

第 32 届 CPHOS 物理竞赛联考暨决赛模拟 理论试题

本文件于 2020 年 10 月 13 日 12:00 发布, 最后更新于 2026 年 10 月 7 日 12:57。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试, 有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名, 报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

一、(40 分) 加速器中的谐振腔

在粒子加速器中, 科研人员常利用谐振腔产生高频电磁场, 使带电粒子从中获得巨大能量。为研究其基本性质, 现考虑一个半径为 R 、长度为 L 的圆柱形谐振腔, 腔内为真空, 腔侧壁及两端为理想导体。为计算方便, 以轴线中点为原点、圆柱轴线为 z 轴建立柱坐标系。

以下, 仅考虑轴对称 TM 模式:

$$\vec{E} = E_z(r, z, t) \vec{e}_z + E_r(r, z, t) \vec{e}_r, \quad \vec{B} = B_\theta(r, z, t) \vec{e}_\theta \quad (1)$$

真空 Maxwell 方程组为:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2)$$

数学提示:

$$\int_V (\vec{A} \cdot \nabla^2 \vec{B} - \vec{B} \cdot \nabla^2 \vec{A}) dV = \oint_S (\vec{A} \cdot \partial_n \vec{B} - \vec{B} \cdot \partial_n \vec{A}) dS \quad (3)$$

(1) 上述 z 方向电场可以写为:

$$E_z(r, z, t) = f(r) \cos kz \cos \omega t \quad (4)$$

记 $\kappa^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - k^2$, 试求解 $f(r)$ 所满足的微分方程;

(2) 由于 $r = 0$ 处电场有限, 故可将 $f(r)$ 在 $r = 0$ 附近展开为幂级数进行计算。试求解 $f(r)$ 的幂级数展开式, 要求保留至 r^6 项, 保留常数项系数 A_0 。并通过边界条件, 在 $R \ll L$ 下, 求解 k 非零的最低谐振角频率 ω_0 ;

(3) 现在有一电荷量为 q 的带电粒子 t_0 时刻从 $z = -\frac{L}{2}$ 沿 z 轴方向进入谐振腔, 粒子速度为 v_0 , 其速度过大, 使得可近似认为粒子做匀速直线运动。不考虑相对论效应, 试求在模式 ω_0 下, 粒子穿过整个腔体可获得最大能量, 并计算同步速度 $v_0 = \frac{\omega_0 L}{2\pi}$ 下的最大能量, 此处仅为形式计算, 不讨论物理上是否可以实现;

(4) 实际上, 谐振腔工作时会发热, 导致腔体产生微小膨胀, 进而影响谐振频率。假设腔体半径膨胀为 $R' = R(1 + \alpha_R \Delta T)$ 、长度膨胀为 $L' = L(1 + \alpha_L \Delta T)$, 其中 $|\alpha_R \Delta T| \ll 1$, $|\alpha_L \Delta T| \ll 1$ 。记膨胀后 k 非零的最低谐振角频率为 ω'_0 , 给出频率相对变化量 $(\omega'_0 - \omega_0)/\omega_0$, 结果保留至 ΔT 的一阶项;

(5) 有一介质片, 厚度为 d , 相对介电常数为 $\varepsilon_r = 1 + \delta$, 为调节谐振频率, 将其放入腔体, 使其完全覆盖横截面, 中心位于 z_0 。在介质足够薄 $d \ll L$ 、 $\delta \ll 1$ 的条件下, 忽略其对边界条件的扰动, 忽略 E_r 项对结果的影响, 利用电场波动方程计算 $(\omega'_0 - \omega_0)/\omega_0$, 结果保留至 δ 的一阶项。

解:

(1) 由 Maxwell 方程组可得:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1)$$

代入 $\vec{E}$ 表达式, 考虑 z 方向, 化简可得:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - k^2 f = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 f \quad (2)$$

即,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \kappa^2 f = 0 \quad (3)$$

(2) 将 $f(r)$ 在 $r = 0$ 附近展开为幂级数:

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \quad (4)$$

代入微分方程并比较系数, 可得递推关系:

$$A_{n+2} = -\frac{\kappa^2}{(n+2)^2} A_n \quad (5)$$

故可分为奇数项和偶数项两类进行讨论。对于奇数项, 将 $n = 1$ 项代入微分方程, 可得 $A_1 = 0$, 故奇数项系数均为零; 对于偶数项, 则代入递推关系。保留至 r^6 项, 可得:

$$f(r) = A_0 \left(1 - \frac{\kappa^2 r^2}{4} + \frac{\kappa^4 r^4}{64} - \frac{\kappa^6 r^6}{2304} \right) \quad (6)$$

故可得:

$$E_z(r, z, t) = A_0 \left(1 - \frac{\kappa^2 r^2}{4} + \frac{\kappa^4 r^4}{64} - \frac{\kappa^6 r^6}{2304} \right) \cos kz \cos \omega t \quad (7)$$

根据边界条件, $r = R$ 处切向电场为零, 即:

$$f(R) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\kappa_0^2 R^2}{4} + \frac{\kappa_0^4 R^4}{64} - \frac{\kappa_0^6 R^6}{2304} = 0 \quad (8)$$

解得:

$$\kappa_0 R \approx 2.39 \quad (9)$$

另 $z = \pm \frac{L}{2}$ 处切向电场为 0, 由 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ 得:

$$E_r \propto \sin kz \quad (10)$$

进一步可得:

$$\sin \frac{k_0 L}{2} = 0 \Rightarrow k_0 = \frac{2\pi}{L} \quad (11)$$

综上可解得:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa_0^2 + k_0^2}{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{2.39^2}{R^2} + \frac{4\pi^2}{L^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (12)$$

在 $R \ll L$ 下, 可得:

$$\omega_0 \approx \frac{2.39}{R\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi R}{2.39L} \right)^2 \right] \quad (13)$$

(3) 故有粒子所受电场:

$$E_z(0, z, t) = A_0 \cos \frac{2\pi z}{L} \cos \omega_0 t \quad (14)$$

以及:

$$z = v_0(t - t_0) - \frac{L}{2} \quad (15)$$

故粒子获得的能量:

$$\begin{aligned}
 W &= q \int_{t_0}^{t_0 + \frac{L}{v_0}} E_z(0, z, t) v_0 dt \\
 &= q A_0 v_0 \int_{t_0}^{t_0 + \frac{L}{v_0}} \cos\left(\frac{2\pi v_0(t - t_0)}{L} - \pi\right) \cos \omega_0 t dt \\
 &= \frac{q A_0 \omega_0 v_0}{\left(\frac{2\pi v_0}{L}\right)^2 - \omega_0^2} \left(\sin\left(\omega_0 t_0 + \frac{\omega_0 L}{v_0}\right) - \sin \omega_0 t_0 \right)
 \end{aligned} \tag{16}$$

又等价于:

$$W = \frac{2q A_0 \omega_0 v_0}{\left(\frac{2\pi v_0}{L}\right)^2 - \omega_0^2} \sin \frac{\omega_0 L}{2v_0} \cos\left(\omega_0 t_0 + \frac{\omega_0 L}{2v_0}\right) \tag{17}$$

故最大值为

$$W = \left| \frac{2q A_0 \omega_0 v_0}{\left(\frac{2\pi v_0}{L}\right)^2 - \omega_0^2} \sin \frac{\omega_0 L}{2v_0} \right| \tag{18}$$

在同步速度 $v_0 = \frac{\omega_0 L}{2\pi}$ 下, 最大能量为:

$$W = \frac{q A_0 L}{2} \tag{19}$$

(4) k 非零的最低谐振角频率满足:

$$\omega_0'^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\frac{\kappa_0^2 R^2}{R'^2} + \frac{4\pi^2}{L'^2} \right) \tag{20}$$

即:

$$\begin{aligned}
 \omega_0'^2 &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\frac{\kappa_0^2}{(1 + \alpha_R \Delta T)^2} + \frac{4\pi^2}{L^2 (1 + \alpha_L \Delta T)^2} \right) \\
 &\approx \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\kappa_0^2 (1 - 2\alpha_R \Delta T) + \frac{4\pi^2}{L^2} (1 - 2\alpha_L \Delta T) \right) \\
 &= \omega_0^2 - \frac{2}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\kappa_0^2 \alpha_R + \frac{4\pi^2}{L^2} \alpha_L \right) \Delta T
 \end{aligned} \tag{21}$$

可得:

$$\omega_0' \approx \omega_0 - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0} \left(\kappa_0^2 \alpha_R + \frac{4\pi^2}{L^2} \alpha_L \right) \Delta T \tag{22}$$

故:

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega_0' - \omega_0}{\omega_0} &\approx -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega_0^2} \left(\kappa_0^2 \alpha_R + \frac{4\pi^2}{L^2} \alpha_L \right) \Delta T \\
 &= -\frac{\kappa_0^2 \alpha_R + \frac{4\pi^2}{L^2} \alpha_L}{\kappa_0^2 + \frac{4\pi^2}{L^2}} \Delta T
 \end{aligned} \tag{23}$$

(5) 加入介质片后, 有 $\omega_0' \rightarrow \omega_0 + \Delta\omega$, $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$, $\vec{E} \rightarrow \vec{E} + \Delta\vec{E}$, 于是:

$$\nabla^2 (\vec{E} + \Delta\vec{E}) + \mu_0 (\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon) (\omega_0 + \Delta\omega)^2 (\vec{E} + \Delta\vec{E}) = 0 \tag{24}$$

保留一阶项, 得:

$$\nabla^2 \Delta\vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \omega_0^2 \Delta\vec{E} + 2\mu_0 \varepsilon_0 \omega_0 \Delta\omega \vec{E} + \mu_0 \Delta\varepsilon \omega_0^2 \vec{E} = 0 \tag{25}$$

再利用数学提示, 并进行积分:

$$\begin{aligned}\int_V (\vec{E} \cdot \nabla^2 \Delta \vec{E} - \Delta \vec{E} \cdot \nabla^2 \vec{E}) dV &= \oint_S (\vec{E} \cdot \partial_{\vec{n}} \Delta \vec{E} - \Delta \vec{E} \cdot \partial_{\vec{n}} \vec{E}) dS \\ &= \int_V (-2\mu_0 \varepsilon_0 \omega_0 \Delta \omega E^2 - \mu_0 \Delta \varepsilon \omega_0^2 E^2) dV\end{aligned}\quad (26)$$

由边界处切向电场为 0, 且真空中 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, 可知边界处沿法线方向 $\vec{n}$ 的电场满足 $\partial_{\vec{n}} \vec{E}$ 的 $\partial_{\vec{n}} \Delta \vec{E}$ 均为 0, 故原式边界处积分值为 0。因此:

$$\int_V (2\mu_0 \varepsilon_0 \omega_0 \Delta \omega E^2 + \mu_0 \Delta \varepsilon \omega_0^2 E^2) dV = 0 \quad (27)$$

故可得:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\int_V \Delta \varepsilon E^2 dV}{\int_V \varepsilon_0 E^2 dV} \quad (28)$$

计算可得:

$$\int_V \Delta \varepsilon E^2 dV = \int_{V_{\text{介质}}} \delta \varepsilon_0 E^2 dV = \delta \varepsilon_0 d \cos^2 \left(\frac{2\pi z_0}{L} \right) \cos^2 \omega_0 t \int A_0^2 f^2(r) dS \quad (29)$$

$$\int_V \varepsilon_0 E^2 dV = \frac{\varepsilon_0 L}{2} \cos^2 \omega_0 t \int A_0^2 f^2(r) dS \quad (30)$$

故有:

$$\frac{\omega'_0 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = -\frac{\delta d}{L} \cos^2 \left(\frac{2\pi z_0}{L} \right) \quad (31)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 3 分: (1) (2) (3) 式各 1 分;

第 (2) 问 9 分: (6) (8) (9) (10) (11) (12) (13) 式各 1 分, (5) 式 2 分;

第 (3) 问 7 分: (14) (15) (17) (18) (19) 式各 1 分, (16) 式 2 分;

第 (4) 问 5 分: (20) (22) (23) 式各 1 分, (21) 式 2 分;

