\$, 求再次达到平衡时容器内气体温度 \$T_1\$ 以及隔板高度 \$H_1\$。

(4) 容器底部开了一个面积为 \$S\$ 的小孔 (\$S \ll A\$), 气体会缓慢地溢出。试求从初态到缸内气体全部溢出所需的时间 \$t_0\$。假设每一时刻系统都近似处于平衡, 气体溢出后不再对气缸产生影响。对于最终结果, 请先写出一般情况下的积分式, 再代入 \$M = 1.5Nm\$, 系数保留 4 位有效数字。

解:

(1) 以竖直向上为 \$z\$ 轴正方向, 地面为零点。根据玻尔兹曼分布有粒子数密度分布:

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT_0}} \quad (1)$$

设隔板高度为 \$H_0\$, 由总粒子数关系得:

$$N = \int_0^{H_0} n(z) A dz = n_0 A \int_0^{H_0} e^{-\frac{mgz}{kT_0}} dz = \frac{n_0 A k T_0}{mg} (1 - e^{-mgH_0/kT_0}) \quad (2)$$

$$n(z) = \frac{Nmg}{AkT_0} \frac{e^{-mgz/kT_0}}{1 - e^{-mgH_0/kT_0}} \quad (3)$$

压强分布:

$$p(z) = n(z)kT_0 = \frac{Nmg}{A} \frac{e^{-mgz/kT_0}}{1 - e^{-mgH_0/kT_0}} \quad (4)$$

隔板受力平衡:

$$Mg = p(H_0)A = Nmg \frac{1}{e^{mgH_0/kT_0} - 1} \quad (5)$$

解得:

$$H_0 = \frac{kT_0}{mg} \ln \left(\frac{Nm}{M} + 1 \right) \quad (6)$$

总机械能:

$$E_0 = \frac{3}{2} NkT_0 + \int_0^{H_0} mgz \cdot n(z) A dz = \left(\frac{5}{2} - \frac{M}{Nm} \ln \left(\frac{Nm}{M} + 1 \right) \right) NkT_0 \quad (7)$$

(2) 记 \$x = \frac{mgH}{kT}\$, 设 \$H = H_0 + \delta H\$, \$T = T_0 + \delta T\$, \$x = x_0 + \delta x\$, 对气体有热力学第一定律:

$$dE = -p(H)AdH \quad (8)$$

$$E = \left(\frac{5}{2} - \frac{x}{e^x - 1} \right) NkT \quad (9)$$

$$p(H) = \frac{Nmg}{A} \frac{1}{e^x - 1} \quad (10)$$

将(9)和(10)全部代入(8)得:

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{x}{e^x - 1} \right) Nk dT - \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} \right) NkT dx + \frac{Nmg dH}{e^x - 1} = 0 \quad (11)$$

利用

$$\frac{dx}{x} = \frac{dH}{H} - \frac{dT}{T} \quad (12)$$

代入整理得:

$$\frac{5}{2} \frac{dT}{T} + \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} dx = 0 \quad (13)$$

在微振动近似下:

$$\frac{\delta x}{\delta T} = \frac{dx}{dT} = -\frac{5(e^{x_0} - 1)^2}{2T_0 x_0 e^{x_0}} \quad (14)$$

由(12)??得:

$$\delta x = \frac{5(e^{x_0} - 1)^2}{5(e^{x_0} - 1)^2 - 2x_0^2 e^{x_0}} \frac{x_0}{H_0} \delta H \quad (15)$$

对隔板有:

$$M \frac{d^2 \delta H}{dt^2} = p(H)A - Mg = \frac{Nmg}{e^x - 1} - Mg = -\frac{Nmg e^{x_0}}{(e^{x_0} - 1)^2} \delta x \quad (16)$$

整理得:

$$M \frac{d^2 \delta H}{dt^2} = -\frac{Nm^2 g^2}{kT_0} \frac{5(1 + \frac{Nm}{M})}{5(\frac{Nm}{M})^2 - 2(1 + \frac{Nm}{M}) \ln^2(1 + \frac{Nm}{M})} \delta H \quad (17)$$

小振动频率:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Nm^2 g^2}{MkT_0} \frac{5(1 + \frac{Nm}{M})}{5(\frac{Nm}{M})^2 - 2(1 + \frac{Nm}{M}) \ln^2(1 + \frac{Nm}{M})}} \quad (18)$$

(3) 末态用下标 “1” 来标注, 有总能量守恒:

$$\alpha MgH_1 + E_1 = \alpha MgH_0 + E_0 \quad (19)$$

由第一问可类比得:

$$E_1 = \left(\frac{5}{2} - \frac{\alpha M}{Nm} \ln \left(\frac{Nm}{\alpha M} + 1 \right) \right) NkT_1, \quad H_1 = \frac{kT_1}{mg} \ln \left(\frac{Nm}{\alpha M} + 1 \right) \quad (20)$$

最终得出:

$$T_1 = T_0 \left(1 + \frac{2(\alpha - 1)M}{5Nm} \ln \left(\frac{Nm}{M} + 1 \right) \right) \quad (21)$$

$$H_1 = \frac{kT_0}{mg} \left(1 + \frac{2(\alpha - 1)M}{5Nm} \ln \left(\frac{Nm}{M} + 1 \right) \right) \ln \left(\frac{Nm}{\alpha M} + 1 \right) \quad (22)$$

(4) 设时刻 t , 缸内剩余 $N_l(t)$ 个分子。根据麦克斯韦速度分布, 有:

$$\frac{dN_l}{dt} = - \int_0^{+\infty} n(0) v_z S \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z = -n(0) S \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \quad (23)$$

其中:

$$n(0) = \frac{N_l m g e^x}{AkT(e^x - 1)} \quad (24)$$

系统总能量变化:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= - \int_{v_z > 0} \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) n(0) v_z S \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z \\ &= -n(0) S kT \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \end{aligned} \quad (25)$$

系统每一时刻的状态都近似为平衡态, 故能量可由第一问的结果改写而来:

$$E = MgH + \left(\frac{5}{2} - \frac{x}{e^x - 1} \right) N_l kT \quad (26)$$

平衡条件:

$$Mg = n(H) kT A = \frac{N_l m g}{e^x - 1} \quad (27)$$

再结合 x 的定义化简得:

$$E = \frac{5}{2} N_l kT \quad (28)$$

由(23)(25)得:

$$dE = 2kT dN_l \quad (29)$$

联立(28)(29)得:

$$\frac{dN_l}{N_l} + 5\frac{dT}{T} = 0 \quad (30)$$

积分得:

$$T = T_0 \left(\frac{N_0}{N_l} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (31)$$

再代入(23)消去 T 得:

$$\frac{dN_l}{dt} = -\frac{MgS}{A\sqrt{2\pi mkT_0}} \left(\frac{N_l}{N} \right)^{\frac{1}{10}} \left(\frac{N_l m}{M} + 1 \right) \quad (32)$$

记 $u = \frac{N_l}{N}$, 得:

$$t_0 = -\frac{NA\sqrt{2\pi mkT_0}}{MgS} \int_1^0 \frac{du}{u^{\frac{1}{10}}(1 + \frac{Nm}{M}u)} = 0.8636 \frac{NA\sqrt{2\pi mkT_0}}{MgS} = 1.443 \frac{A}{gS} \sqrt{\frac{kT_0}{m}} \quad (33)$$

评分标准: 本题满分 50 分。

第 (1) 问 12 分: (3) (4) 式各 1 分, (1) (2) (5) (6) (7) 式各 2 分;

第 (2) 问 14 分: (9) (10) (16) (17) 式各 1 分, (8) (11) (13) (15) (18) 式各 2 分;

第 (3) 问 8 分: (19) (20) (21) (22) 式各 2 分;

第 (4) 问 16 分: (30) (31) 式各 1 分, (23) (25) (28) (29) (32) 式各 2 分, (33) 式 4 分。

三、(45 分) 旋转的磁化导体球

在脉冲功率技术领域, 旋转磁化导体常被用作脉冲成型前的驱动源。该装置通过快速释放动能, 可产生功率为数吉瓦甚至更高的脉冲, 是进行惯性约束聚变实验的关键组成部分。

考虑一个半径为 R 、磁化强度为 $\vec{M} = M\hat{z}$ 的均匀磁化电中性导体球。该球体绕过球心的轴旋转, 角速度为 $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$, 运动满足非相对论条件 ($\omega R \ll c$)。此时系统已达到稳定状态, 导体球内部无宏观电流。

