

第1届 CPHO-S 物理竞赛联考参考解答与评分标准

2021年2月27日上午 9:00-12:00

命题人：李瀚奕 罗启源 简铭 翁颖洋

一、(40分) 洲际导弹的射程

假设地球为一半径为 R ，质量均匀分布的球体，其自转及表面大气影响可略，地表重力加速度 g 。一导弹以速度 v_0 自地面某处发射，发射方向与半径方向夹角为 θ 。

(1) 试求导弹射程与 θ 的关系，射程用两地与地心夹角 β ($\beta \leq \pi$) 表示。

(2) 计算导弹的最大射程，并计算这种情况下导弹从发射到击中目标所需的时间。

可能用到的公式：

对于 $c < 0, b^2 - 4ac > 0$ ，有

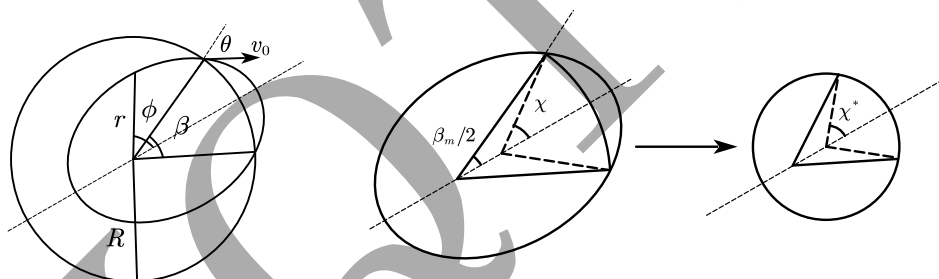
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c} - \frac{b}{2(-c)^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + \lambda,$$

其中 λ 为积分常数。

椭圆面积

$$S = \pi ab$$

参考解答：



(1) 设地球质量为 M ，对地表附近

$$\frac{GM}{R^2} = g \quad (1)$$

导弹相对地球作有心力运动，角动量守恒

$$mr^2\dot{\phi} = mv_0R \sin \theta \quad (2)$$

由能量守恒

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} \quad (3)$$

由开普勒第三定律可知，导弹绕地球做椭圆运动，其极坐标方程可以表示为

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \phi} \quad (4)$$

其近远点位置

$$\dot{r}|_{r=r_{min}, r_{max}} = 0 \quad (5)$$

联立上式，令 $\alpha^2 = \frac{v_0^2}{gR}$

$$r_{min}, r_{max} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (2 - \alpha^2)\alpha^2 \sin^2 \theta}}{2 - \alpha^2} R \quad (6)$$

由(6)式可得到(4)式的准确形式及轨道半长轴 a

$$r = \frac{\alpha^2 \sin^2 \theta}{1 - \sqrt{1 - (2 - \alpha^2)\alpha^2 \sin^2 \theta} \cos \phi} R, a = \frac{1}{2 - \alpha^2} R \quad (7)$$

由对称性

$$r|_{\phi=\pm\frac{\beta}{2}} = R \quad (8)$$

联立上式

$$\beta = 2 \arccos \frac{1 - \alpha^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - (2 - \alpha^2)\alpha^2 \sin^2 \theta}} \quad (9)$$

(2) 射程极大时

$$\frac{d \cos \frac{\beta}{2}}{d \sin^2 \theta} = \frac{-\alpha^2}{\sqrt{1 - (2 - \alpha^2)\alpha^2 \sin^2 \theta_m}} \left(1 + \frac{(2 - \alpha^2)(\alpha^2 \sin^2 \theta_m - 1)}{2(1 - (2 - \alpha^2)\alpha^2 \sin^2 \theta_m)} \right) = 0 \quad (10)$$

解得

$$\sin^2 \theta_m = \frac{1}{2 - \alpha^2} \quad (11)$$

当 $\alpha \leq 1$ 时, (11) 式中 θ_m 有解, 将其入(10)可得

$$\beta_m = 2 \arccos \frac{2\sqrt{1 - \alpha^2}}{2 - \alpha^2} \quad (12)$$

显然, 当 $\alpha > 1$ 时

$$\beta_m = \pi \quad (13)$$

(解法一) 将椭圆轨道进行拉伸变换, 计算卫星运动时的扫过的面积
由(7)式得

$$e = \sqrt{1 - (2 - \alpha^2)\alpha^2 \sin^2 \theta_m} = \sqrt{1 - \alpha^2}, c = ea, b = \sqrt{1 - e^2}a \quad (14)$$