第 (5) 问 16 分: (28) (30) (31) 式各 1 分, (24) (25) (29) 式各 2 分, (27) 式 3 分, (26) 式 4 分。

二、(60 分) 原子系统中的交流 Stark 位移

一个简化的原子模型仅包含两个定态能级: 能量为 $E_g = 0$ 的基态 $|g\rangle$ 和能量为 $E_e = \hbar\omega_0$ 的激发态 $|e\rangle$, 其中 $\hbar$ 为约化普朗克常数。该原子系统的状态由含时的概率幅 $c_g(t)$ 和 $c_e(t)$ 描述, 它们满足归一化条件 $|c_g(t)|^2 + |c_e(t)|^2 = 1$ 。其时间演化规律由以下耦合方程组给出:

$$i\hbar \frac{dc_g(t)}{dt} = V_{ge}(t)c_e(t) \quad (1)$$

$$i\hbar \frac{dc_e(t)}{dt} = \hbar\omega_0 c_e(t) + V_{eg}(t)c_g(t) \quad (2)$$

其中 i 是虚数单位。

原子与一束频率为 ω 、电场强度为 $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ 的线偏振激光场相互作用。相互作用势 $V(t)$ 的矩阵元为 $V_{eg}(t) = V_{ge}^*(t) = -\mu E_0 \cos(\omega t)$, 其中 μ 为原子基态与激发态之间的电偶极跃迁矩阵元, 是一个实常数。定义拉比频率 $\Omega_R = \mu E_0 / \hbar$ 和失谐量 $\Delta = \omega - \omega_0$ 。

(1) 为了简化方程组, 我们引入新的变量 $\tilde{c}_g(t)$ 和 $\tilde{c}_e(t)$, 变换关系为:

$$c_g(t) = \tilde{c}_g(t), \quad c_e(t) = \tilde{c}_e(t)e^{-i\omega t} \quad (3)$$

这种变换相当于进入一个以频率 ω 旋转的参考系。将式 (3) 代入式 (1) 和 (2), 推导关于 $\tilde{c}_g(t)$ 和 $\tilde{c}_e(t)$ 的新的微分方程组。在推导中, 应用“旋转波近似”, 即忽略所有含 $e^{\pm i2\omega t}$ 的高频振荡项。

(2) 在旋转波近似下, 系统在旋转系中的演化可以由一个不含时的有效哈密顿量矩阵 $\mathbf{H}_{rot}$ 描述, 方程组可写作 $i\hbar \frac{d}{dt} \vec{\psi}(t) = \mathbf{H}_{rot} \vec{\psi}(t)$, 其中 $\vec{\psi}(t) = (\tilde{c}_g(t), \tilde{c}_e(t))^T$ 。

(2.1) 写出矩阵 $\mathbf{H}_{rot}$, 并求出其本征值 $\mathcal{E}_{\pm}$ 。这些本征值代表了光场“缀饰”下原子的新能级, 称为缀饰态能量。

(2.2) 在远失谐极限下 ($|\Delta| \gg \Omega_R$), 缀饰态能级可以近似为对原有能级的微小移动, 即 AC 斯塔克位移。通过对 $\mathcal{E}_{\pm}$ 进行展开, 求基态和激发态的能量位移 δE_g 和 δE_e 。要求结果保留到 Ω_R^2/Δ 的量级。(提示: 当 $\Omega_R \rightarrow 0$ 时, 缀饰态能级应退化为旋转系中的原子能级。需要根据 Δ 的符号判断哪个本征值对应于基态。)

(3) 考虑共振情况 ($\Delta = 0$)。若原子在 $t = 0$ 时刻处于基态, 即 $c_g(0) = 1, c_e(0) = 0$ 。求解在 (1) 中得到的方程组, 得到 $\tilde{c}_g(t)$ 和 $\tilde{c}_e(t)$ 的表达式。进一步计算原子处于激发态的概率 $P_e(t) = |c_e(t)|^2$ 。

(4) 实际原子中, 激发态会因自发辐射而衰变。这一效应可以通过在激发态能量中引入一个虚部来唯象地描述, 即 $E_e \rightarrow E_e - i\hbar\Gamma/2$, 其中 Γ 为自发辐射衰变率。此时, 你需要将你在第 (1) 问中得到的关于 $\frac{dc_e}{dt}$ 的方程进行修改, 使用 $\Delta + i\Gamma/2$ 替换 Δ , 而关于 $\tilde{c}_g$ 的方程不变。在远失谐且弱场驱动 ($|\Delta| \gg \Omega_R, \Gamma$) 的情况下, 激发态概率幅 $\tilde{c}_e$ 很小, 其变化可以认为被动地跟随基态概率幅 $\tilde{c}_g$ 的变化。这种“绝热消除”近似等效于假设整个系统以一个统一的慢变复频率 ϵ 演化, 即时间导数算符可被替换为 $\frac{d}{dt} \rightarrow -i\epsilon$ 。

(4.1) 在此近似下, 首先从修正后的 $\tilde{c}_e$ 方程中求出 $\tilde{c}_e$ 与 $\tilde{c}_g$ 的关系式。由于 ϵ 本身是小量, 在关系式的分母中可近似取 $\epsilon \approx 0$, 除此之外, 不做任何近似。

(4.2) 将此关系式代入 $\tilde{c}_g$ 的方程中, 得到一个形如 $i\frac{d\tilde{c}_g}{dt} = (\delta - i\gamma/2)\tilde{c}_g$ 的有效演化方程。求出有效能移 (AC 斯塔克位移) δ 和有效衰变率 (光子散射率) γ 的表达式。

解:

(1) 对 $c_g(t) = \tilde{c}_g(t)$ 求导代入式 (1):

$$i\hbar \frac{d\tilde{c}_g}{dt} = -\mu E_0 \cos(\omega t) \tilde{c}_e e^{-i\omega t} \quad (1)$$

利用 $\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ 和 $\Omega_R = \mu E_0/\hbar$:

$$i\frac{d\tilde{c}_g}{dt} = -\frac{\Omega_R}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \tilde{c}_e e^{-i\omega t} = -\frac{\Omega_R}{2} (1 + e^{-i2\omega t}) \tilde{c}_e \quad (2)$$

应用旋转波近似, 忽略 $e^{-i2\omega t}$ 项, 得到 $\tilde{c}_g$ 的方程:

$$i\frac{d\tilde{c}_g}{dt} = -\frac{\Omega_R}{2} \tilde{c}_e \quad (3)$$

对 $c_e(t) = \tilde{c}_e(t)e^{-i\omega t}$ 求导:

$$\frac{dc_e}{dt} = \frac{d\tilde{c}_e}{dt} e^{-i\omega t} - i\omega \tilde{c}_e e^{-i\omega t} \quad (4)$$

代入式 (2):

$$i\hbar \left(\frac{d\tilde{c}_e}{dt} - i\omega \tilde{c}_e \right) e^{-i\omega t} = \hbar\omega_0 \tilde{c}_e e^{-i\omega t} - \mu E_0 \cos(\omega t) \tilde{c}_g \quad (5)$$

整理并除以 $\hbar e^{-i\omega t}$:

$$i\frac{d\tilde{c}_e}{dt} + \omega \tilde{c}_e = \omega_0 \tilde{c}_e - \frac{\Omega_R}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) e^{i\omega t} \tilde{c}_g = \omega_0 \tilde{c}_e - \frac{\Omega_R}{2} (e^{i2\omega t} + 1) \tilde{c}_g \quad (6)$$

移项并应用旋转波近似, 忽略 $e^{i2\omega t}$ 项, 利用 $\Delta = \omega - \omega_0$:

$$i\frac{d\tilde{c}_e}{dt} = (\omega_0 - \omega) \tilde{c}_e - \frac{\Omega_R}{2} \tilde{c}_g = -\Delta \tilde{c}_e - \frac{\Omega_R}{2} \tilde{c}_g \quad (7)$$

(2) (2.1) 根据 (1) 中得到的方程组, 可写出矩阵形式 $i\frac{d}{dt} \vec{\psi}(t) = (\mathbf{H}_{rot}/\hbar) \vec{\psi}(t)$ 。为了得到以能量为单位的哈密顿量矩阵, 我们将方程乘以 $\hbar$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{c}_g \\ \tilde{c}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\hbar\Omega_R/2 \\ -\hbar\Omega_R/2 & -\hbar\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_g \\ \tilde{c}_e \end{pmatrix} \quad (8)$$

所以有效哈密顿量矩阵为:

$$\mathbf{H}_{rot} = \begin{pmatrix} 0 & -\hbar\Omega_R/2 \\ -\hbar\Omega_R/2 & -\hbar\Delta \end{pmatrix} \quad (9)$$

求解其本征值 $\mathcal{E}$:

$$\det(\mathbf{H}_{rot} - \mathcal{E}\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\mathcal{E} & -\hbar\Omega_R/2 \\ -\hbar\Omega_R/2 & -\hbar\Delta - \mathcal{E} \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

$$\mathcal{E}(\mathcal{E} + \hbar\Delta) - \frac{\hbar^2\Omega_R^2}{4} = 0 \implies \mathcal{E}^2 + \hbar\Delta\mathcal{E} - \frac{\hbar^2\Omega_R^2}{4} = 0 \quad (11)$$

解得本征值为:

$$\mathcal{E}_{\pm} = \frac{-\hbar\Delta \pm \sqrt{(\hbar\Delta)^2 + \hbar^2\Omega_R^2}}{2} = \frac{\hbar}{2}(-\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}) \quad (12)$$

(2.2) 在旋转系中, 未受扰动的基态和激发态能量分别为 0 和 $-\hbar\Delta$ 。当 $\Omega_R \rightarrow 0$ 时, 各本征值的渐近行为及能级对应关系为:

$$\begin{cases} \Delta > 0: & \mathcal{E}_+ \rightarrow 0 \text{ (基态)}, \quad \mathcal{E}_- \rightarrow -\hbar\Delta \text{ (激发态)} \\ \Delta < 0: & \mathcal{E}_+ \rightarrow -\hbar\Delta \text{ (激发态)}, \quad \mathcal{E}_- \rightarrow 0 \text{ (基态)} \end{cases} \quad (13)$$

能量位移是缀饰态能量与未受扰动能量之差。基态能量位移 δE_g 的精确表达式为:

$$\delta E_g = \begin{cases} \mathcal{E}_+ - 0 = \frac{\hbar}{2}(-\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}), & (\Delta > 0) \\ \mathcal{E}_- - 0 = \frac{\hbar}{2}(-\Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}), & (\Delta < 0) \end{cases} \quad (14)$$

由远失谐条件 $|\Delta| \gg \Omega_R$, 利用 $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$ 展开:

$$\sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2} = |\Delta| \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_R}{\Delta}\right)^2} \approx |\Delta| \left(1 + \frac{\Omega_R^2}{2\Delta^2}\right)$$

代入 δE_g 表达式得出近似结果:

$$\delta E_g \approx \begin{cases} \frac{\hbar}{2} \left[-\Delta + \Delta \left(1 + \frac{\Omega_R^2}{2\Delta^2}\right) \right] = \frac{\hbar\Omega_R^2}{4\Delta}, & (\Delta > 0) \\ \frac{\hbar}{2} \left[-\Delta - (-\Delta) \left(1 + \frac{\Omega_R^2}{2\Delta^2}\right) \right] = \frac{\hbar\Omega_R^2}{4\Delta}, & (\Delta < 0) \end{cases} \quad (15)$$

可见两种情况结果形式一致, 综合得到基态能量位移:

$$\delta E_g = \frac{\hbar\Omega_R^2}{4\Delta} \quad (16)$$

类似地, 激发态能量位移 δE_e :

$$\delta E_e = \begin{cases} \mathcal{E}_- - (-\hbar\Delta) = \frac{\hbar}{2}(\Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}) \approx -\frac{\hbar\Omega_R^2}{4\Delta}, & (\Delta > 0) \\ \mathcal{E}_+ - (-\hbar\Delta) = \frac{\hbar}{2}(\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega_R^2}) \approx -\frac{\hbar\Omega_R^2}{4\Delta}, & (\Delta < 0) \end{cases} \quad (17)$$