运动导体的欧姆定律在实验室系下写为:

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

(1) 以球心为原点、 z 轴为极轴建立球坐标系, 求解该均匀磁化球在全空间产生的磁场 $\vec{B}(r, \theta)$;

(2) 根据导体内部无自由电流 $\vec{J} = 0$, 求解该球体内的电场分布 $\vec{E}^{\text{in}}$ 以及体电荷密度 ρ_e ;

(3) 经过计算, 可以认为球外的电势分布为:

$$\varphi^{\text{out}} = \varphi_0^{\text{out}} \left(\frac{R}{r} \right)^3 (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (2)$$

请确定 φ_0^{out} 的表达式, 并计算面电荷密度 σ_e ;

(4) 现在将电阻与该旋转球体相连, 连接点为北极点 ($\theta = 0$) 与赤道点 ($\theta = \frac{\pi}{2}$), 从而形成闭合回路。已知外接负载电阻为 R_L , 球体内部等效电阻为 R_i 。求解此时负载功率 P_L , 并调整 R_L 给出负载功率最大值;

(5) 取经典参数: $R = 1 \text{ m}$, $M = 10^6 \text{ A/m}$, $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$, $R_i = 10^{-3} \Omega$ 。计算在最大负载功率下的 P_L , 并验证其与背景中描述相符。

解:

(1)

(解法一) 该体系无自由电流, 故可采用磁标势 φ_H , 满足:

$$\vec{H} = -\nabla \varphi_H, \quad \nabla^2 \varphi_H = 0 \quad (1)$$

类比均匀极化电介质球的电势 φ_E ，在球坐标系下，磁标势的通解为：
在球内区域 ($r < R$):

$$\varphi_H^{\text{in}} = Ar \cos \theta \quad (2)$$

在球外区域 ($r > R$):

$$\varphi_H^{\text{out}} = \frac{B}{r^2} \cos \theta \quad (3)$$

有边界条件有：

$$H_\theta^{\text{in}}|_{r=R} = H_\theta^{\text{out}}|_{r=R}, \quad H_r^{\text{out}}|_{r=R} = H_r^{\text{in}}|_{r=R} + M_r \quad (4)$$

即，

$$-A \cos \theta + M \cos \theta = \frac{2B \cos \theta}{R^3}, \quad A \sin \theta = \frac{B \sin \theta}{R^3} \quad (5)$$

解得，

$$A = \frac{1}{3}M, \quad B = \frac{1}{3}MR^3 \quad (6)$$

因此，

$$\varphi_H^{\text{in}} = \frac{1}{3}Mr \cos \theta, \quad \varphi_H^{\text{out}} = \frac{1}{3} \frac{MR^3}{r^2} \cos \theta \quad (7)$$

结合 $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ 可得全空间磁场分布，

$$\vec{B}^{\text{in}} = \frac{2}{3}\mu_0 M \hat{z}, \quad \vec{B}^{\text{out}} = \frac{\mu_0 MR^3}{3r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (8)$$

(解法二) 可以发现束缚电流为：

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = 0, \quad \vec{\alpha}_m = \vec{M} \times \hat{n} = M \sin \theta \hat{\phi} \quad (1^*)$$

该电流分布会使球内产生匀强磁场，球外产生磁偶极子场，即，

$$\vec{B}^{\text{in}} = A \hat{z}, \quad \vec{B}^{\text{out}} = \frac{B}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (2^*)$$

再由边界条件：

$$B_r^{\text{in}}|_{r=R} = B_r^{\text{out}}|_{r=R}, \quad B_\theta^{\text{out}}|_{r=R} = B_\theta^{\text{in}}|_{r=R} + \mu_0 \alpha_m \quad (3^*)$$

解得，

$$A = \frac{2}{3}\mu_0 M, \quad B = \frac{\mu_0 MR^3}{3} \quad (4^*)$$

即得全空间磁场分布，

$$\vec{B}^{\text{in}} = \frac{2}{3}\mu_0 M \hat{z}, \quad \vec{B}^{\text{out}} = \frac{\mu_0 MR^3}{3r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (5^*)$$

(2) 当采用柱坐标时，有 $\vec{\rho} = r \sin \theta \hat{\rho}$ 。

由球体内部 $\vec{J} = 0$ 得：

$$\vec{E}^{\text{in}} = -\vec{v} \times \vec{B}^{\text{in}} = -\omega r \sin \theta \hat{\phi} \times \frac{2}{3}\mu_0 M \hat{z} = -\frac{2}{3}\mu_0 M \omega \vec{\rho} \quad (9)$$

再由高斯定律，即

$$\nabla \cdot \vec{E}^{\text{in}} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad (10)$$

可得体电荷密度分布为：

$$\rho_e = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}^{\text{in}} = -\frac{4}{3}\mu_0 M \omega \varepsilon_0 \quad (11)$$

(3) 边界处电势连续，即，

$$\varphi^{\text{in}}|_{r=R} = \varphi^{\text{out}}|_{r=R} \quad (12)$$

通过球内的电场分布，可以求得球内电势分布为：

$$\varphi^{\text{in}} = - \int \vec{E}^{\text{in}} \cdot d\vec{l} = - \int -\frac{2}{3}\mu_0 M\omega\rho d\rho = \frac{1}{3}\mu_0 M\omega\rho^2 + \varphi_0^{\text{in}} = \frac{1}{3}\mu_0 M\omega r^2 \sin^2\theta + \varphi_0^{\text{in}} \quad (13)$$

与题目中所给的球外电势分布相对比，可以发现：

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(3\cos^2\theta - 1) \quad (14)$$

对比系数可以得到，

$$\varphi_0^{\text{out}} = -\frac{1}{9}\mu_0 M\omega R^2 \quad (15)$$

可得球外电势为：

$$\varphi^{\text{out}} = -\frac{1}{9}\mu_0 M\omega R^5 \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} \quad (16)$$

而电场为：

$$\vec{E}^{\text{out}} = -\nabla\varphi^{\text{out}} = -\frac{1}{3}\mu_0 M\omega R^5 \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^4} \right) \hat{r} - \frac{2}{3}\mu_0 M\omega R^5 \frac{\cos\theta \sin\theta}{r^4} \hat{\theta} \quad (17)$$

故可得面电荷密度为：

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \varepsilon_0 (E_r^{\text{out}} - E_r^{\text{in}}) \\ &= \left(-\frac{1}{3}\mu_0 M\omega\varepsilon_0 R (3\cos^2\theta - 1) \right) - \left(-\frac{2}{3}\mu_0 M\omega\varepsilon_0 R \sin^2\theta \right) \\ &= \frac{\mu_0 M\omega\varepsilon_0 R}{3} (3 - 5\cos^2\theta) \end{aligned} \quad (18)$$

(4) 北极点与赤道点的电势差为：

$$\Delta\varphi = \varphi^{\text{out}}|_{\theta=\frac{\pi}{2}, r=R} - \varphi^{\text{out}}|_{\theta=0, r=R} = \frac{1}{9}\mu_0 M\omega R^2 - \left(-\frac{2}{9}\mu_0 M\omega R^2 \right) = \frac{1}{3}\mu_0 M\omega R^2 \quad (19)$$

由此可得负载功率为：

$$P_L = \frac{\Delta\varphi^2}{(R_L + R_i)^2} R_L = \frac{\mu_0^2 M^2 \omega^2 R^4 R_L}{9(R_L + R_i)^2} \quad (20)$$

容易得到，当 $R_L = R_i$ 时，负载功率最大，此时负载功率为：

$$P_L^{\text{max}} = \frac{\mu_0^2 M^2 \omega^2 R^4}{36R_i} \quad (21)$$

(5) 带入题目中的数值可以得到，

$$P_L^{\text{max}} = \frac{\mu_0^2 M^2 \omega^2 R^4}{36R_i} = 4.4 \times 10^9 \text{ W} \quad (22)$$