圆心角正切值

$$\tan \chi^* = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{R \sin \frac{\beta_m}{2}}{R \cos \frac{\beta_m}{2} - c} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (15)$$

$$S = ab\chi^* + cR \sin \frac{\beta_m}{2} = \frac{(\arcsin \alpha + \alpha\sqrt{1 - \alpha^2})\alpha}{(2 - \alpha^2)^2} R^2 \quad (16)$$

卫星掠矢速率

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} v_0 R \sin \theta_m \quad (17)$$

联立上式并化简

$$\tau = \frac{2(\arcsin \alpha + \alpha\sqrt{1 - \alpha^2})\alpha R}{(2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{v_0} \quad (18)$$

(解法二) 由(2)(3)式可联立解得

$$\dot{r} = \sqrt{v_0^2 \left(1 - \sin^2 \theta \frac{R^2}{r^2} \right) + 2gR \left(\frac{R}{r} - 1 \right)} \quad (14^*)$$

亦即

$$dt = \frac{dr}{\dot{r}} = \frac{rdr}{\sqrt{(v_0^2 - 2gR)r^2 + 2gRr - v_0^2 R^2 \sin^2 \theta}} \quad (15^*)$$

积分得到

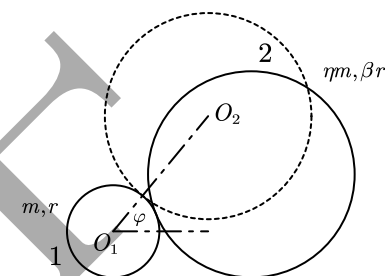
$$\tau = 2 \int_R^{r_{\max}} dt = \frac{2(\arcsin \alpha + \alpha \sqrt{1 - \alpha^2}) \alpha R}{(2 - \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{R}{v_0} \quad (16^*)$$

参考数值: $\alpha = 0.5 \rightarrow \theta_m = 0.857 \text{ rad}, \beta_m = 0.287 \text{ rad}, S = 0.156R^2, \tau = 0.413R/v_0$

评分标准: 本题满分 40 分。第 (1) 小问 16 分, 其中 (2) (3) 式各 2 分, (6) (7) (9) 式各 4 分; 第 (2) 小问 24 分, 其中 (10) (13) (17) (15*) 式各 2 分, (11) (12) (16) (14*) 式各 4 分, (18) (16*) 式各 6 分。

二、(50 分) 滚轮

如图所示, 水平地面上给定两匀质圆柱体 1, 2, 其质量、半径分别为 $m, \eta m, r, \beta r$ 。初态 2 圆柱体以 v_0 向左作纯滚动, 然后与 1 发生完全非弹性碰撞。接下来的问题中, 我们用 φ 来描述两柱体的相对位置, 不考虑两柱体碰撞后可能的脱离, 重力加速度为 g 。



(1) 已知 O_1 轴固定, 且圆柱 1 恰好与水平地面有一缝隙使之恰好不与地面接触, 1 可绕 O_1 轴作无阻尼转动。设两圆柱体之间摩擦系数为 μ , 求 1, 2 碰撞后瞬间两圆柱体的转动角速度 ω_1, ω_2 。

(2) 在 (1) 的基础上, 若 μ 足够大, 碰撞结束后 2 将“翻上”圆柱体 1, 试求两柱体转动角速度关于 φ 的关系式 $\omega_1(\varphi), \omega_2(\varphi)$ 。

(3) 若两圆柱体均自由, 当 2 由外力驱动时, 其可以保持在地面上作匀速纯滚运动, 试讨论 1 被 2 推着走的条件。

参考解答:

(1) 设碰撞过程中两柱体间法向冲量 P_N , 切向冲量 P_f , 对柱体 1, 2 转动定理

$$\frac{1}{2} m r^2 \omega_1 = P_f \cdot r \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \eta \beta^2 m r^2 \left(\omega_2 - \frac{v_0}{\beta r} \right) = -P_f \cdot r \quad (2)$$