综合得到激发态能量位移:

$$\delta E_e = -\frac{\hbar\Omega_R^2}{4\Delta} \quad (18)$$

(3) 当 $\Delta = 0$ 时, 方程组为:

$$i\frac{d\tilde{c}_g}{dt} = -\frac{\Omega_R}{2}\tilde{c}_e \quad (19)$$

$$i\frac{d\tilde{c}_e}{dt} = -\frac{\Omega_R}{2}\tilde{c}_g \quad (20)$$

对第一个方程求导，并代入第二个方程：

$$i \frac{d^2 \tilde{c}_g}{dt^2} = -\frac{\Omega_R}{2} \frac{d\tilde{c}_e}{dt} = -\frac{\Omega_R}{2} \left[\frac{1}{i} \left(-\frac{\Omega_R}{2} \tilde{c}_g \right) \right] = -i \left(\frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \tilde{c}_g \quad (21)$$

两边同乘 i 得到二阶常微分方程：

$$\frac{d^2 \tilde{c}_g}{dt^2} + \left(\frac{\Omega_R}{2} \right)^2 \tilde{c}_g = 0 \quad (22)$$

其通解为 $\tilde{c}_g(t) = A \cos(\frac{\Omega_R}{2}t) + B \sin(\frac{\Omega_R}{2}t)$ 。初始条件 $c_g(0) = 1, c_e(0) = 0$ 意味着 $\tilde{c}_g(0) = 1, \tilde{c}_e(0) = 0$ 。由 $\tilde{c}_g(0) = 1$ 得 $A = 1$ 。从 $i \frac{d\tilde{c}_g}{dt} = -\frac{\Omega_R}{2} \tilde{c}_e$ 和 $\tilde{c}_e(0) = 0$ 可知 $\frac{d\tilde{c}_g}{dt}|_{t=0} = 0$ 。代入通解求导式，在 $t = 0$ 时可得 $B = 0$ 。因此，概率幅为：

$$\tilde{c}_g(t) = \cos\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \quad (23)$$

将 $\tilde{c}_g(t)$ 代入 $i \frac{d\tilde{c}_e}{dt} = -\frac{\Omega_R}{2} \tilde{c}_g$ 并积分可得：

$$\tilde{c}_e(t) = i \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \quad (24)$$

激发态概率为：

$$P_e(t) = |c_e(t)|^2 = |\tilde{c}_e(t)e^{-i\omega t}|^2 = |\tilde{c}_e(t)|^2 = \left| i \sin\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \right|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_R}{2}t\right) \quad (25)$$

(4) (4.1) 将 $\frac{d}{dt} \rightarrow -i\epsilon$ 代入由第 (4) 问修正后的 $\tilde{c}_e$ 方程：

$$i(-i\epsilon)\tilde{c}_e = (-\Delta - i\Gamma/2)\tilde{c}_e - \frac{\Omega_R}{2}\tilde{c}_g \quad (26)$$

整理得：

$$(\epsilon + \Delta + i\Gamma/2)\tilde{c}_e = -\frac{\Omega_R}{2}\tilde{c}_g \quad (27)$$

在分母中应用近似 $\epsilon \approx 0$ ：

$$\tilde{c}_e \approx -\frac{\Omega_R/2}{\Delta + i\Gamma/2}\tilde{c}_g \quad (28)$$

(4.2) 将上述关系式代入 $\tilde{c}_g$ 的方程 $i \frac{d\tilde{c}_g}{dt} = -\frac{\Omega_R}{2}\tilde{c}_e$ ：

$$i \frac{d\tilde{c}_g}{dt} = -\frac{\Omega_R}{2} \left(\frac{-\Omega_R/2}{\Delta + i\Gamma/2} \right) \tilde{c}_g = \frac{\Omega_R^2/4}{\Delta + i\Gamma/2} \tilde{c}_g \quad (29)$$

对复数分式进行有理化：

$$\frac{\Omega_R^2/4}{\Delta + i\Gamma/2} = \frac{(\Omega_R^2/4)(\Delta - i\Gamma/2)}{\Delta^2 + (\Gamma/2)^2} = \frac{\Omega_R^2\Delta}{4(\Delta^2 + \Gamma^2/4)} - i \frac{\Omega_R^2\Gamma}{8(\Delta^2 + \Gamma^2/4)} \quad (30)$$

代回方程：

$$i \frac{d\tilde{c}_g}{dt} = \left(\frac{\Omega_R^2\Delta}{4(\Delta^2 + \Gamma^2/4)} - i \frac{\Omega_R^2\Gamma}{8(\Delta^2 + \Gamma^2/4)} \right) \tilde{c}_g \quad (31)$$

与目标形式 $i \frac{d\tilde{c}_g}{dt} = (\delta - i\gamma/2)\tilde{c}_g$ 比较实部和虚部，可得有效能移 δ ：

$$\delta = \frac{\Omega_R^2\Delta}{4(\Delta^2 + \Gamma^2/4)} \quad (32)$$

有效衰变率 γ ：

$$\gamma = \frac{\Omega_R^2 \Gamma}{4(\Delta^2 + \Gamma^2/4)} \quad (33)$$

评分标准：本题满分 60 分。

第 (1) 问 15 分：(1) (2) (4) (5) (6) (7) 式各 2 分，(3) 式 3 分；

第 (2) 问 20 分：

第 (2.1) 问 10 分：(8) (9) (11) 式各 2 分，(12) 式 4 分；

第 (2.2) 问 10 分：(16) (17) (18) 式各 1 分，(14) (15) 式各 2 分，(13) 式 3 分；

第 (3) 问 15 分：(24) 式 1 分，(22) (23) (25) 式各 2 分，(21) 式 3 分，得到二阶微分方程并写出通解 2 分，使用初值条件确定待定系数 3 分；

第 (4) 问 10 分：

第 (4.1) 问 4 分：(26) (27) 式各 1 分，(28) 式 2 分；

第 (4.2) 问 6 分：(30) (33) 式各 1 分，(29) (32) 式各 2 分。

三、(40 分) 刚体题

如图，两个半径为 R 、质量为 m 的圆形匀质薄板，边缘方程分别为：

$$O_1: \begin{cases} x^2 + (y+R)^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}, \quad O_2: \begin{cases} (y-R)^2 + z^2 = R^2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

两个薄板边缘固连，整体构成一个刚体。现将刚体放置于地面，记刚体与地面的接触点分别为：

$$A: (R \sin \theta, -R(1 + \cos \theta), 0), \quad B: (0, R(1 - \cos \varphi), -R \sin \varphi)$$

其中， $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ， $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ 。假设刚体与地面之间无相对滑动，已知重力加速度大小为 g 。

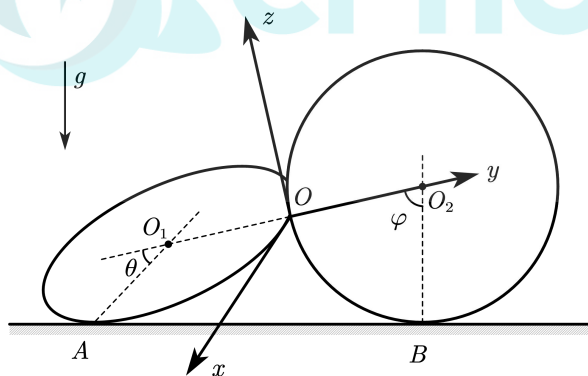


图 3.1: 系统示意图

(1) 在图示坐标系中，显然 $Oxyz$ 是刚体的主轴坐标系，求出主转动惯量 I_x 、 I_y 、 I_z 。

(2) 此刚体的运动只有 1 个自由度，记其重力势能 $V(\theta) = mgRv(\theta)$ ，零点取为地面。求出函数 $v(\theta)$ 的表达式。

提示：设题述坐标系中的地面法向量 $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ 。

(3) 记地面系刚体的动能为 $T = mR^2 \dot{\theta}^2 t(\theta)$ ，求出 $t(0)$ 的值。

提示：利用 $\vec{n}$ 在题述坐标系下的变化率反推刚体在地面系下的转动角速度。

(4) 求 $\theta = 0$ 附近刚体的微振动角频率。

解：

(1) 容易得到：

$$I_x = I_z = \frac{11}{4}mR^2, \quad I_y = \frac{1}{2}mR^2 \quad (1)$$

(2)

(解法一) 设地面的平面方程为 $S: \alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$, 其中 (α, β, γ) 为地面的单位法向量, $d > 0$ 。由于 S 与 O_1 相切, 故联立 S 与 O_1 后, 方程有唯一解, 即下面的方程有唯一解:

$$\left(\frac{\beta y + d}{\alpha}\right)^2 + (y + R)^2 = R^2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2)y^2 + 2(\alpha^2 R + \beta d)y + d^2 = 0 \quad (3)$$

一元二次方程有唯一解的条件为判别式为零, 即:

$$\Delta = 4(\alpha^2 R + \beta d)^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2)d^2 = 0 \quad (4)$$

整理得:

$$\alpha^2 R^2 + 2\beta R d - d^2 = 0 \quad (5)$$

由于 S 与 O_2 也相切, 用同样的方法可得:

$$\gamma^2 R^2 - 2\beta R d - d^2 = 0 \quad (6)$$

将(5)与(6)两式相加, 并利用 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, 可得:

$$(1 - \beta^2)R^2 = 2d^2 \quad (7)$$

由于 A 点在平面 S 上, 有:

$$\alpha R \sin \theta - \beta R(1 + \cos \theta) + d = 0 \quad (8)$$

$$\Rightarrow d \tan^2 \frac{\theta}{2} + 2\alpha R \tan \frac{\theta}{2} + d - 2\beta R = 0 \quad (9)$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\theta}{2} = \frac{-\alpha R \pm \sqrt{\alpha^2 R^2 - d^2 + 2\beta R d}}{d} = -\frac{\alpha R}{d} \quad (10)$$

其中, 最后一步利用了(5)。再代入(5)消去 α , 并利用(7)消去 β , 整理得:

$$d = R \frac{1 + \cos \theta}{\sqrt{3 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta + 2}} \quad (11)$$

重力势能为 $V = 2mgd$, 所以:

$$v(\theta) = \frac{2 + 2 \cos \theta}{\sqrt{3 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta + 2}} \quad (12)$$

(解法二) 法向量等仍如前一解法所设。由于圆 O_1 与地面相切于点 A , 故圆在该点的切向量 $\vec{t}$ 也在地面上, 则 $\vec{t}$ 与地面法向量 $\vec{n}$ 垂直。又由于 $\vec{t}$ 与 $\overrightarrow{O_1 A} = R(\sin \theta, -\cos \theta, 0)$ 垂直, 将 $\vec{n}$ 投影到圆 O_1 平面后, 其方向应与 $\overrightarrow{O_1 A}$ 共线, 所以可以写出:

$$\alpha = -\lambda \sin \theta, \quad \beta = \lambda \cos \theta, \quad (\lambda \equiv \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \quad (2^*)$$

向量 $\overrightarrow{AO} = R(-\sin \theta, 1 + \cos \theta, 0)$ 在 $\vec{n}$ 方向的投影就是 d , 则:

$$d = R(-\sin \theta, 1 + \cos \theta, 0) \cdot (-\lambda \sin \theta, \lambda \cos \theta, \gamma) = \lambda R(1 + \cos \theta) \quad (3^*)$$

联立圆 O_2 与地面的方程得:

$$\left(\frac{\beta y + d}{\gamma}\right)^2 + (y - R)^2 = R^2 \quad (4^*)$$

$$\Rightarrow (\beta^2 + \gamma^2)y^2 + 2(\beta d - \gamma^2 R)y + d^2 = 0 \quad (5^*)$$

相切对应其判别式为零:

$$\Delta = 4(\beta d - \gamma^2 R)^2 - 4(\beta^2 + \gamma^2)d^2 = 0 \quad (6^*)$$

$$\Rightarrow \gamma^2 R^2 - 2\beta R d - d^2 = 0 \quad (7^*)$$

将(2*)(3*)以及 $\gamma^2 = 1 - \lambda^2$ 代入(7*)可解得:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta + 2}} \quad (8^*)$$