故符合描述。

评分标准：本题满分 45 分。

第 (1) 问 15 分：(1) (4) (5) 式各 1 分，(2) (3) (6) (7) 式各 2 分，(8) 式 4 分；

解法二：(1*) (3*) (5*) 式各 2 分，(2*) 式 3 分，(4*) 式 6 分；

第 (2) 问 5 分：(10) 式 1 分，(9) (11) 式各 2 分；

第 (3) 问 15 分：(12) (16) 式各 1 分，(13) (14) 式各 2 分，(15) (17) (18) 式各 3 分；

第 (4) 问 5 分：(20) 式 1 分，(19) (21) 式各 2 分；

第 (5) 问 5 分：(22) 式 5 分。

四、(45 分) 托马斯进动与自旋轨道耦合

托马斯进动。当两个洛伦兹变换复合之后,结果通常与沿速度方向进行的对应洛伦兹变换不同,而是会附加一个转动,该转动成为韦格纳转动,其本质为四维旋转操作的顺序不可交换性导致的。韦格纳转动的一个特例是托马斯进动,它发生在参考系做加速运动的时候。作为简化模型,本题仅考虑在 xOy 平面内的运动的二维情况

(1.1) 设二维坐标系 s, s', s'' 系在 $t = t' = t'' = 0$ 时坐标原点 O, O', O'' 重合。从 s 系中观测到, s 系的 x, y 轴分别与 s' 系的 x', y' 轴平行, 从 s' 系中观测到, s' 系的 x', y' 轴分别与 s'' 系的 x'', y'' 轴平行。 s' 系相对于 s 系沿 x 轴运动, 速度为 $\beta_x c$, s'' 系相对于 s' 系沿 y' 轴运动, 速度为 $\beta_y c$ 。试求出 s 到 s'' 系的时空变换关系, 即 (x, y, t) 与 (x'', y'', t'') 之间的关系(可用矩阵表示)。并求出在 s 系中观察, x'' 轴和 y'' 轴与 x 轴之间的夹角, 答案可用 $\beta_x, \beta_y, \gamma_x = \sqrt{\frac{1}{1-\beta_x^2}}, \gamma_y = \sqrt{\frac{1}{1-\beta_y^2}}$ 表示。

(1.2) 在 s 系中看来, s'' 系坐标原点 O'' 的速度可表示为 $\vec{\beta}c = (\beta'_x c, \beta'_y c)$, 试求 β'_x 与 β'_y , 结果可用 β_x 与 β_y 表示。在前两问中我们已经讨论了两个洛伦兹变换符合之后的情况, 下面我们将继续讨论直接沿速度方向进行一步洛伦兹变换后的结果。

(1.3) 假设在某个参照系 s''' 相对于 s 系以速度 $\vec{\beta}'c$ 做匀速直线运动, $t = t''' = 0$ 时, s''' 与 s 系坐标原点 O''' 与 O 重合, 从 s 系中观测到, s 系的 x, y 轴分别与 s''' 系的 x''', y''' 轴平行。试求出 s 到 s''' 系的时空变换关系, 即 (x, y, t) 与 (x''', y''', t''') 之间的关系(可用矩阵表示), 答案可用 $\beta'_x, \beta'_y, \beta' = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}, \gamma' = \sqrt{\frac{1}{1-\beta'^2}}$ 表示。

(1.4) 计算结果发现, (1.1) 中得到的 (x, y, t) 与 (x'', y'', t'') 之间的关系与 (1.3) 中得到的 (x, y, t) 与 (x''', y''', t''') 之间的关系不相同, 当 β_x, β_y 远远小于 1 时, s 系到 s'' 系发生的变换可以认为是 s 系到 s''' 系的变换和 s''' 系的坐标轴绕其原点 O''' 的旋转变换组成的复合变换。试求出坐标轴旋转的角度, 答案用 β_x, β_y 表示。

基于前面部分地推导, 我们可以引入考察一个小的圆周运动过程, 进而得出韦格纳转动的特例, 托马斯进动的近似角速度。

(2) 假设有一个粒子, 相对于某个惯性系 s 做匀速圆周运动, 速度大小为 v (远小于光速 c), 向心加速度大小为 a 。设在某个时刻 t , 粒子的瞬时参考系(此时恰好与粒子相对静止的参考系)为 s' , 其坐标轴 $O'x'$ 沿此刻粒子相对于 s 系的速度方向, 经过 τ 时间后(经过时间很小可认为几乎无变化), 粒子的瞬时参考系变为 s'' 。从 s' 系中观测到, s', s'' 系坐标轴方向一致。 s'' 系相对于 s' 系沿 y' 轴运动, 速度为 $a dt$ 。 s 系到 s'' 系发生的变换可以认为是 s 系到 s''' 系的变换和 s''' 系的坐标轴绕其原点 O''' 的旋转变换组成的复合变换。试求 dt 时间内坐标架转动的角度以及坐标架旋转角速度。

利用以上内容我们可以计算氢原子的自旋-轨道磁场耦合的相互作用能。已知电子电量为 e , 质量为 m_e , 真空介电常数为 ϵ_0 , 电子轨道半径为 r , 可认为电子运动速度远小于光速。

(3.1) 具备磁矩的系统在磁场中会发生拉莫尔进动, 即角动量矢量围绕磁场矢量匀速旋转, 考虑一个磁矩为 $\vec{\mu}$, 自旋角动量为 $\vec{s}$ 的粒子, 固定在匀强磁场 $\vec{B}$ 之中, 已知 $\vec{\mu}$ 与 $\vec{s}$ 具有简单的正比例关系(即 $\vec{\mu} = -\gamma \vec{s}$, 其中 $\gamma = \frac{e}{m_e}$ 被称为磁旋比, 试求出粒子进行拉莫尔进动的角速度 $\vec{\omega}$ 。

为解决粒子自旋-轨道磁场耦合的问题, 我们需要引入一些关于原子物理角动量的部分知识: 在量子力学中, 量子数是描述原子核外电子运动状态的一组数字, 一共 4 个, 四个数字完全确定一个电子的位置、能量、轨道形状、自旋方向。若某一个粒子的自旋角动量的自旋量子数为 s , 那么它自旋角动量大小为 $J_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}$, 其角动量沿 z 轴方向(即某一固定方向)的投影方向量子数(即磁量子数) m_s (取值为大小 $-s, -s+1, \dots, s-1, s$), 与自旋角动量类似, 轨道角动量大小为 $L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ 和总角动量大小 $L_j = \hbar\sqrt{j(j+1)}$, z 轴方向的角动量为 $L_z = m_z \hbar$, 轨道角动量与磁矩的关系与经典情形下一致。且对于自旋角动量, 轨道角动量与总角动量之间存在关系 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{s}$, 相应的 $j = s + l$, 对于电子, $s = \pm \frac{1}{2}$ 。

(3.2) 弄明白电子磁矩的表示之后, 我们可以进一步研究原子核相对电子的运动对电子能量的微小影响, 即自旋角动量耦合, 即在电子系中原子核运动产生的磁场与电子的自旋磁矩相互作用的能量。记电子自旋角动量为 $\vec{s}$, 轨道角动量为 $\vec{L}$ 。就 $j = l + \frac{1}{2}$ 和 $j = l - \frac{1}{2}$ 两种情形求出能量修正及二者的能量差 ΔE , 已知对于轨道角动量为 l , 核电荷数为 Z 的粒子, 其

$$\langle r^{-3} \rangle_{n,l} = \frac{Z^3}{a_0^3 n^3 l(l+1)(l + \frac{1}{2})}$$

其中 a_0 为波尔半径, 最终结果用 l, n, Z, a_0 及相关物理学常量表示。

解:

(1) (1.1) 对两个坐标系 s , s' 以及 s', s'' 系使用洛伦兹变换, 可得

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x & 0 & -\gamma_x \beta_x \\ 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_x \beta_x & 0 & \gamma_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ ct \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ ct'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_y & -\gamma_y \beta_y \\ 0 & -\gamma_y \beta_y & \gamma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ ct' \end{pmatrix} \quad (2)$$

即得到 s'' 系与 s 系的变换关系

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ ct'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_y & -\gamma_y \beta_y \\ 0 & -\gamma_y \beta_y & \gamma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_x & 0 & -\gamma_x \beta_x \\ 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_x \beta_x & 0 & \gamma_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ ct \end{pmatrix} \quad (3)$$

化简后可得最终变换式

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ ct'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_x & 0 & -\gamma_x \beta_x \\ \gamma_x \gamma_y \beta_x \beta_y & \gamma_y & -\gamma_x \gamma_y \beta_y \\ -\gamma_x \gamma_y \beta_x & -\gamma_y \beta_y & \gamma_x \gamma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ ct \end{pmatrix} \quad (4)$$