进而由 $V = mg dv(\theta) = 2mgd$ 可以得出:

$$v(\theta) = \frac{2 + 2 \cos \theta}{\sqrt{3 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta + 2}} \quad (9^*)$$

(3) 由(6)(7)(10)(11)可以得出:

$$\vec{n} = \left(\frac{-\sin \theta}{\sqrt{3 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta + 2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{3 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta + 2}}, \frac{\sqrt{3 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta + 1}}{\sqrt{3 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta + 2}} \right) \quad (13)$$

在刚体固连的坐标系中, 地面的角速度为 $\vec{\omega}' = \vec{n} \times \frac{d'\vec{n}}{d't} + \Omega \vec{n}$, 其中 Ω 待定, $\frac{d'}{d't}$ 是刚体固连系中的时间变化率。由地面的约束可知, $\vec{\omega}$ 与 $\vec{AB}$ 同向, 故:

$$0 = \vec{\omega}' \times \vec{AB} = -\vec{n} \left(\frac{d'\vec{n}}{d't} \cdot \vec{AB} \right) + \Omega \vec{n} \times \vec{AB} \quad (14)$$

上式已经利用了 $\vec{n}$ 与 $\vec{AB}$ 垂直这一条件。由于 $\vec{n}$ 与 $\vec{n} \times \vec{AB}$ 互相垂直, 要使上式成立, 就必然有 $\Omega = 0$, 所以:

$$\vec{\omega}' = \vec{n} \times \frac{d'\vec{n}}{d't} \quad (15)$$

则在地面系中, 刚体的转动角速度为:

$$\vec{\omega} = -\vec{\omega}' = \frac{d'\vec{n}}{d't} \times \vec{n} = (\gamma\dot{\beta} - \beta\dot{\gamma}, \alpha\dot{\gamma} - \gamma\dot{\alpha}, \beta\dot{\alpha} - \alpha\dot{\beta}) \quad (16)$$

刚体的质心速度:

$$\vec{v}_c = \vec{\omega} \times d\vec{n} + d\dot{\vec{n}} \quad (17)$$

动能:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} 2m\vec{v}_c^2 + \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) \\ &= m\vec{v}_c^2 + \frac{1}{2} I_x \vec{\omega}^2 + \frac{1}{2} (I_y - I_x) \omega_y^2 \\ &= md^2 + m \left(d^2 + \frac{11}{8} R^2 \right) (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2) - \frac{9}{8} m R^2 (\alpha\dot{\gamma} - \gamma\dot{\alpha})^2 \end{aligned} \quad (18)$$

保留至 θ 的零阶, 可计算出各个导数:

$$\dot{\alpha} = -\frac{1}{3}\dot{\theta}, \quad \dot{\beta} = \dot{\gamma} = 0, \quad \dot{d} = 0 \quad (19)$$

将 α 、 β 、 γ 、 d 替换为 θ 即可得出:

$$t(0) = \frac{59}{648} \quad (20)$$

(4) 在 $\theta = 0$ 附近有:

$$v(\theta) = \frac{4}{3} + \frac{1}{27}\theta^2 + O(\theta^4) \quad (21)$$

$$E = \frac{4}{3} mgR + \frac{1}{27} mgR\theta^2 + \frac{59}{648} mR^2 \dot{\theta}^2 \quad (22)$$

由此可直接写出小振动角频率:

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{1}{27} mgR}{\frac{59}{648} mR^2}} = \sqrt{\frac{24g}{59R}} \quad (23)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 3 分：(1) 式 3 分；

第 (2) 问 15 分：(5) (8) 式各 1 分，(4) (6) (7) (10) (11) 式各 2 分，(12) 式 3 分；

解法二：(3*) (4*) (7*) 式各 2 分，(2*) (8*) (9*) 式各 3 分；

第 (3) 问 16 分：(17) 式 1 分，(13) (15) (16) (19) 式各 2 分，(18) 式 3 分，(20) 式 4 分；

第 (4) 问 6 分：(21) (22) (23) 式各 2 分。

四、(45 分) 微环谐振腔

本题分析微环谐振腔的工作原理。微环谐振腔是一种能在小体积内高效率工作的谐振腔，其本体为一个环状结构光纤，光由入射光纤导入系统，在环边通过很小的耦合区耦合到环内，在环中干涉后于同一点或另一点耦合到出射光纤内。

考虑下图的微环谐振腔构型，系统可视为在 z 方向无限均匀延伸，外部无穷大介质相对介电常数与相对磁导率为 ε_1, μ_1 ，光纤材料的相对介电常数与相对磁导率为 ε_2, μ_2 ，环内外半径为 r_1, r_2 ，两根光纤厚度均为 d 且相互平行，耦合区光纤与环的最近距离为 a ，有 $\frac{a}{r_2}, \frac{d}{r_2} \ll 1$ ， $\frac{r_2 - r_1}{r_2} \ll 1$ ，即将环近似视为直线。入射端为左上与右下，入射振幅为 A_1, B_2 ，出射端为右上和左下，出射振幅为 A_2, B_1 ，环内上方耦合区的入射与出射振幅为 C_1, C_2 ，下方耦合区的入射与出射振幅为 D_2, D_1 。建立坐标系方向如图。

注：振幅为 A 的含义为，在该处光纤中线上的电场大小可以表示为 $E = Ae^{i(xk_x - \omega t)}$ ， k_x 为波矢。容易得到，为了使得谐振腔正常工作，应有 $\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} k_0 < k_x < \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} k_0$ 。

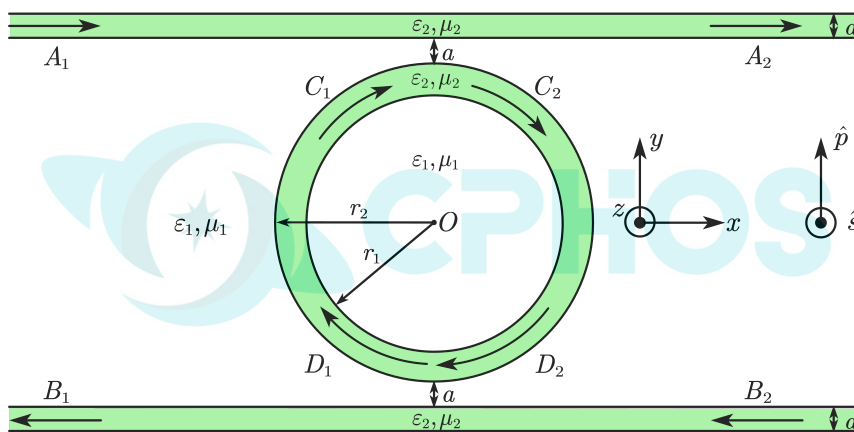


图 4.1: 微环谐振腔

(1) 本问分析无穷远与耦合区的稳定模式。入射光为真空波长 λ 的单色光，令 $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ 。

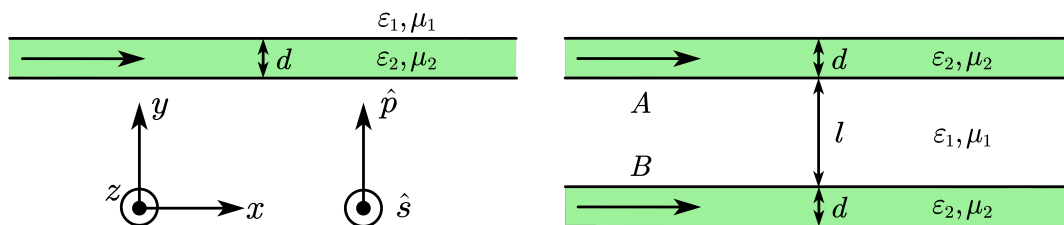


图 4.2: 两种波导构型

(1.1) 如下图 4.2 左，该构型为处于无限大介质中的单根无限长直光纤，以其对称面为 xy 平面，光线传播方向为 x 轴正向。

(1.2) 如下图 4.2 右，该构型为处于无限大介质中两根相距为 l 的无限长直光纤，以其对称面为 xy 平面，光线传播方向为 x 轴正向。

对这两种构型，写出电场的亥姆霍兹方程，求其中可能稳定传播的所有 TE ($E_x = 0$)

模式。只需求出用于求解 k_x 的方程, 并使用 $k = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 k_0^2 - k_x^2}$, $\beta = \sqrt{k_x^2 - \varepsilon_1 \mu_1 k_0^2}$ 化简你的结果。并对每种模式讨论: 是偶模式 (场分布关于 $z = 0$ 对称) 还是奇模式 (场分布关于 $z = 0$ 反对称)? 提示: 必为两者之一。

(1.3) 给出模式匹配条件, 即使得直光纤与环状光纤中同时传播同种奇偶、波长相同的模式时, 两者波矢相等的条件。

(2) 本问分析耦合区。假设耦合区可以视作图 4.2 的构型, 即近似认为耦合区中两光纤平行, 光始终为 TE 模式, 其中波矢与耦合区外相同。

(2.1) 给定耦合矩阵 $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$, 使得 $\begin{pmatrix} A_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} B_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} B_2 \\ D_2 \end{pmatrix}$ 。

假设耦合过程没有能量损耗, 证明 $\mathcal{M}$ 可以写成 $\mathcal{M} = e^{i\varphi_1} \begin{pmatrix} \kappa & i\alpha \\ i\alpha & \kappa \end{pmatrix}$ 的形式, 其中 κ, α 均为实数, 且有 $\kappa^2 + \alpha^2 = 1$ 。

(2.2) 假设两光纤中的光在耦合区外均为 (1.1) 中求出的某个偶模式, 其波矢为 k_{x0} 。在耦合区内, 利用亥姆霍兹方程, 对 (1.2) 中求出的奇、偶模式进行修正, 将实际电场视为两个修正模式的叠加, 求出耦合区内两光纤中振幅 $A(z), B(z)$ 满足的微分方程。认为 $e^{\beta a} \gg 1$, $\frac{A''}{k_x A}, \frac{B''}{k_x B} \ll 1$ 。保留最低阶非零近似, 结果中可以包含 $\beta = \beta(k_{x0})$ 和

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial k_x} \left[\frac{(\beta \mu_2 \tan \frac{kd}{2} + k \mu_1)(\beta \mu_2 - k \mu_1 \tan \frac{kd}{2})}{(\beta^2 \mu_2^2 + k^2 \mu_1^2) \tan \frac{kd}{2}} \right] \Bigg|_{k_x = k_{x0}}$$

。(2.3) 做近似 $l(x) \approx a + \frac{x^2}{2r_2}$, 求出 α, φ_1 。

(3) 本问讨论谐振腔的工作, 可以认为 κ 已知, 且 $1 - \kappa \ll 1$ 。为简便, 取近似 $\frac{kd}{2} \ll 1$ 。

(3.1) 在 $B_2 = 0$ 时, 求出 A_2, B_1 。

(3.2) 定义谐振频率 ω_0 为使得透射率 $\frac{B_1}{A_1}$ 取极大值的频率, 谐振峰半高全宽 $\Delta\omega$ 为在同一谐振频率两侧, 使得透射功率等于其极大值一半的两个频率之差, 试求出品质因数 $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ 。答案可以包含一个任意整数 n , 无需给出其取值范围。

提示, 你可能会用到以下公式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

解:

(1) (1.1) 亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 \vec{E} + n^2 k_0^2 \vec{E} = 0 \quad (1)$$

若 $\vec{E} \parallel \hat{p}$, 由

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

由切向 H 连续和法向 D 连续可得边界条件

$$\begin{cases} \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 \\ E_1 / \mu_1 = E_2 / \mu_2 \end{cases}$$

故不存在 p 模式。

若 $\vec{E} \parallel \hat{s}$, 由切向 E 连续和切向 H 连续, 可得边界条件

$$\begin{cases} E_1 = E_2 \\ \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E}{\partial n} \Big|_1 = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial E}{\partial n} \Big|_2 \end{cases} \quad (3)$$

由亥姆霍兹方程可得试探解

$$E(z) = \begin{cases} Ae^{-\beta(z-\frac{d}{2})}, & z > \frac{d}{2} \\ B \sin kz + C \cos kz, & -\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2} \\ De^{\beta(z+\frac{d}{2})}, & z < -\frac{d}{2} \end{cases} \quad (4)$$

应用边界条件得

$$\begin{cases} A = B \sin \frac{kd}{2} + C \cos \frac{kd}{2} \\ -\beta\mu_2 A = k\mu_1 (B \cos \frac{kd}{2} - C \sin \frac{kd}{2}) \\ D = -B \sin \frac{kd}{2} + C \cos \frac{kd}{2} \\ \beta\mu_2 D = k\mu_1 (B \cos \frac{kd}{2} + C \sin \frac{kd}{2}) \end{cases} \quad (5)$$

该线性方程组存在非零解的条件为:

$$\begin{cases} C = 0 \\ \tan \frac{kd}{2} = -\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{k}{\beta} \end{cases} \quad (\text{奇模式}) \quad \text{或} \quad \begin{cases} B = 0 \\ \tan \frac{kd}{2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\beta}{k} \end{cases} \quad (\text{偶模式}) \quad (6)$$

(1.2) 同理, 不存在 TEM 模式, 只分析 $\vec{E} \parallel \hat{s}$ 情况。容易看出, 只存在奇、偶两种模式。首先分析奇模式。

$$E(z) = \begin{cases} Ae^{-\beta(z-d-\frac{l}{2})}, & z > d + \frac{l}{2} \\ B \sin k(z - \frac{l+d}{2}) + C \cos k(z - \frac{l+d}{2}), & \frac{l}{2} < z < d + \frac{l}{2} \\ D \sinh \beta z, & -\frac{l}{2} < z < \frac{l}{2} \\ B \sin k(z + \frac{l+d}{2}) - C \cos k(z + \frac{l+d}{2}), & -d - \frac{l}{2} < z < -\frac{l}{2} \\ -Ae^{\beta(z+d+\frac{l}{2})}, & z < -d - \frac{l}{2} \end{cases} \quad (7)$$

应用边界条件得

$$\begin{cases} A = B \sin \frac{kd}{2} + C \cos \frac{kd}{2} \\ -\beta\mu_2 A = k\mu_1 (B \cos \frac{kd}{2} - C \sin \frac{kd}{2}) \\ D \sinh \frac{\beta l}{2} = -B \sin \frac{kd}{2} + C \cos \frac{kd}{2} \\ \beta\mu_2 D \cosh \frac{\beta l}{2} = k\mu_1 (B \cos \frac{kd}{2} + C \sin \frac{kd}{2}) \end{cases} \quad (8)$$

有非零解的条件为:

$$e^{\beta l} \frac{(\beta\mu_2 \tan \frac{kd}{2} + k\mu_1)(\beta\mu_2 - k\mu_1 \tan \frac{kd}{2})}{(\beta^2\mu_2^2 + k^2\mu_1^2) \tan \frac{kd}{2}} = -1 \quad (9)$$

同理, 可得对于偶模式, 有非零解的条件为:

$$e^{\beta l} \frac{(\beta\mu_2 \tan \frac{kd}{2} + k\mu_1)(\beta\mu_2 - k\mu_1 \tan \frac{kd}{2})}{(\beta^2\mu_2^2 + k^2\mu_1^2) \tan \frac{kd}{2}} = 1 \quad (10)$$

(1.3)

$$d = r_2 - r_1 \quad (11)$$

(2) (2.1)

(解法一) 由于体系线性, 故光功率存在如下的形式:

$$P = |A_1|^2 + |C_1|^2 + s \operatorname{Re}[A_1^* C_1] = |A_2|^2 + |C_2|^2 + s \operatorname{Re}[A_2^* C_2] \quad (12)$$

代入题给公式, 由 A_1, C_1 是任意复数, 得:

$$\begin{cases} |M_{11}|^2 + |M_{21}|^2 = |M_{12}|^2 + |M_{22}|^2 = 1 \\ M_{11}^* M_{22} + M_{21}^* M_{12} = 1 \\ M_{11}^* M_{21} \in i\mathbb{R} \\ M_{12}^* M_{22} \in i\mathbb{R} \end{cases} \quad (13)$$

得到

$$M = e^{i\varphi_1} \begin{pmatrix} \kappa & i\alpha \\ i\alpha & \kappa \end{pmatrix} \quad (14)$$

其中 $\kappa^2 + \alpha^2 = 1$ 。

(解法二) 利用对称性与时间反演不变性可以直接看出结论: ε, μ 为实常数时体系在 $t \rightarrow -t$ (振幅取复共轭、传播方向反向) 下不变, 耦合过程又无能量损耗, 故 M 是幺正矩阵; 由互易性 (时间反演不变性的推论) $M = M^T$, M 又是对称矩阵。而耦合区中两根光纤完全相同且关于中垂面 $z = 0$ 对称, 交换两光纤 $((A, C) \rightarrow (C, A))$ 是体系的对称操作, 故 $M_{11} = M_{22}$ 、 $M_{12} = M_{21}$, 即

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (15)$$

由幺正性, $|a|^2 + |b|^2 = 1$ 且 a^*b 为纯虚数, 即 b 与 a 只差一个纯虚因子: 把公共相位记为 $e^{i\varphi_1}$, 则 $a = \kappa e^{i\varphi_1}$ 、 $b = i\alpha e^{i\varphi_1}$ (κ, α 为实数), 于是

$$M = e^{i\varphi_1} \begin{pmatrix} \kappa & i\alpha \\ i\alpha & \kappa \end{pmatrix}, \quad \kappa^2 + \alpha^2 = 1. \quad (16)$$

(2.2) 令 k_{x0} 为实际光波的波矢, k_x 为耦合区内波矢方程的解。欲使亥姆霍兹方程成立, 此处应有:

$$-k_{x0}^2 E = -k_x^2 E + 2ik_x \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad (17)$$

近似得到:

$$2ik_x \frac{\partial E}{\partial x} = 2k_x(k_x - k_{x0})E \quad (18)$$

代入奇、偶模式的波矢方程, 得到:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \mp i \frac{e^{-\beta l}}{\frac{\partial}{\partial k_x} \left[\frac{(\beta \mu_2 \tan \frac{k_d}{2} + k \mu_1)(\beta \mu_2 - k \mu_1 \tan \frac{k_d}{2})}{(\beta^2 \mu_2^2 + k^2 \mu_1^2) \tan \frac{k_d}{2}} \right]} \bigg|_{k_x=k_{x0}} E \quad (19)$$

其中, 负号对应偶模式, 正号对应奇模式。

对于 A, B, 分解为偶模式 $A_s = \frac{A+B}{2}$ 和奇模式 $A_{as} = \frac{A-B}{2}$ 。两者对应演化方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln(A+B)}{\partial x} = -i \frac{e^{-\beta l}}{\Delta} \\ \frac{\partial \ln(A-B)}{\partial x} = +i \frac{e^{-\beta l}}{\Delta} \end{cases} \quad (20)$$

(2.3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta l} dx = e^{-\beta a} \sqrt{\frac{2\pi r_2}{\beta}} \quad (21)$$

故

$$\begin{cases} A' + B' = e^{-i \frac{e^{-\beta a} \sqrt{\frac{2\pi r_2}{\beta}}}{\Delta}} (A + B) \\ A' - B' = e^{i \frac{e^{-\beta a} \sqrt{\frac{2\pi r_2}{\beta}}}{\Delta}} (A - B) \end{cases} \quad (22)$$

作和, 得到

$$\alpha = -\sin \frac{e^{-\beta a} \sqrt{\frac{2\pi r_2}{\beta}}}{\Delta}, \varphi_1 = 0 \quad (23)$$

(3) (3.1) 半周相移

$$\delta = \frac{\pi k_x(r_1 + r_2)}{2}$$

故环内半周往返的传输关系为

$$C_1 = C_2 \kappa e^{i\varphi_1} e^{2i\delta} \quad (24)$$

和

$$C_2 = e^{i\varphi_1} (\kappa C_1 + i\alpha A_1) \quad (25)$$

解得 (记 $\Phi = \delta + \varphi_1$)

$$C_1 = \frac{i\alpha \kappa e^{2i\Phi}}{1 - \kappa^2 e^{2i\Phi}} A_1 \quad (26)$$

故

$$A_2 = e^{i\varphi_1}(\kappa A_1 + i\alpha C_1) = e^{i\varphi_1} \frac{\kappa(1 - e^{2i\Phi})}{1 - \kappa^2 e^{2i\Phi}} A_1 \quad (27)$$

$$B_1 = e^{i\varphi_1} i\alpha e^{i\delta} C_2 = -\frac{1 - \kappa^2}{1 - \kappa^2 e^{2i\Phi}} e^{i(\Phi + \varphi_1)} A_1 \quad (28)$$

(3.2) 此时为偶模式，透射功率为（记 $\Phi = \delta + \varphi_1$ ）

$$\left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \frac{(1 - \kappa^2)^2}{(1 - \kappa^2)^2 + 4\kappa^2 \sin^2 \Phi} \quad (29)$$

因此谐振条件为

$$\sin \Phi = 0, \quad \text{即} \quad \delta + \varphi_1 = n\pi \quad (30)$$

即

$$k_x = \frac{2(n\pi - \varphi_1)}{\pi(r_1 + r_2)} = \frac{2\tilde{n}}{r_1 + r_2}, \quad \tilde{n} \equiv n - \frac{\varphi_1}{\pi} \quad (31)$$

色散关系：

$$\beta = \sqrt{k_x^2 - \varepsilon_1 \mu_1 k_0^2} = \frac{2}{d} \Rightarrow k_0 = \sqrt{\frac{k_x^2 - 4/d^2}{\varepsilon_1 \mu_1}} \quad (32)$$

微分得到

$$\Delta k_0 = \frac{k_x}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 \left(-\frac{4}{d^2} + k_x^2\right)}} \Delta k_x \quad (33)$$

当 $\frac{2\kappa}{1-\kappa^2} \sin \Phi = 1$ 时，即：

$$\sin \Phi = \frac{1 - \kappa^2}{2\kappa} \quad (34)$$

波矢展宽：

$$\Delta k_x = \frac{4 \frac{1-\kappa^2}{2\kappa}}{\pi(r_1 + r_2)} \quad (35)$$

则品质因数为

$$Q = \frac{k_0}{\Delta k_0} = \frac{-\frac{4}{d^2} + k_x^2}{k_x \Delta k_x} \quad (36)$$

$$Q = \frac{\pi\kappa \left[-\frac{(r_1+r_2)^2}{d^2} + \tilde{n}^2 \right]}{\tilde{n}(1-\kappa^2)}, \quad \tilde{n} = n - \frac{\varphi_1}{\pi} \quad (37)$$

评分标准：本题满分 45 分。

第 (1) 问 18 分：

第 (1.1) 问 8 分：(1) (3) (4) 式各 1 分，(5) (6) 式各 2 分，说明不存在 p（或 TEM）模式 1 分；

第 (1.2) 问 9 分：(7) (8) (9) 式各 2 分，(10) 式 3 分；

第 (1.3) 问 1 分：(11) 式 1 分；

第 (2) 问 16 分：

第 (2.1) 问 5 分：(12) (14) 式各 1 分，(13) 式 3 分；

解法二：(16) 式 2 分，(15) 式 3 分；

第 (2.2) 问 7 分：(19) 式 1 分，(17) (18) (20) 式各 2 分；

第 (2.3) 问 4 分：(21) (22) 式各 1 分，(23) 式 2 分；

第 (3) 问 11 分：

第 (3.1) 问 4 分：(24) (25) (27) (28) 式各 1 分；

第 (3.2) 问 7 分：(29) (31) (32) (33) (34) (35) (37) 式各 1 分。

五、(40 分) 自由活塞斯特林发电机

早在 1964 年, 俄亥俄大学 William Beale 在机械工程课上就构思出自由活塞概念, 并于 1971 年获美国专利, 1974 年 Beale 创办 Sunpower 公司, 专门推进这一技术。1980 年代之后, 自由活塞斯特林发电机开始在航天界大展身手, NASA 的空间电源演示计划验证了 25 kW 级“自由活塞+直线发电机”方案, 2018 年完成测试的 Kilopower/KRUSTY 空间核电源也采用斯特林转换器。作为一种闭式斯特林热机, 自由活塞斯特林发电机 (FPSE) 相比于传统斯特林热机, 去掉曲柄、连杆、飞轮和穿过外壳的旋转轴, 由动力活塞直接耦合一台直线发电机, 通过动磁体在线圈中往复运动产生电动势驱动负载工作。本题采用一简化模型来探讨自由活塞斯特林发电机工作的基本原理。