下面开始计算夹角, 对于 y'' 轴 (即 $x'' = 0$), 有

$$\gamma_x x - \gamma_x \beta_x ct = 0 \quad (5)$$

即得

$$x = \beta_x ct \quad (6)$$

$O''y''$ 轴与 x 轴夹角

$$\theta_y = \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

同理对于 x'' 轴 (即 $y'' = 0$), 有

$$\gamma_x \gamma_y \beta_x \beta_y x + \gamma_y y - \gamma_x \gamma_y \beta_y ct = 0 \quad (8)$$

即得

$$y = \gamma_x \beta_y (ct - \beta_x x) \quad (9)$$

$O''x''$ 轴与 y 轴夹角

$$\theta_x = \arctan(\gamma_x \beta_x \beta_y) \quad (10)$$

(1.2) 对于 s' 系, 有

$$u'_x = 0 \quad (11)$$

$$u'_y = \beta_y c \quad (12)$$

进行速度的洛伦兹变换得

$$u_x = \beta_x c \quad (13)$$

$$u_y = \beta_y c \sqrt{1 - \beta_x^2} \quad (14)$$

即得

$$\beta'_x = \beta_x \quad (15)$$

$$\beta'_y = \beta_y \sqrt{1 - \beta_x^2} \quad (16)$$

(1.3) 与速度方向平行的位矢

$$\vec{r}_{\parallel} = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad (17)$$

同理与速度方向垂直的位矢

$$\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} \quad (18)$$

设

$$\vec{r} = (x, y) \quad (19)$$

$$\vec{v} = (\beta'_x c, \beta'_y c) \quad (20)$$

代入化简得

$$\vec{r}_{\parallel} = \left(\frac{x\beta'_x + y\beta'_y}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} \beta'_x, \frac{x\beta'_x + y\beta'_y}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} \beta'_y \right) \quad (21)$$

$$\vec{r}_{\perp} = \left(x - \frac{x\beta'_x + y\beta'_y}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} \beta'_x, y - \frac{x\beta'_x + y\beta'_y}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} \beta'_y \right) \quad (22)$$

在运动方向进行一次洛伦兹变换, 可得 $\vec{r}'$

$$x''' = x + (\gamma - 1) \frac{(x\beta'_x + y\beta'_y)\beta'_x}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} - \gamma c \beta'_x t \quad (23)$$

$$y''' = y + (\gamma - 1) \frac{(x\beta'_x + y\beta'_y)\beta'_y}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} - \gamma c \beta'_y t \quad (24)$$

$$t''' = \gamma \left(t - \frac{\beta'_x x + \beta'_y y}{c} \right) \quad (25)$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - [(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2]}} \quad (26)$$

可写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ t''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (\gamma - 1) \frac{(\beta'_x)^2}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} & (\gamma - 1) \frac{\beta'_x \beta'_y}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} & -\gamma c \beta'_x \\ (\gamma - 1) \frac{\beta'_x \beta'_y}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} & 1 + (\gamma - 1) \frac{(\beta'_y)^2}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} & -\gamma c \beta'_y \\ -\gamma \frac{\beta'_x}{c} & -\gamma \frac{\beta'_y}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \quad (27)$$

(1.4) 为使 (1.2) 问与 (1.3) 问答案一致, 需要对矩阵旋转一个小角度 θ , 这个角度即为韦格纳转动角对 (1.3) 问中所得变换再进行一次转动变换可得

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ t'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ t''' \end{pmatrix} \quad (28)$$

代入 (1.3) 中结果

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ t'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & -\gamma c (\cos \theta \beta'_x + \sin \theta \beta'_y) \\ M_{21} & M_{22} & -\gamma c (-\sin \theta \beta'_x + \cos \theta \beta'_y) \\ -\gamma \frac{\beta'_x}{c} & -\gamma \frac{\beta'_y}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \quad (29)$$

其中

$$\begin{cases} \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - [(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2]}} \\ M_{11} = \cos \theta \left(1 + (\gamma - 1) \frac{(\beta'_x)^2}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} \right) + \sin \theta \left((\gamma - 1) \frac{\beta'_x \beta'_y}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} \right) \\ M_{12} = \cos \theta \left((\gamma - 1) \frac{\beta'_x \beta'_y}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} \right) + \sin \theta \left(1 + (\gamma - 1) \frac{(\beta'_y)^2}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} \right) \\ M_{21} = -\sin \theta \left(1 + (\gamma - 1) \frac{(\beta'_x)^2}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} \right) + \cos \theta \left((\gamma - 1) \frac{\beta'_x \beta'_y}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} \right) \\ M_{22} = -\sin \theta \left((\gamma - 1) \frac{\beta'_x \beta'_y}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} \right) + \cos \theta \left(1 + (\gamma - 1) \frac{(\beta'_y)^2}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} \right) \end{cases} \quad (30)$$

与 (1.2) 中的结果对比, 可得到矩阵元的对应关系, 注意到在 (1.2) 中的结果有一个矩阵元为 0, 因此可得到

$$\cos \theta \left((\gamma - 1) \frac{\beta'_x \beta'_y}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} \right) + \sin \theta \left(1 + (\gamma - 1) \frac{(\beta'_y)^2}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2} \right) = 0 \quad (31)$$

可解得

$$\tan \theta = - \frac{(\gamma - 1) \beta'_x \beta'_y}{(\beta'_x)^2 + (\beta'_y)^2 + (\gamma - 1) (\beta'_y)^2} \quad (32)$$

进行近似后可得最低阶的韦格纳转动角度 θ

$$\theta \approx - \frac{1}{2} \beta'_x \beta'_y \quad (33)$$

(2) 由题设可知

$$\beta'_x = \frac{v}{c} \quad (34)$$

$$\beta'_y = \frac{a \, dt}{c} \quad (35)$$

代入韦格纳转动角度结果, 得到转动角

$$d\theta \approx - \frac{va \, dt}{2c^2} \quad (36)$$

进而得到坐标架转动的角速度

$$\Omega \approx - \frac{va}{2c^2} \quad (37)$$

这个结果就是一阶近似下的托马斯进动 (3) (3.1) 对于粒子, 其自旋角动量大小保持恒定, 仅是自身绕着固定轴转动

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{S} \quad (38)$$

使用角动量定理, 可得粒子在恒定磁场中的运动方程

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (39)$$

二者联立, 并使用题给公式

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = -\gamma (\vec{S} \times \vec{B}) \quad (40)$$

对比前面可得拉莫尔进动角速度

$$\vec{\omega} = \gamma \vec{B} \quad (41)$$

(3.2) 为解决原子核运动所产生磁场对电子本身的效应, 我们第一步需要把整个体系放入电子静止系研究, 在这个系中存在电子与原子核之间的库伦作用力 (相当于没有考虑任何量子力学效应, 属于零阶项) 以及原子核运动时由于相对论效应所产生的磁场, 由前一问可知, 磁场会对有自旋的电子产生作用, 这一磁场与自旋的作用产生了我们需要研究的自旋-轨道磁场耦合能量在电子静止系中, 原子核对电子产生的磁场为

$$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} \quad (42)$$

以及利用轨道角动量的公式和电场公式

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (43)$$

$$\vec{E} = - \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (44)$$

最后可得磁场的完整表达式

$$\vec{B} = - \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \frac{\vec{L}}{r^3} \quad (45)$$

接下来我们需要考虑磁场与电子自旋的相互作用关系在电子静止系中，电子自旋以拉莫尔进动角速度旋转，而同时因为相对论条件下的换系又存在托马斯进动效应，二者叠加效应相反实际的拉莫尔进动角速度

$$\omega' = \omega - \Omega \quad (46)$$

其中

$$\omega = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e^2 c^2} \frac{L}{r^3} \quad (47)$$

$$\vec{\Omega} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 m_e^2 c^2} \frac{\vec{L}}{r^3} \quad (48)$$

得实际进动角速度

$$\omega' = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 m_e^2 c^2} \frac{L}{r^3} \quad (49)$$

进而有等效磁场

$$\vec{B}' = \frac{Ze}{8\pi\epsilon_0 m_e c^2} \frac{\vec{L}}{r^3} \quad (50)$$

磁场与自旋的相互作用能量为

$$E_{SO} = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 m_e^2 c^2} \frac{\vec{L} \cdot \vec{S}}{r^3} \quad (51)$$