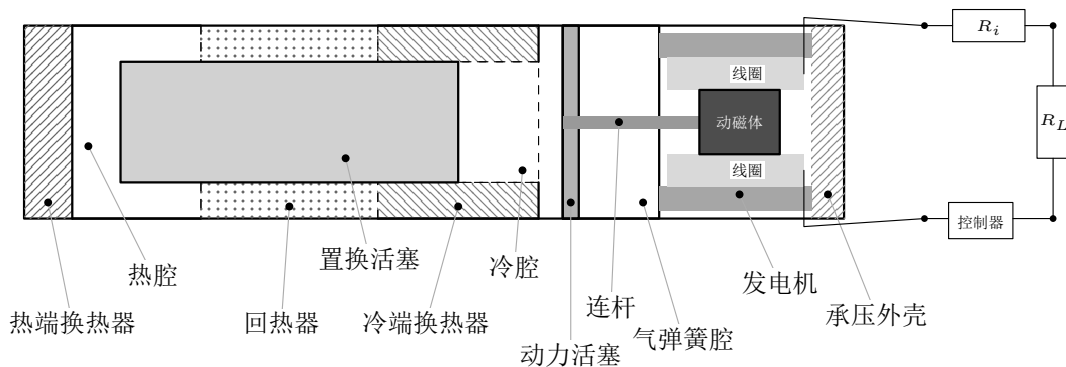


图 5.1: 自由活塞斯特林发电机结构示意图

图 6.1 展示了这种发电机的简化版结构。整个发电机主要由 3 个腔室, 1 个回热器, 2 个活塞和发电系统构成。腔室、回热器内均被气体填满, 所有气体可视为摩尔热容恒为 C_V 的理想气体。气体被动力活塞分为左右两个部分, 并且不可交换气体分子和热量。左侧的热腔、冷腔温度分别均匀且恒定为 $T_h, T_c (T_h > T_c)$ 并相互连通, 在两个活塞都处于原点时候, 容积分别为 V_h, V_c , 回热器的容积可忽略不计。左侧气体总量为 $n \text{ mol}$, 在横截面积为 A_d 的置换活塞的移动下, 一小部分气体等体积地从热腔经过回热器转移到冷腔。在转移过程中, 这部分气体在经过回热器时会被逐渐加热/降温至和目的地相同的温度。右侧气体全部在绝热的气弹簧腔内部, 且两个活塞都处于原点时动力活塞恰好受力平衡。横截面积为 A_b 的动力活塞和右侧发电系统的动磁体固连在一起做一维运动, 固连体质量为 m_b , 在运动速度为 v 时, 受到 $f_m = c_m v$ 的机械阻尼力, 在线圈中产生 $E = \alpha v$ 的电动势驱动负载 R_L 工作, 电路本身的内阻为 R_i 。理想气体常数为 R 。

以向右为正方向, 置换活塞和动力活塞相对原点的位移分别记为 x_d, x_b , 我们认为所有腔室内的气体都时刻保持平衡态。已知实际工程中, 置换活塞只在原点附近做小幅度简谐振动:

$$x_d(t) = X_d \cos(\omega t + \phi) \quad (1)$$

显然此时动力活塞 $x_b(t)$ 同样做小幅度简谐振动, 为了适应发电机特殊的构造, 我们设计的参数恰好使得动力活塞在运动过程中始终落后于置换活塞一个恒定的、和其他参数无关的相位差 $\psi > 0$ 。小振动的幅度足够小, 以至于 $|x_b A_b|, |x_d A_d|$ 远小于每个腔的容积。忽略气体弛豫时间和所有其他可能的机械阻力。

(1) 求出在一个工作周期 $T = 2\pi/\omega$ 内, 负载上的电能消耗 W_L 和左侧气体对动力活塞的做功 W_d 。

(2) 已知热腔、冷腔和外界的热交换全部通过热端和冷端换热器完成, 在整个工作周期中, 两个换热器都会经历吸热和放热阶段。求出一个工作周期内热腔换热器的净放热量 Q_d 。

(3) 我们定义此时的热机效率

$$\eta_d = \frac{W_d}{Q_d} \quad (2)$$

并定性解释结果的意义。

(4) 我们定义总效率

$$\eta_t = \frac{W_L}{Q_d} \quad (3)$$

分别计算使得总效率和负载耗电功率最大的负载大小 R_L^p, R_L^e 。

解:

(1) 由题意, 设动力活塞的振幅为 X_b 。因此可写出

$$x_b(t) = X_b \cos(\omega t + \phi - \psi) \quad (1)$$

其中 X_b 参数待定。在活塞移动之后, 由几何关系, 左侧热腔和冷腔的体积分别为

$$V'_h = V_h + A_d x_d, V'_c = V_c - A_d x_d + A_b x_b \quad (2)$$

左侧 n mol 气体满足理想气体状态方程:

$$n = \frac{pV'_c}{RT_c} + \frac{pV'_h}{RT_h} \quad (3)$$

由题意, 由于两个活塞振动是小振幅运动, 把压力 p 对 x_d, x_b 展开到一阶:

$$p(x_d, x_b) = \frac{nR}{\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_h}{T_h}} \left[1 + \frac{A_d(T_h - T_c)}{T_h V_c + T_c V_h} \cdot x_d - \frac{A_b T_h}{T_h V_c + T_c V_h} \cdot x_b + \dots \right] \quad (4)$$

又回路总功率为:

$$P = \frac{E^2}{R_i + R_L} = \frac{(\alpha \dot{x}_b)^2}{R_L + R_i} \quad (5)$$

因此, 线圈产生的磁场对固连体的反作用力为:

$$f_e = -\frac{P}{\dot{x}_b} = -\frac{\alpha^2 \dot{x}_b}{R_L + R_i} \quad (6)$$

考虑气弹簧腔内气体的绝热过程, 设动力活塞气压为 $p_b(x_b)$, 假设气弹簧腔的容积为 V_b , 同样将压力展开到一阶:

$$p_b(x_b) = p_b(0) - A_b \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right) \Big|_{V=V_b, p=p_b(0)} \cdot x_b + \dots \quad (7)$$

我们得到固连体的动力学方程:

$$m_b \ddot{x}_b = - \left(c_m + \frac{\alpha^2}{R_L + R_i} \right) \dot{x}_b + [p(x_d, x_b) - p_b(x_b)] A_b \quad (8)$$

由题意 $x_b = x_d = 0$ 时固连体受力平衡, 上述方程只剩一阶项, 因此动力学方程简化为标准受迫振动方程:

$$\ddot{x}_b + 2\beta \dot{x}_b + \Omega^2 x_b = q \cos(\omega t + \phi) \quad (9)$$

其中:

$$\beta = \frac{1}{2m_b} \left(c_m + \frac{\alpha^2}{R_L + R_i} \right), \quad q = \frac{nRA_d A_b T_c T_h (T_h - T_c) X_d}{m_b (T_h V_c + T_c V_h)^2} \quad (10)$$

且 Ω 为待定常数。其稳态解为:

$$x_b(t) = \frac{q}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos \left[\omega t + \phi - \arctan \left(\frac{2\beta \omega}{\Omega^2 - \omega^2} \right) \right] \quad (11)$$

由题意, 动力活塞落后于置换活塞的固定相位差即为:

$$\psi = \arctan \left(\frac{2\beta \omega}{\Omega^2 - \omega^2} \right) \quad (12)$$

由题意参数要求使得 $\psi > 0$, 因此我们这里默认 $\Omega > \omega$ 。代入(10)(11)式得到:

$$x_b(t) = \frac{nRA_d A_b T_c T_h (T_h - T_c) X_d \sin \psi}{\omega (c_m + \frac{\alpha^2}{R_L + R_i}) (T_h V_c + T_c V_h)^2} \cos(\omega t + \phi - \psi) \quad (13)$$

一个周期内，负载上的电能消耗为

$$W_L = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{\alpha^2 R_L}{(R_L + R_i)^2} \dot{x}_b^2 dt = \frac{\pi \alpha^2 R_L n^2 R^2 A_d^2 A_b^2 T_c^2 T_h^2 (T_h - T_c)^2 X_d^2 \sin^2 \psi}{\omega (R_L + R_i)^2 (c_m + \frac{\alpha^2}{R_L + R_i})^2 (T_c V_h + T_h V_c)^4} \quad (14)$$

左侧气体每周期对动力活塞做的功为：

$$W_d = \oint p_d(x_d, x_b) A_b dx_b = \frac{\pi n^2 R^2 A_d^2 A_b^2 T_c^2 T_h^2 (T_h - T_c)^2 X_d^2 \sin^2 \psi}{\omega (c_m + \frac{\alpha^2}{R_L + R_i})^2 (T_c V_h + T_h V_c)^4} \quad (15)$$

(2) 把热腔看成开系，其热力学方程为

$$dU = \delta Q - p dV + h dm \quad (16)$$

其中 h 为热腔边缘气体单位质量的焓。由于回热器进出热腔的气体温度都是 T_h ，单位质量的焓 $h = c_p T_h$ 是常数，净流入的质量也为零，所以焓流项互相抵消：

$$Q_h = \oint \delta Q_h = \oint p dV_h + \oint dU_h = \oint p dV_h \quad (17)$$

也就是说，热腔换热器向气体的净放热量等于热腔气体的净膨胀功。代入(2)式，得

$$Q_d = A_d \oint p(x_d, x_b) dx_d = \frac{\pi n^2 R^2 A_d^2 A_b^2 T_c^2 T_h^3 (T_h - T_c) X_d^2 \sin^2 \psi}{\omega (c_m + \frac{\alpha^2}{R_L + R_i})^2 (T_c V_h + T_h V_c)^4} \quad (18)$$

注意这里 Q_d 是净放热量：热腔换热器在半个周期内确实向气体放热，在另外半个周期内又从气体吸回一部分热量，两者相抵后剩下的才是(18)式。

(3) 由(15)(18)两式直接相除：

$$\eta_d = \frac{T_h - T_c}{T_h} = 1 - \frac{T_c}{T_h} \quad (19)$$

即气体循环的净效率恰好等于卡诺效率。这个结果说明：若热机的热交换只发生在 T_h 与 T_c 两个温度上，且理想回热器、准静态过程使循环内部可逆，因此卡诺定理必定保证效率为 $1 - T_c/T_h$ 。

(说明：题中已经说明两个换热器都会经历吸热和放热阶段，存在热回流。 Q_d 取的是环路净值，若改用总吸热量定义效率，则会低于卡诺效率。)

(4) 总效率为

$$\eta_t = \frac{W_L}{Q_d} = \left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right) \frac{\alpha^2 R_L}{(R_L + R_i) [\alpha^2 + c_m (R_L + R_i)]} \quad (20)$$

先求使负载耗电功率最大的负载。负载功率为：

$$P_i \propto W_L \propto \frac{R_L}{(R_L + R_i)^2 \left(c_m + \frac{\alpha^2}{R_L + R_i}\right)^2} = \frac{R_L}{[c_m (R_L + R_i) + \alpha^2]^2} \quad (21)$$

对 R_L 求极值： $\frac{d}{dR_L} \ln P_L = 0$ ，得到：

$$R_L^p = R_i + \frac{\alpha^2}{c_m} \quad (22)$$

再对(20)式求极值得到：

$$R_L^e = \sqrt{R_i^2 + \frac{R_i \alpha^2}{c_m}} \quad (23)$$

比较两个结果： $R_L^p > R_L^e$ ，即“功率最大”和“效率最大”不是同一个负载。功率最大点把更多能量耗散在机械阻尼和内阻上，所以工程上通常不选功率最大点。

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 22 分: (3) (9) (12) 式各 1 分, (2) (4) (6) 式各 2 分, (13) (14) (15) 式各 3 分, (10) 式 4 分;

第 (2) 问 7 分: (18) 式 3 分, (17) 式 4 分;

第 (3) 问 5 分: (19) 式 2 分, 结果意义的定性解释 3 分;

第 (4) 问 6 分: (20) (22) (23) 式各 2 分。

六、(50 分) 带电粒子在偶极子场中的运动

如图所示, 现有一固定的均匀极化介质球, 其在球外产生的场可视为由固定在球心的同方向的电偶极子与磁偶极子产生的场, 等效电偶极矩为 p , 磁偶极矩为 m 。取两者共同指向为极轴, 建立球坐标系。真空介电常数为 ϵ_0 , 真空磁导率为 μ_0 。

(1) 考虑一带电量为 q , 质量为 M 的带电粒子在球产生的场中的运动。设粒子坐标为 r, θ, φ , 求出粒子运动时的两个独立的守恒量。用 r, θ, φ 及其对时间的一阶导数表示。

提示: 可以考虑沿极轴方向的角动量。

(2) 现在考虑磁偶极子的场远弱于电偶极子的场的情况, 即可以认为在粒子运动过程中, 洛伦兹力始终远小于电场力。考虑具有荷质比 γ 的粒子从无穷远处入射, 其在无穷远处的速度为 v_0 , 瞄准距离为 b , 入射方向沿极轴负方向, 如图 6.1 所示。本问仅需考虑最低阶近似。

(2.1) 设介质球半径为 R , 求可使粒子不打到球体的 R 的最大值。

(2.2) 我们称粒子某时刻的速度矢量与其与球心连线所构成的平面为该时刻粒子的运动平面, 求出粒子的入射平面与出射平面间的夹角 (即粒子入射前无穷远处与出射后无穷远处的运动平面)。

(3) 再来考虑电偶极子的场远弱于磁偶极子的场的情况, 设荷质比为 γ ($\gamma < 0$) 的粒子从无穷远处入射, 入射平面为 $\theta = \pi/2$, 粒子在无穷远处的速度为 v_0 , 瞄准距离为 b , 如图 6.2 所示。本问仍仅需考虑最低阶近似。介质球半径为 R ($R > b$)。

(3.1) 求可使粒子不打到球体的 v_0 的最大值。

(3.2) 在粒子速度取 (3.1) 问的值时, 设 $R = 2b$ 。求粒子出射后速度在极轴方向的分量。用此时的初速度 v_0, p, γ, R 及其他给定常量表示。结果保留三位有效数字。

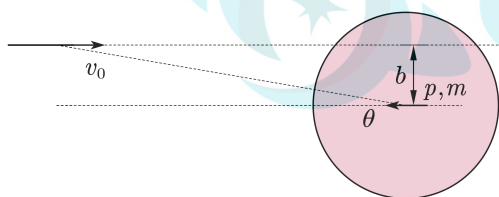


图 6.1: 沿极轴方向入射的粒子

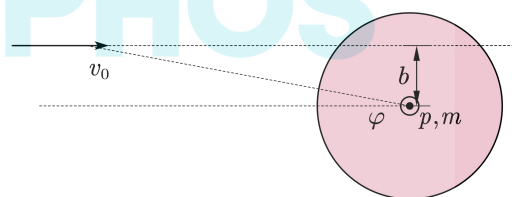


图 6.2: 在赤道平面内入射的粒子

数学提示: 对于常数 $a > 0$, 有

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + C.$$

解:

(1) 电偶极子与磁偶极子产生的场为:

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}), \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}). \quad (1)$$

电偶极子产生电势:

$$\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2)$$

故有总能量守恒:

$$E = \frac{1}{2} M (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + \frac{pq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \text{Const}. \quad (3)$$

再来考虑对球心的力矩:

$$\vec{\tau} = q\vec{r} \times \vec{E} + q\vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{r} \times \vec{E} + q [(\vec{B} \cdot \vec{r})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{r})\vec{B}]. \quad (4)$$

将(1)式代入可得:

$$\vec{\tau} = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta \hat{\varphi} + \frac{\mu_0 m q}{4\pi r^2} \left(2r \cos\theta \dot{\theta} \hat{\theta} + 2r \cos\theta \sin\theta \dot{\varphi} \hat{\varphi} - \dot{r} \sin\theta \hat{\theta} \right). \quad (5)$$

来考虑沿极轴方向的力矩, 由 $\hat{z} = \hat{r} \cos\theta - \hat{\theta} \sin\theta$,

$$\tau_z = \vec{\tau} \cdot \hat{z} = \frac{\mu_0 m q}{4\pi r^2} \left(\dot{r} \sin^2\theta - 2r \sin\theta \cos\theta \dot{\theta} \right) = -\frac{\mu_0 m q}{4\pi} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin^2\theta}{r} \right). \quad (6)$$

其正好可以写为对时间的全导数, 故可以直接对角动量定理积分:

$$L_z + \frac{\mu_0 m q \sin^2\theta}{4\pi r} = M r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi} + \frac{\mu_0 m q \sin^2\theta}{4\pi r} = \text{Const}. \quad (7)$$

(2) (2.1) 由于磁偶极子产生的场远弱于电偶极子, 因此作为零阶近似, 粒子的轨迹可视为仅在电偶极子的场中运动的结果。此时粒子始终在入射平面中运动。其绕过球心并垂直于入射平面的轴的角动量定理为:

$$M \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta. \quad (8)$$

左右各乘一个 $r^2 \dot{\theta}$ 即得:

$$M (r^2 \dot{\theta}) d(r^2 \dot{\theta}) = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta d\theta. \quad (9)$$

两侧积分得:

$$(r^2 \dot{\theta})^2 - v_0^2 b^2 = \frac{pq}{2\pi\epsilon_0 M} (1 - \cos\theta). \quad (10)$$

利用能量守恒:

$$\frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{M (r^2 \dot{\theta})^2}{2r^2} + \frac{qp \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{2} M v_0^2. \quad (11)$$

$$\dot{r}^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{pq}{2\pi\epsilon_0 M r^2}. \quad (12)$$

显然最近点有 $\dot{r} = 0$, 故

$$R \leq r_{\min} = \sqrt{b^2 + \frac{pq}{2\pi\epsilon_0 M v_0^2}} = \sqrt{b^2 + \frac{p\gamma}{2\pi\epsilon_0 v_0^2}}. \quad (13)$$

(2.2) 显然, 若只考虑电偶极子的场的作用, 粒子的运动平面始终不会转动, 因此要考虑磁场的最低阶影响。

由(12)式可以解出 $r(t)$:

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{dr}{\sqrt{v_0^2 (1 - b^2/r^2) - pq/(2\pi\epsilon_0 M r^2)}} \\ &= \int \frac{r dr}{\sqrt{v_0^2 (r^2 - b^2) - pq/(2\pi\epsilon_0 M)}} = \frac{1}{v_0} \sqrt{r^2 - b^2 - \frac{pq}{2\pi\epsilon_0 M v_0^2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

$$r(t) = \sqrt{b^2 + v_0^2 t^2 + \frac{pq}{2\pi\epsilon_0 M v_0^2}}. \quad (15)$$

由(1)求出的关于极轴角动量的守恒量:

$$M r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi} + \frac{\mu_0 m q \sin^2\theta}{4\pi r} = 0. \quad (16)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\mu_0 m \gamma}{4\pi r^3} = -\frac{\mu_0 m \gamma}{4\pi} \left(b^2 + v_0^2 t^2 + \frac{pq}{2\pi\epsilon_0 M v_0^2} \right)^{-3/2}. \quad (17)$$

可以发现入射平面与出射平面的夹角即在两个无穷远处 φ 的变化量，对上式积分得：

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= -\frac{\mu_0 m \gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(b^2 + v_0^2 t^2 + \frac{pq}{2\pi\epsilon_0 M v_0^2} \right)^{-3/2} dt \\ &= -\frac{\mu_0 m \gamma}{2\pi v_0} \frac{1}{b^2 + pq/(2\pi\epsilon_0 M v_0^2)}.\end{aligned}\quad (18)$$

两平面夹角即：

$$\alpha = |\Delta\varphi| = \frac{\mu_0 m |\gamma|}{2\pi v_0} \frac{1}{b^2 + pq/(2\pi\epsilon_0 M v_0^2)}.\quad (19)$$

(3) (3.1) 在 $\theta = \pi/2$ 平面上，若只有磁偶极子场，则粒子运动一直在平面内，有：

$$Mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + \frac{\mu_0 m q \sin^2 \theta}{4\pi r} = -M v_0 b.\quad (20)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{v_0 b}{r^2} - \frac{\mu_0 m q}{4\pi M r^3}.\quad (21)$$

其中用到了 $\theta = \pi/2$ ，由能量守恒：

$$\frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} M v_0^2.\quad (22)$$

$$\dot{r}^2 = v_0^2 - \left(\frac{v_0 b}{r} + \frac{\mu_0 m \gamma}{4\pi r^2} \right)^2.\quad (23)$$

最近点仍要求 $\dot{r} = 0$ ，则

$$v_{0,\max} = \frac{\mu_0 m |\gamma|}{4\pi R^2 (1 + b/R)}.\quad (24)$$

(3.2) 在 $v_0 = v_{0,\max}$ 时，粒子距球心的最短距离即为 R 。在 $\theta = \pi/2$ 平面上，电偶极子产生的电场垂直此平面，方向与极轴相反。其矢量形式为：

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{z}.\quad (25)$$

对粒子的冲量为：

$$\begin{aligned}I_p &= -\frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dt}{r^3} = -\frac{pq}{2\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^3 \dot{r}} \\ &= -\frac{pq}{2\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^3 \sqrt{v_0^2 - (v_0 b/r + \mu_0 m \gamma/(4\pi r^2))^2}}.\end{aligned}\quad (26)$$

代入题给条件：

$$\frac{\mu_0 m |\gamma|}{4\pi} = v_0 R^2 \left(1 + \frac{b}{R} \right) = \frac{3}{2} v_0 R^2.\quad (27)$$

$$v_z = -\frac{p\gamma}{2\pi\epsilon_0 v_0 R^2} \int_1^\infty \frac{1}{x^3 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2x} - \frac{3}{2x^2} \right)^2}} dx \approx -0.732 \cdot \frac{p\gamma}{2\pi\epsilon_0 v_0 R^2}.\quad (28)$$

评分标准：本题满分 50 分。

第 (1) 问 16 分：(1) (2) (4) (5) (6) 式各 2 分，(3) (7) 式各 3 分；

第 (2) 问 20 分：

第 (2.1) 问 8 分：(9) (10) (12) (13) 式各 2 分；

第 (2.2) 问 12 分：(15) (16) (17) 式各 2 分，(14) (18) 式各 3 分；

第 (3) 问 14 分：

第 (3.1) 问 6 分：(20) (21) (23) 式各 2 分；

第 (3.2) 问 8 分：(25) (26) (27) (28) 式各 2 分。

七、(45 分) 滚动摩擦力

本题中我们将研究一种滚动摩擦力模型。

考虑一个在粗糙水平地面上向右作纯滚的圆柱，圆柱转动惯量 I ，质量 m ，半径 R ，重力加速度 g 。由于圆柱的压力，地面发生了微小形变。为了研究这一效应，把地面视作许多上端顶着一定质量块的弹簧在水平方向上的排列，其单位长度质量 λ 、弹性系数 k 。

(1) 设某一时刻圆柱水平运动速度为 $v \sim \sqrt{gR}$ (向右)，加速度 a (向左)，地面对圆柱阻力 F ，支持力 N ，阻力矩 τ 。

以圆柱最低点为 $\theta = 0$ 、逆时针为正建立极坐标系描述圆柱表面的点。设圆柱受到单位长度的静摩擦力分布 $f(\theta)$ (逆时针为正)、支持力分布 $N(\theta)$ ，圆柱与地面接触的部分为 $\theta \in [-\chi, \psi]$ 。