其均值为

$$\langle E_{SO} \rangle = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 m_e^2 c^2} \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle \langle r^{-3} \rangle \quad (52)$$

下面需要处理 $\vec{L} \cdot \vec{S}$ 因为有 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ，利用矢量公式，得

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} (J^2 - L^2 - S^2) \quad (53)$$

$$\langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \quad (54)$$

分别代入 $j = l + \frac{1}{2}$ 和 $j = l - \frac{1}{2}$ ，得

$$\langle E_{SO} \rangle_{j=l+1/2} = \frac{Z^4 e^2 \hbar^2}{32\pi\epsilon_0 m_e^2 c^2 a_0^3} \frac{1}{n^3 (l+1)(l+\frac{1}{2})} \quad (55)$$

$$\langle E_{SO} \rangle_{j=l-1/2} = -\frac{Z^4 e^2 \hbar^2}{32\pi\epsilon_0 m_e^2 c^2 a_0^3} \frac{1}{n^3 l(l+\frac{1}{2})} \quad (56)$$

得到能量差

$$\Delta E = \frac{Z^4 e^2 \hbar^2}{8\pi\epsilon_0 m_e^2 c^2 a_0^3} \cdot \frac{1}{n^3 l(l+1)} \quad (57)$$

评分标准：本题满分 45 分。

第 (1) 问 31 分：

第 (1.1) 问 16 分：(5) (6) (7) (9) 式各 1 分，(1) (2) (3) (4) (8) (10) 式各 2 分；

第 (1.2) 问 2 分：(15) (16) 式各 1 分；

第 (1.3) 问 7 分：(21) (22) (23) (24) (25) 式各 1 分，(27) 式 2 分；

第 (1.4) 问 6 分：(28) (32) 式各 1 分，(29) (33) 式各 2 分；

第 (2) 问 4 分：(36) (37) 式各 2 分；

第 (3) 问 10 分：

第 (3.1) 问 4 分：(38) (39) (40) (41) 式各 1 分；

第 (3.2) 问 6 分：(45) (50) (54) (55) (56) (57) 式各 1 分。

附录

本题以韦格纳转动和托马斯进动为主线，系统考查了复合洛伦兹变换的矩阵运算、小速度近似下的旋转角推导、匀速圆周运动中坐标架转动角速度的计算，以及自旋-轨道耦合能级分裂的半经典估算，涵盖了狭义相对论运动学与原子物理精细结构的关键物理图像。本题的命题灵感来源于第39届全国中学生物理竞赛（复赛）推迟赛第七题，该题在解答自旋-轨道耦合能级分裂时直接使用了因子 $\frac{1}{2}$ ，但未对托马斯进动作任何推导或说明，本题正是为了填补这一空白，通过构造二维复合洛伦兹变换，揭示该 $\frac{1}{2}$ 因子的几何来源，使考生理解其物理本质而非仅当作公式记忆。

五、(40分) 航天器表面磁偏转通信方案的物理机制

当航天器以高超音速返回地球大气层时，强烈的气动加热会使周围空气发生电离，在航天器表面形成一层高密度的等离子体鞘套。这层等离子体会屏蔽地面测控信号，导致航天器在特定高度范围内与地面失去联系，即著名的“通信黑障”现象。

为了解决这一问题，科学家提出了一种方案：在航天器表面外加一个强大的恒定磁场，利用磁化等离子体的各向异性，打开一条允许特定频率电磁波穿透的“磁化窗口”。

本题旨在利用冷等离子体模型分析该方案的物理机制。

假设等离子体是均匀且电中性的，电子数密度为 n_0 ，质量为 m ，电荷量为 $-e$ 。由于离子质量巨大，可视为均匀的静止正电背景；忽略电子热运动及碰撞影响。真空光速为 c ，真空介电常数为 ϵ_0 ，真空磁导率为 μ_0 。

在处理高频电磁波时，我们假设微扰电场为平面波形式为 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ ，其中 $\vec{k}$ 为波矢， ω 为电磁波角频率。结合麦克斯韦方程组，可直接得到等离子体中电磁波的波动方程：

$$-\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) + k^2 \vec{E} = i\omega\mu_0 \vec{j} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \quad (1)$$

其中， $\vec{j} = -en_0\vec{v}$ 为微扰电场引起的电子高频振荡电流密度， $\vec{v}$ 为电子的振荡速度。

(1) 现在航天器表面施加一个均匀的恒定磁场 $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$ 。地面发射的电磁波垂直于磁场方向入射，设波矢 $\vec{k} = k\hat{x}$ 。此时电场可能同时具有 E_x 和 E_y 分量。

(1.1) 在微扰电场 $\vec{E}$ 和恒定磁场 $\vec{B}_0$ 的共同作用下，写出电子在 $x-y$ 平面内的运动方程（忽略由电场变化产生的微扰磁场对电子运动的影响）。

(1.2) 解出电子在 x 和 y 方向上的稳态振荡速度振幅 v_x 和 v_y 。（可用 $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$ 来化简表达式）。

(2) 在此传播模式 $\vec{k} = k\hat{x}$ 下，若电磁波的电场极化方向在 $x-y$ 平面内，我们称之为非寻常波（X波）。

(2.1) 利用第(1)问的结果，将对应的电流密度分量 j_x, j_y 代入电磁波的波动方程（式(1)）的各个分量中。

(2.2) 证明X波不再是纯粹的横波，而是具有静电场分量 E_x 。求出 E_x 与 E_y 的比例关系式。

(2.3) 推导出X波的色散方程（即求出 $\frac{c^2 k^2}{\omega^2}$ 关于 $\omega, \omega_p, \omega_c$ 的表达式）。

(3) 令 $k \rightarrow 0$ 时的频率为截止频率。

(3.1) 求出X波的两个截止频率：高频截止频率 ω_R 和低频截止频率 ω_L 。

(3.2) 若某返回舱周围等离子体产生的等离子体频率为 $\omega_p = 2\pi \times 10^{10}$ Hz，地面测控雷达的信号频率为 $\omega = 2\pi \times 0.8 \times 10^{10}$ Hz。显然，如果不加磁场，该信号会被完全屏蔽。若要利用X波模式打开通信窗口，使得该频率的测控信号能够穿透鞘套，求航天器表面外加磁场 B_0 至少需要达到多少特斯拉（T）。

解：

(1) (1.1) 在外加恒定磁场 $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$ 中，电子同时受到微扰电场和洛伦兹力的作用。忽略微扰磁场的影响，运动方程为：

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0) \quad (2)$$

由于 $\vec{k} = k\hat{x}$ ，将方程在 $x-y$ 平面内展开，并将 $\frac{\partial}{\partial t}$ 替换为 $-i\omega$ ：

$$-i\omega m v_x = -eE_x - ev_y B_0 \quad (3)$$

$$-i\omega m v_y = -eE_y + ev_x B_0 \quad (4)$$

(1.2) 引入电子回旋频率 $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$, 将方程组两边同时除以 m :

$$-i\omega v_x + \omega_c v_y = -\frac{e}{m} E_x \quad (5)$$

$$-\omega_c v_x - i\omega v_y = -\frac{e}{m} E_y \quad (6)$$

解此二元一次方程组, 可得电子在两方向上的速度振幅:

$$v_x = \frac{-e}{m(\omega^2 - \omega_c^2)} (i\omega E_x + \omega_c E_y) \quad (7)$$

$$v_y = \frac{-e}{m(\omega^2 - \omega_c^2)} (-\omega_c E_x + i\omega E_y) \quad (8)$$

(2) (2.1) 根据第 (1) 问的结果, 电流密度的分量为 $j_{x,y} = -en_0 v_{x,y}$ 。利用 $\varepsilon_0 \omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{m}$ 可将其化简为:

$$j_x = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} (i\omega E_x + \omega_c E_y) \quad (9)$$

$$j_y = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} (-\omega_c E_x + i\omega E_y) \quad (10)$$

对于 X 波, $\vec{k} = k\hat{x}$, 故 $\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) = k^2 E_x \hat{x}$ 。将波动方程在 x 和 y 方向展开:

$$0 = i\omega \mu_0 j_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x \quad (11)$$

$$k^2 E_y = i\omega \mu_0 j_y + \frac{\omega^2}{c^2} E_y \quad (12)$$

(2.2) 由 x 方向的方程, 代入 j_x 并在两边同乘 c^2 (利用 $\mu_0 c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}$):

$$\omega^2 E_x = \frac{\omega^2 \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} E_x - i \frac{\omega \omega_c \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} E_y \quad (13)$$

合并含有 E_x 的项并化简得到比例关系式:

$$\frac{E_x}{E_y} = -i \frac{\omega_c \omega_p^2}{\omega(\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2)} \quad (14)$$

由于 $\omega_c, \omega_p \neq 0$, 当 $E_y \neq 0$ 时, 必然存在 $E_x \neq 0$ 。

(2.3) 由 y 方向的方程可得:

$$(c^2 k^2 - \omega^2) E_y = i\omega \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} (-\omega_c E_x + i\omega E_y) \quad (15)$$

两边同除以 $\omega^2 E_y$, 并将求出的 $\frac{E_x}{E_y}$ 代入括号内:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} - 1 = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \left(\frac{\omega_c^2 \omega_p^2}{\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2)} + 1 \right) \quad (16)$$

代回原式化简, 分子分母的 $(\omega^2 - \omega_c^2)$ 抵消, 得到最终的色散方程:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2(\omega^2 - \omega_p^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_p^2 - \omega_c^2)} \quad (17)$$

(3) (3.1) 令 $k \rightarrow 0$, 则 $\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 0$, 代入色散方程整理得到:

$$\omega^4 - (2\omega_p^2 + \omega_c^2)\omega^2 + \omega_p^4 = 0 \quad (18)$$

利用求根公式并化简，得到两个正根：

$$\omega_R = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} + \omega_c \right) \quad (19)$$

$$\omega_L = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} - \omega_c \right) \quad (20)$$

(3.2) 若要通过外加磁场使得 X 波传播，色散方程中必须满足 $k^2 > 0$ ，即要求信号频率大于低频截止频率：

$$\omega > \omega_L \implies \omega > \frac{1}{2} \left(\sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2} - \omega_c \right) \quad (21)$$

两边平方并化简可得：

$$\omega_c > \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega} \quad (22)$$

代入 $\omega = 0.8\omega_p$ ：

$$\omega_c > \frac{\omega_p^2 - 0.64\omega_p^2}{0.8\omega_p} = 0.45\omega_p \quad (23)$$

再代入电子回旋频率的定义式 $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$ ：

$$B_0 > \frac{m}{e} \times 0.45\omega_p \approx 0.1608 \text{ T} \quad (24)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 8 分：

第 (1.1) 问 4 分：(3) (4) 式各 1 分，(2) 式 2 分；

第 (1.2) 问 4 分：(5) (6) (7) (8) 式各 1 分；

第 (2) 问 16 分：

第 (2.1) 问 4 分：(9) (10) (11) (12) 式各 1 分；

第 (2.2) 问 6 分：(13) (14) 式各 2 分，这说明电场沿着波的传播方向 (x 方向) 具有纵向分量，因此 X 波不是纯粹的横波 2 分；

第 (2.3) 问 6 分：(15) 式 1 分，(16) 式 2 分，(17) 式 3 分；

第 (3) 问 16 分：

第 (3.1) 问 8 分：(18) 式 2 分，(19) (20) 式各 3 分；

第 (3.2) 问 8 分：(21) (22) (23) (24) 式各 2 分。

六、(45 分) 羽毛球球的抖动

本题建立玩具模型研究羽毛球在空中飞行时的抖动现象。将羽毛球的羽毛部分视为一个匀质圆锥壳，球头位于顶点处，圆锥底面半径为 R ，半顶角为 α ，以其顶点为原点，以高的方向为 z 轴正方向建立直角坐标系，设羽毛球以 x 轴为转轴转过的角度为 θ ($\theta \ll 1$)。认为空气阻力正比于羽毛球面积在球头飞行方向的投影，比例系数为 k ，方向与球头飞行方向相反。下文中提到的羽毛球均只考虑羽毛球的羽毛部分。

Part A 完整的羽毛球：已知完整的羽毛球质量为 m_0 。

(1.1) 求解羽毛球的质心位置 z_{C0} 以及其关于原点绕 x 轴的转动惯量 I_0 。

(1.2) 现在考虑羽毛球向 z 轴负方向飞行的过程，不考虑重力，认为球头的质量远大于羽毛的质量，因此球头的加速度可以忽略不计。求羽毛球以 x 轴为转轴小振动的角频率 ω_0 。

Part B 破损的羽毛球：现在羽毛球的一根羽毛脱落了，对应于圆锥在 $x-y$ 平面上的投影中与 y 轴负方向夹角为 $\pm \frac{\beta}{2}$ 的部分脱落了。已知脱落后的羽毛球总质量为 m 。

(2.1) 求解羽毛球的质心位置 (y_C, z_C) 以及其关于 x 轴的转动惯量 I 。

(2.2) 令 $\beta \ll 1$ ，与 (1.2) 类似，仍考虑羽毛球向 z 轴负方向飞行的过程，求羽毛球以 x 轴为转轴小振动的平衡位置 θ_0 和角频率 ω (保留至 β 的最低阶非零项)。

解：

Part A

(1.1) 将圆锥展开, 计算展开形成的扇形的面积

$$S_0 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{\pi R^2}{\sin \alpha} \quad (1)$$

质量面密度

$$\sigma_0 = \frac{m_0}{S_0} = \frac{m_0 \sin \alpha}{\pi R^2} \quad (2)$$

取 $z \rightarrow z + dz$, 面元

$$dS_0 = 2\pi z \tan \alpha \frac{dz}{\cos \alpha} = 2\pi \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} z dz \quad (3)$$

质心位置

$$z_{C0} = \frac{1}{m_0} \int_0^{\frac{R}{\tan \alpha}} 2\pi \sigma_0 \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} z dz = \frac{2R}{3 \tan \alpha} \quad (4)$$

转动惯量

$$dI_0 = \int \left(\frac{1}{2} z^2 \tan^2 \alpha + z^2 \right) dm = \left(1 + \frac{\tan^2 \alpha}{2} \right) \int_0^{\frac{R}{\tan \alpha}} \frac{2m_0}{R^2} \tan^2 \alpha \cdot z^3 dz \quad (5)$$

积分, 得

$$I_0 = \frac{1}{4} m_0 R^2 \left(1 + \frac{2}{\tan^2 \alpha} \right) \quad (6)$$

(1.2) 空气阻力正比于羽毛球面积在球头飞行方向的投影

$$S_{\text{eff0}} = \pi R^2 \cos \theta \approx \pi R^2 \quad (7)$$

力的大小

$$F_0 = k S_{\text{eff0}} \approx k \pi R^2 \quad (8)$$

受力点可以等效为圆锥底面圆心处。分析力矩大小

$$M_0 = F_0 \frac{R}{\tan \alpha} \cdot \theta = \frac{k \pi R^3}{\tan \alpha} \theta \quad (9)$$

振动方程

$$\frac{1}{4} m_0 R^2 \left(1 + \frac{2}{\tan^2 \alpha} \right) \ddot{\theta} + \frac{k \pi R^3}{\tan \alpha} \theta = 0 \quad (10)$$

从而得到

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4k\pi R}{m_0 \left(\tan \alpha + \frac{2}{\tan \alpha} \right)}} \quad (11)$$

Part B

(2.1) 在缺口角度为 β 时, 扇形面积

$$S = \frac{1}{2} (2\pi - \beta) R \cdot \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{\left(\pi - \frac{\beta}{2} \right) R^2}{\sin \alpha} \quad (12)$$

质量面密度

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m \sin \alpha}{\left(\pi - \frac{\beta}{2} \right) R^2} \quad (13)$$

由于轴对称性, 仍有

$$z_C = z_{C0} = \frac{2R}{3 \tan \alpha} \quad (14)$$

考虑 y_C , 由于圆锥质量分布相当于圆的质量以 z 正比于 r 的关系在 z 方向上分布, 因此 y 方向的质心位置与缺口为 β 的扇形一致。

先考虑顶角为 β 的小扇形, 由巴普斯定理, 质心到半径的距离 h 满足

$$2\pi h \cdot \frac{1}{2} \beta R^2 = \frac{2\pi}{3} (1 - \cos \beta) R^3 \quad (15)$$