记 $\beta_0 = \frac{I}{mR^2}$, $\beta_1 = \frac{mg}{kR^2}$, $\beta_2 = \frac{\lambda R}{m}$ 。假设 $\beta_0 \lesssim 1$, $\beta_1 \sim \beta_2 \ll 1$, $m, g, R, v, \beta_{0,1,2}$ 在本题中视作已知量，试用上述参量表示 I, k, λ 。

(2) (2.1) 假设圆柱向前运动时， $\theta = \psi$ 处与地面上的质量块发生完全非弹性碰撞。认为碰撞过程中质量块水平方向不受约束，但不考虑其水平方向的运动 (即，碰撞结束后质量块在水平方向的速度变为 0)。试用 F, N, τ, a, ψ 及已知量写出圆柱的运动方程。

(2.2) 用 $f(\theta), N(\theta), \psi$ 表示 F, N, τ ，保留积分形式。结合地面质量块的运动方程，用 $\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}, a$ 及已知量表示 $N(\theta)$ 。可作适当的小量近似。

(2.3) 假设 $f(\theta)$ 正比于 $N(\theta)$ 并设该比例为 t ，试求 ψ, χ ，近似到一阶，答案中允许保留 t 。

(2.4) 结合 (2.1) ~ (2.3) 的结果，试求出 t, a 的表达式，近似到一阶。

(2.5) 假设我们不再考虑上述所有效应，将地面视作刚体且考虑地面的静摩擦力，若要对圆柱中心施加水平阻力 F_{eff} 使圆柱仍以 (2.4) 算出的加速度运动，求 F_{eff} 。本小问用 I, k, λ 代替 $\beta_{0,1,2}$ 表示最终答案。

解：

(1) 容易解得

$$I = \beta_0 m R^2, k = \frac{mg}{\beta_1 R^2}, \lambda = \frac{\beta_2 m}{R} \quad (1)$$

(2) (2.1)

$$\begin{cases} F + \Delta F = ma \\ N + \Delta N = mg \\ \tau + \Delta \tau = I \frac{a}{R} \end{cases} \quad (2)$$

其中的 $\Delta F, \Delta N$ 与 $\Delta \tau$ 来源于地面与圆柱的完全非弹性碰撞：

$$d\vec{p} = \lambda v((1 - \cos \psi)\hat{x} - \sin \psi \hat{y}) \cdot v dt, \quad dL = \lambda R v(1 - \cos \psi) \cdot v dt \quad (3)$$

联立 (2) (3) 并代入 $\Delta F = \frac{dp_x}{dt}, \Delta N = -\frac{dp_y}{dt}, \Delta \tau = \frac{dL}{dt}$ ：

$$\begin{cases} F + \frac{\beta_2 m}{R} v^2 (1 - \cos \psi) = ma & \textcircled{1} \\ N + \frac{\beta_2 m}{R} v^2 \sin \psi = mg & \textcircled{2} \\ \tau + \beta_2 m v^2 (1 - \cos \psi) = \beta_0 m R a & \textcircled{3} \end{cases} \quad (4)$$

(若将 $\Delta F, \Delta N$ 与 $\Delta \tau$ 合并到 F, N, τ 中也算作正确，但后续答案中需添加这一项)

(2.2) 由题， F, N, τ 来源于地面的静摩擦力与支持力分布：

$$\begin{cases} F = \int_{-\chi}^{\psi} (N(\theta) \sin \theta - f(\theta) \cos \theta) R d\theta \\ \tau = \int_{-\chi}^{\psi} f(\theta) R^2 d\theta \\ N = \int_{-\chi}^{\psi} (N(\theta) \cos \theta + f(\theta) \sin \theta) R d\theta \end{cases} \quad (5)$$

地面质量块的运动方程:

$$N(\theta) = ku(\theta) + \lambda\ddot{u}(\theta) \quad (6)$$

地面与圆柱接触段满足

$$u(x) = u_0 - R + \sqrt{R^2 - x^2}, \quad \dot{x} = -v, \quad \dot{v} = -a \quad (7)$$

$$\dot{u}(x) = \dot{u}_0 + \frac{xv}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \ddot{u} = \ddot{u}_0 - \frac{R^2 v^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}} - \frac{xa}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad (8)$$

由 $u(\psi) = 0$ 解得

$$u_0 = R(1 - \cos \psi), \quad \dot{u}_0 = R \sin \psi \dot{\psi}, \quad \ddot{u}_0 = R(\cos \psi \dot{\psi}^2 + \sin \psi \ddot{\psi}) \quad (9)$$

联立 (7) ~ (9) 式并代入 $x = R \sin \theta$:

$$ku + \lambda\ddot{u} = \frac{mg}{\beta_1 R}(\cos \theta - \cos \psi) + \beta_2 m \left(\cos \psi \dot{\psi}^2 + \sin \psi \ddot{\psi} - \frac{v^2}{R^2 \cos^3 \theta} - \frac{a}{R} \tan \theta \right) \quad (10)$$

作小量近似, 最终得到

$$N(\theta) = \frac{mg}{\beta_1 R}(\cos \theta - \cos \psi) - \beta_2 m \frac{v^2}{R^2} \quad (11)$$

(2.3) 由 $N(-\chi) = 0$:

$$\frac{mg}{2\beta_1 R}(\psi^2 - \chi^2) \approx \beta_2 m \frac{v^2}{R^2}, \quad \chi = \sqrt{\psi^2 - 2\beta_1 \beta_2 \frac{v^2}{gR}} \quad (12)$$

根据题目假设联立 (4) ② 与 (5) (11):

$$\begin{aligned} & m(g - \frac{\beta_2 v^2}{R} \sin \psi) \\ &= \int_{-\chi}^{\psi} \left(\frac{mg}{\beta_1 R}(\cos \theta - \cos \psi) - \beta_2 m \frac{v^2}{R^2} \right) (\cos \theta + t \sin \theta) R d\theta \\ &= \frac{mg(t(\cos 2\psi + \cos 2\chi) - (\sin 2\psi - \sin 2\chi) + 2(t + \chi + \psi))}{4\beta_1} \\ &+ \frac{m(\beta_1 \beta_2 v^2(t \cos \psi - \sin \psi) - (\sin \chi + t \cos \chi)(gR \cos \psi + \beta_1 \beta_2 v^2))}{\beta_1 R} \end{aligned} \quad (13)$$

通分化简得

$$\begin{aligned} & t(2gR(\cos \chi - \cos \psi)^2 + 4\beta_1 \beta_2 v^2(1 - \cos \chi)) \\ &+ 2gR(\chi + \psi - 2\beta_1) + gR(\sin 2\chi - \sin 2\psi) - 4 \sin \chi(gR \cos \psi + \beta_1 \beta_2 v^2) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

第一行括号的阶数为 $\beta^2 \chi^2$, 已经小于第二行 v^2 的阶数 $\beta^2 \psi$, 还要乘以小量 t , 因此可忽略; 代入 (12) 作小量近似并化简得

$$gR(\psi - \sin \psi \cos \psi - \beta_1) - \beta_1 \beta_2 v^2 \sin \psi = 0 \quad (15)$$

近似到一阶解得

$$\psi = \chi = \left(\frac{3\beta_1}{2} \right)^{1/3} + \frac{1}{10} \beta_1 \quad (16)$$

可见 ψ 关于 v^2 变化的项极小, 之前 $N(\theta)$ 舍弃相关项无误。

(2.4) 联立(5)(15):

$$\begin{aligned}
F &= \int_{-\chi}^{\psi} N(\theta)(\sin \theta - t \cos \theta) R d\theta \\
&\approx - \int_{-\psi}^{\psi} \left(\frac{mg}{\beta_1 R} (\cos \theta - \cos \psi) - \beta_2 m \frac{v^2}{R^2} \right) R t \cos \theta d\theta \\
&= - \frac{mt}{\beta_1 R} (gR(\psi - \sin \psi \cos \psi) - 2\beta_1 \beta_2 v^2 \sin \psi) \\
&= - \frac{mt}{\beta_1 R} (gR\beta_1 - \beta_1 \beta_2 v^2 \sin \psi) = -mgt + \frac{mv^2}{R} t \left(\frac{3\beta_1}{2} \right)^{1/3} \beta_2
\end{aligned} \tag{17}$$

其中利用了上一问求出的 $\chi \approx \psi$ 。同理

$$\begin{aligned}
\tau &= \int_{-\chi}^{\psi} N(\theta) t R^2 d\theta \\
&\approx \int_{-\psi}^{\psi} \left(\frac{mg}{\beta_1 R} (\cos \theta - \cos \psi) - \beta_2 m \frac{v^2}{R^2} \right) R^2 t d\theta \\
&\approx \frac{2mgRt}{\beta_1} (\sin \psi - \psi \cos \psi) = mgRt \left[1 + \frac{1}{10} \left(\frac{3\beta_1}{2} \right)^{2/3} \right]
\end{aligned} \tag{18}$$

代入 (4) ③ 和 (4) ①, 有

$$a = \frac{\tau}{\beta_0 m R} + \frac{\beta_2 v^2 (1 - \cos \psi)}{\beta_0 R} \tag{19}$$

$$-gt + \frac{v^2}{R} t \left(\frac{3\beta_1}{2} \right)^{1/3} \beta_2 = \frac{gt}{\beta_0} \left[1 + \frac{1}{10} \left(\frac{3\beta_1}{2} \right)^{2/3} \right] + \frac{\beta_2 v^2 (1 - \beta_0)(1 - \cos \psi)}{\beta_0 R} \tag{20}$$

解得

$$t = - \frac{\beta_2 v^2}{2gR} \frac{1 - \beta_0}{1 + \beta_0} \left(\frac{3\beta_1}{2} \right)^{2/3} \left[1 - \frac{1 - \beta_0}{20(1 + \beta_0)} \left(\frac{3\beta_1}{2} \right)^{2/3} \right] \tag{21}$$

最终解得

$$a = \frac{\beta_2 v^2}{(1 + \beta_0) R} \left(\frac{3\beta_1}{2} \right)^{2/3} \left[1 + \frac{\beta_0}{10(1 + \beta_0)} \left(\frac{3\beta_1}{2} \right)^{2/3} \right] \tag{22}$$

可以看到 $a, t \sim \beta^{5/3}$, 可以验证先前所作小量近似均无误。

(2.5) 代入 $\beta_{0,1,2}$ 的表达式:

$$a = \frac{\lambda R^2 v^2}{I + mR^2} \left(\frac{3mg}{2kR^2} \right)^{2/3} \left[1 + \frac{I}{10(I + mR^2)} \left(\frac{3mg}{2kR^2} \right)^{2/3} \right] \tag{23}$$

依题意, 根据角动量定理:

$$\frac{F_{\text{eff}} R}{I + mR^2} = \frac{a}{R} \tag{24}$$

解得

$$F_{\text{eff}} = \lambda v^2 \left(\frac{3mg}{2kR^2} \right)^{2/3} \left[1 + \frac{I}{10(I + mR^2)} \left(\frac{3mg}{2kR^2} \right)^{2/3} \right] \tag{25}$$

评分标准: 本题满分 45 分。

第 (1) 问 3 分: (1) 式 3 分;

第 (2) 问 42 分:

第 (2.1) 问 5 分: (2) 式 2 分, (4) 式 3 分;
第 (2.2) 问 12 分: (6) (7) (8) (9) 式各 1 分, (11) 式 2 分, (5) (10) 式各 3 分;
第 (2.3) 问 10 分: (12) (14) 式各 1 分, (15) (16) 式各 2 分, (13) 式 4 分;
第 (2.4) 问 12 分: (19) (20) (21) 式各 1 分, (22) 式 2 分, (18) 式 3 分, (17) 式 4 分;
第 (2.5) 问 3 分: (23) (24) (25) 式各 1 分。

版权信息

命题人

刘子言 付亦轩 李圣和 顿翔文 赵宇阳 任泓锦 宋安东

审题人

小夜 宋安东 赵宇阳 刘子言 顿翔文 任泓锦 李圣和 付亦轩

联系方式



微信公众号
CPHOS



官方网站
www.cphos.cn



CPHOS 论坛

邮箱

service@cphos.cn

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考