解得

$$h = \frac{2(1 - \cos \beta)}{3\beta} R \quad (16)$$

质心到圆心的距离

$$l = \frac{h}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{2(1 - \cos \beta)}{3\beta \sin \frac{\beta}{2}} R \quad (17)$$

那么在考虑缺口为 β 的扇形的质心位置

$$y_C = \frac{\beta}{2\pi - \beta} l = \frac{2(1 - \cos \beta)}{3(2\pi - \beta) \sin \frac{\beta}{2}} R \quad (18)$$

再考虑转动惯量。取 $z \rightarrow z + dz$, 记

$$z \tan \alpha = r \quad (19)$$

有

$$\frac{dI}{dm} = \frac{2}{2\pi - \beta} \int_{\frac{\beta}{2}}^{\pi} r^2 \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} r^2 \left(1 + \frac{\sin \beta}{2\pi - \beta} \right) \quad (20)$$

从而

$$dI = \left(\frac{1}{2} \tan^2 \alpha \left(1 + \frac{\sin \beta}{2\pi - \beta} \right) + 1 \right) \frac{2m}{R^2} \tan^2 \alpha \cdot z^3 dz \quad (21)$$

积分得

$$I = \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin \beta}{2\pi - \beta} \right) + \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right) \quad (22)$$

(2.2) $\beta \ll 1$ 时, 平衡时的 θ 也是小量

$$y_C \approx \frac{\beta R}{3\pi} \quad (23)$$

$$\theta_0 = \frac{y_C}{R} = \frac{\beta \tan \alpha}{3\pi} \quad (24)$$

力矩大小

$$M = \pi R^2 k \left(\frac{\theta R}{\tan \alpha} - \frac{\beta R}{3\pi} \right) = \frac{\pi R^3 k}{\tan \alpha} (\theta - \theta_0) \quad (25)$$

即力矩为相对 θ_0 的线性回复形式。

转动惯量

$$I \approx \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{\beta}{4\pi} \right) = \frac{1}{4} m R^2 \left(1 + \frac{2}{\tan^2 \alpha} \right) \left(1 + \frac{\beta}{2\pi \left(1 + \frac{2}{\tan^2 \alpha} \right)} \right) \quad (26)$$

转动定理

$$I \ddot{\theta} + \frac{\pi R^3 k}{\tan \alpha} (\theta - \theta_0) = 0 \quad (27)$$

得

$$\omega \approx \sqrt{\frac{4k\pi R}{m_0 \left(\tan \alpha + \frac{2}{\tan \alpha} \right)}} \left(1 - \frac{\beta}{4\pi \left(1 + \frac{2}{\tan^2 \alpha} \right)} \right) = \omega_0 \left(1 - \frac{\beta}{4\pi \left(1 + \frac{2}{\tan^2 \alpha} \right)} \right) \quad (28)$$

评分标准: 本题满分 45 分。

Part A 14 分:

第 (1.1) 问 8 分: (1) (2) (3) (5) 式各 1 分, (4) (6) 式各 2 分;

第 (1.2) 问 6 分: (7) (8) (9) (10) 式各 1 分, (11) 式 2 分;

Part B 31 分:

第 (2.1) 问 19 分: (12) (13) (15) 式各 1 分, (14) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) 式各 2 分;

第 (2.2) 问 12 分: (23) (24) (25) (26) (27) (28) 式各 2 分。

七、(50 分) 非互易波导阵列中的边界敏感谱

在光子学中, 通过恰当地调节无源空间中折射率的分布, 可以使得光场在空间中的传播方程类似于单量子力学中的薛定谔方程。本文采用自然单位制 $\hbar = 1$:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = \hat{H}\psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}, t)$$

(1) 假设折射率仅依赖于 x 坐标, 即 $n = n(x)$, 光场沿 z 方向传播, 且电场偏振方向为 y 方向。对于单色光场, Maxwell 方程给出:

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu_0\vec{H}, \quad \nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon_0 n^2(x)\vec{E}$$

假设电场具有下面的振荡解:

$$\vec{E}(x, z, t) = \vec{e}_y \psi(x, z) e^{-i\omega t + i\beta z}$$

这里振幅因子 $\psi(x, z)$ 在 z 方向上是缓变的。求出 $\psi(x, z)$ 满足的方程, 说明其如何对应于一维的薛定谔方程。

(2) 考虑在均匀折射率背景 n_0 上位于 $x = 0$ 的平板波导, 折射率分布近似为:

$$n(x) = n_0 + u\delta(x), \quad u > 0$$

其中 $\delta(x)$ 为 Dirac δ 函数, u 较小。此时取 $\beta = n_0\omega/c$ 。通过假设 $\psi(x, z) = \phi(x)e^{-i\mu z}$, 证明 $\phi(x)$ 有下面的形式:

$$\phi(x) = Ae^{-\alpha|x|}$$

并求出 $\alpha, \mu = \mu_0$ 的表达式。这意味着光场在 $x = 0$ 处存在一个束缚态。

(3) 本题进一步研究由 N 条折射率相同的平板波导组成的一维阵列, 设各波导沿 z 方向平行延伸, 在 y 方向均匀, x 方向上以间距 d 等距排列。这可以模拟一个在一维晶格中运动的粒子。当 $\alpha d \gg 1$ 时, 波导间的耦合可以近似为最近邻耦合。普通静态无磁波导之间的耦合具有互易性。现设在相邻波导之间加入纵向周期调制或含损耗的辅助耦合通道, 使光向 $+x$ 和 $-x$ 方向跃迁的有效耦合强度分别为:

$$J_+ = Je^\chi, \quad J_- = Je^{-\chi}, \quad (J > 0, \chi > 0)$$

设 $\phi_n(x)$ 为第 n 条波导的束缚态模式, 光场在 $\{\phi_n\}$ 基底下的展开系数为 $c_n(z)$, 则系数 $c_n(z)$ 满足演化方程:

$$i\frac{d}{dz}c_n(z) = J_-c_{n+1}(z) + J_+c_{n-1}(z).$$

对本征模式 $c_n(z) = c_n e^{-iEz}$, 相应的本征值方程为

$$Ec_n = J_-c_{n+1} + J_+c_{n-1}.$$

其中 E 代表模拟粒子的有效能量; 在光学系统中, 它对应传播常数的偏移, 量纲为逆长度。

(i) 先采用固体中常用的周期性边界条件 $c_n = c_{n+N}$, 此时系统具有离散的平移对称性, 因此可以猜测 $c_n(z) \sim e^{iknd - iEz}$, 其中 k 为晶格动量。求出能量 $E_{\text{PBC}}(k)$ 的表达式, 即周期性边界条件下的能谱。并写出 k 的可能取值。

(ii) 然而, 更为物理的边界条件是开放边界条件, 即 $c_0 = c_{N+1} = 0$ 。一个有启发性的构造是 $a_n = f(n)c_n$, 求使得 a_n 满足一个互易的递推方程 (即 $J'_+ = J'_-$) 的 $f(n)$ 。进一步求出此时的能谱 E_{OBC} 。在热力学极限 $N \rightarrow \infty$ 下, 在复平面上画出两种边界条件下 E_{OBC} 与 E_{PBC} 的能谱曲线。

(iii) 你应该会发现两种边界条件下的能谱曲线即使在热力学极限下也不相同, 其源于系统的非互易性。再考虑两种条件下的 c_n 分布, 在第 n 个波导上传输的光场功率可以用 $P_n = |c_n|^2$ 来刻画。请通过计算, 定性表述两种边界条件下的传输功率在各波导分布上的差异。

解:

(1) 联立 Maxwell 方程, 有:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \frac{\omega^2 n^2(x)}{c^2} \vec{E}. \quad (1)$$

由于电场仅有 y 分量, 且系统在 y 方向上均匀, 因此 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 。代入 $\vec{E} = \psi(x, z) e^{i\beta z - i\omega t} \vec{e}_y$, 得到:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2i\beta \frac{\partial \psi}{\partial z} + \left[\frac{\omega^2 n^2(x)}{c^2} - \beta^2 \right] \psi = 0. \quad (2)$$

由于包络 ψ 沿 z 方向缓慢变化, 满足近轴近似:

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2\beta \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|.$$

略去 $\partial_z^2 \psi$, 可得:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = \left[-\frac{1}{2\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\omega^2 n^2(x)/c^2 - \beta^2}{2\beta} \right] \psi. \quad (3)$$

这与一维薛定谔方程具有相同形式, 对应关系为:

$$t_{\text{eff}} = z, \quad m_{\text{eff}} = \beta, \quad V_{\text{eff}}(x) = -\frac{k_0^2 n^2(x) - \beta^2}{2\beta}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}.$$

(2) 对 $n(x) = n_0 + u\delta(x)$, 采用弱折射率调制近似,

$$n^2(x) - n_0^2 \simeq 2n_0 u \delta(x). \quad (4)$$

取 $\beta = n_0 \omega / c = n_0 k_0$, 由第 (1) 问的近轴传播方程可得:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = \left[-\frac{1}{2\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_0 u \delta(x) \right] \psi. \quad (5)$$

令 $\psi(x, z) = \phi(x) e^{-i\mu z}$, 得到定态方程:

$$\mu \phi(x) = -\frac{1}{2\beta} \phi''(x) - k_0 u \delta(x) \phi(x).$$

在 $x \neq 0$ 处,

$$\phi''(x) + 2\beta\mu \phi(x) = 0.$$

束缚态要求 $\mu < 0$ 。定义 $\alpha = \sqrt{-2\beta\mu} > 0$, 并要求光场在无穷远处衰减, 可得:

$$\phi(x) = A e^{-\alpha|x|}. \quad (6)$$

将本征方程在 $x = 0$ 附近积分, 得到导数跃变条件:

$$\phi'(0^+) - \phi'(0^-) = -2\beta k_0 u \phi(0). \quad (7)$$

另一方面, 对于 $\phi(x) = A e^{-\alpha|x|}$, 有:

$$\phi'(0^+) - \phi'(0^-) = -2\alpha A = -2\beta k_0 u A.$$

因此,

$$\alpha = \beta k_0 u = n_0 k_0^2 u = \frac{n_0 u \omega^2}{c^2}, \quad \mu_0 = -\frac{\alpha^2}{2\beta} = -\frac{\beta (k_0 u)^2}{2} = -\frac{n_0 u^2 \omega^3}{2c^3}. \quad (8)$$

因为 $\alpha > 0$, 光场从 $x = 0$ 向两侧指数衰减, 故该模式是局域在波导处的束缚态。

(3) (i) 取格波形式 $c_n(z) = C e^{iknd - iEz}$, 代入递推方程, 得到:

$$\begin{aligned} E_{\text{PBC}}(k) &= J_- e^{ikd} + J_+ e^{-ikd} = J e^{-\chi + ikd} + J e^{\chi - ikd} = 2J \cos(kd + i\chi) \\ &= 2J \cosh \chi \cos(kd) - 2iJ \sinh \chi \sin(kd). \end{aligned} \quad (9)$$

周期性边界条件要求 $e^{ikNd} = 1$, 故允许的晶格动量为:

$$k_m = \frac{2\pi m}{Nd}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \quad (10)$$

(ii) 令 $a_n = f(n)c_n$, 原递推方程变为:

$$Ea_n = J_- \frac{f(n)}{f(n+1)} a_{n+1} + J_+ \frac{f(n)}{f(n-1)} a_{n-1}. \quad (11)$$

取:

$$f(n) = e^{-\chi n}, \quad J_- \frac{f(n)}{f(n+1)} = J_+ \frac{f(n)}{f(n-1)} = J, \quad (12)$$

则 a_n 满足互易递推方程:

$$Ea_n = J(a_{n+1} + a_{n-1}), \quad a_0 = a_{N+1} = 0.$$

取试探解 $a_n = \lambda^n$, 可得特征方程:

$$J\lambda^2 - E\lambda + J = 0.$$

其两个根为:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\frac{E}{J} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{J}\right)^2 - 4} \right], \quad \lambda_+ \lambda_- = 1.$$

因此可令 $\lambda_{\pm} = e^{\pm iq}$, 其中 q 暂时可以为复数, 并写出通解

$$a_n = A e^{iqn} + B e^{-iqn}, \quad E = 2J \cos q.$$

边界条件 $a_0 = 0$ 给出 $B = -A$; 再由 $a_{N+1} = 0$ 得

$$a_n^{(m)} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin(k_m n d), \quad k_m = \frac{m\pi}{(N+1)d}, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

因此开放边界条件下的能谱为:

$$E_{\text{OBC}}(k_m) = 2J \cos\left(\frac{m\pi}{N+1}\right) = 2J \cos(k_m d). \quad (14)$$

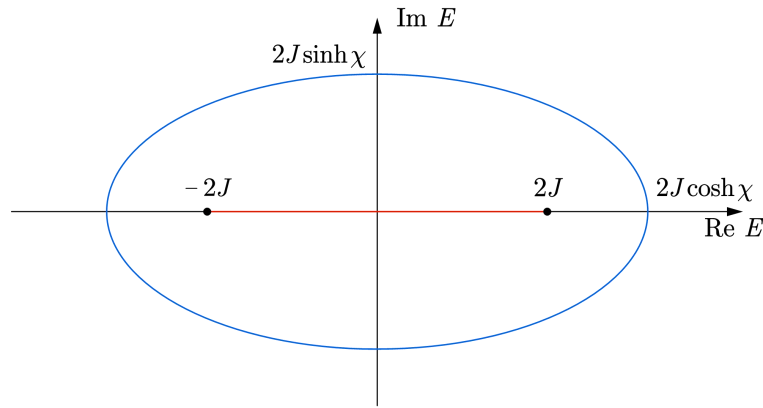
在热力学极限下, 离散波数变为连续。周期性边界条件可以取一个布里渊区 $k \in [0, 2\pi/d)$, 其能谱满足:

$$\frac{[\text{Re } E]^2}{(2J \cosh \chi)^2} + \frac{[\text{Im } E]^2}{(2J \sinh \chi)^2} = 1,$$

对于开放边界条件, 有限 N 时有 $k_m \in (0, \pi/d)$; 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 这些波数在该区间内稠密, 能谱的闭包为

$$E \in \mathbb{R}, \quad -2J \leq E \leq 2J.$$

故在复能量平面上, 能谱在周期性边界条件下形成以原点为中心的椭圆, 在开放边界条件下形成一段在实轴上的线段。如下图所示:



答图 7.1: 热力学极限下两种边界条件的能谱示意图

(iii) 周期性边界条件下, 本征态为 Bloch 波 $c_n \propto e^{iknd}$, 故 $P_n = |c_n|^2$ 不随 n 改变。本征态在整个环形阵列上延展, 每个波导上的传输功率相同。

开放边界条件下, 由 $a_n = e^{-\chi n} c_n$, 可得方程本征态 (即右本征态) 展开系数为:

$$c_n^{(m)} \propto e^{\chi n} \sin(k_m nd)$$

其功率分布为:

$$P_n^{(m)} \propto e^{2\chi n} \sin^2(k_m nd). \quad (15)$$

其包络随 n 指数增大, 因此右本征态的光功率集中在较大的 n 一侧, 即 $+x$ 方向的右边界。这一现象称为非厄米趋肤效应。

若采用双正交表述, 对应左本征矢的分量正比于 $e^{-\chi n} \sin(k_m nd)$, 因而在数学上局域于左边界。左本征矢是对偶本征矢, 并不直接代表上述正向传播光场的实际功率分布。

评分标准: 本题满分 50 分。

第 (1) 问 12 分: (1) (2) 式各 2 分, (3) 式 4 分, 正确指出传播距离与时间、有效质量与有效势能之间的对应关系 4 分;

第 (2) 问 12 分: (4) (5) (6) 式各 2 分, (7) (8) 式各 3 分;

第 (3) 问 26 分:

第 (i) 问 6 分: (10) 式 2 分, (9) 式 4 分;

第 (ii) 问 12 分: (11) (14) 式各 2 分, (12) (13) 式各 3 分, 正确作图 2 分;

第 (iii) 问 8 分: (15) 式 2 分, 正确说明周期性边界条件下各波导功率相同 2 分, 正确指出开放边界条件下的边界积聚/趋肤效应 4 分。

版权信息

命题人

赵巍然 李圣和 刘子言 孟令辉 黄启宸 陈奥博 任泓锦

审题人

小夜 任泓锦 陈奥博 赵巍然 李圣和 孟令辉 黄启宸 刘子言

联系方式

微信公众号
CPHOS官方网站
www.cphos.cn

CPHOS 论坛

邮箱

service@cphos.cn

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考