对柱体 2 动量定理

$$P_N = \eta m v_0 \cos \varphi_0 \quad (3)$$

$$\eta m v_2 = \eta m v_0 \sin \varphi_0 + P_f \quad (4)$$

由几何关系, 对初态

$$\sin \varphi_0 = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \quad (5)$$

摩擦约束条件

$$\begin{cases} \mu P_N = P_f \\ \omega_1 r = -v_2 + \omega_2 \beta r \end{cases} \quad (6)$$

要求 (6) 式中必有之一满足, 联立上式

当 $\mu \geq \frac{\sqrt{\beta}}{(2\eta+3)\beta}$ 时

$$\omega_1 = \frac{4\eta}{(1+\beta)(2\eta+3)} \frac{v_0}{r}, \omega_2 = \frac{1+2\eta+2\frac{\beta-1}{\beta+1}v_0}{\beta(2\eta+3)} \frac{v_0}{r} \quad (7)$$

否则

$$\omega_1 = \frac{4\mu\eta\sqrt{\beta}}{1+\beta} \frac{v_0}{r}, \omega_2 = \frac{(1+\beta)-4\mu\eta\sqrt{\beta}}{(1+\beta)\beta} \frac{v_0}{r} \quad (8)$$

(2) 当柱体2运动至 φ 处时, 设两柱体间摩擦力为 f , 对柱体1,2转动定理

$$\frac{1}{2}mr^2 \frac{d\omega_1}{dt} = f \cdot r \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}\eta\beta^2mr^2 \frac{d\omega_2}{dt} = -f \cdot \beta r \quad (10)$$

对柱体2牛顿第二定律

$$\eta m \frac{dv_2}{dt} = -\eta mg \cos \varphi + f \quad (11)$$

无滑滚动约束

$$\frac{d\omega_1}{dt} \cdot r = -\frac{dv_2}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt} \cdot \beta r \quad (12)$$

联立上式

$$f = \frac{\eta mg}{2\eta+3} \cos \varphi \quad (13)$$

即

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{2(1+\beta)r} \frac{dv_2^2}{d\varphi} = -\frac{2\eta+2}{2\eta+3} g \cos \varphi \quad (14)$$

$$\Delta\omega_1 = -\frac{\eta}{\eta+1} \frac{\Delta v_2}{r}, \Delta\omega_2 = \frac{1}{\eta+1} \frac{\Delta v_2}{\beta r} \quad (15)$$

移项积分并带入边界条件

$$\Delta v_2 = \sqrt{\left(1 + \frac{2(\eta+1)(\beta-1)}{\beta+1}\right)^2 \frac{v_0^2}{2\eta+3} - \frac{4(1+\eta)(1+\beta)}{2\eta+3} gr \left(\sin \varphi - \frac{\beta-1}{\beta+1}\right) - \frac{1 + \frac{2(\eta+1)(\beta-1)}{\beta+1}}{2\eta+3} v_0^2} \quad (16)$$

$$\omega_1 = \frac{4\eta}{(1+\beta)(2\eta+3)} \frac{v_0}{r} - \frac{\eta}{\eta+1} \frac{\Delta v_2}{r}, \omega_2 = \frac{1+2\eta+2\frac{\beta-1}{\beta+1}v_0}{\beta(2\eta+3)} \frac{v_0}{r} + \frac{1}{\eta+1} \frac{\Delta v_2}{\beta r} \quad (17)$$

(3) 分析可知, 由于2作匀速运动, 1若能被2推着走, 则1也做匀速运动, 考虑1,2圆柱体接触处全反力, 由三力交汇, 必定指向1与地面接触点, 摩擦角

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \varphi_0 \quad (18)$$

故

$$\mu \geq \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \quad (19)$$

评分标准: 本题满分 50 分。第 (1) 小问 22 分, 其中 (1) (2) (3) (4) (5) (6) 式各 2 分,

(7) (8) 式各 4 分, 得出 μ 的临界值 2 分; 第 (2) 小问 20 分, 其中 (9) (10) (11) (12)

(14) (15) (16) (17) 式各 2 分, (13) 式 4 分; 第 (3) 小问 8 分, 其中 (18) (19) 式各

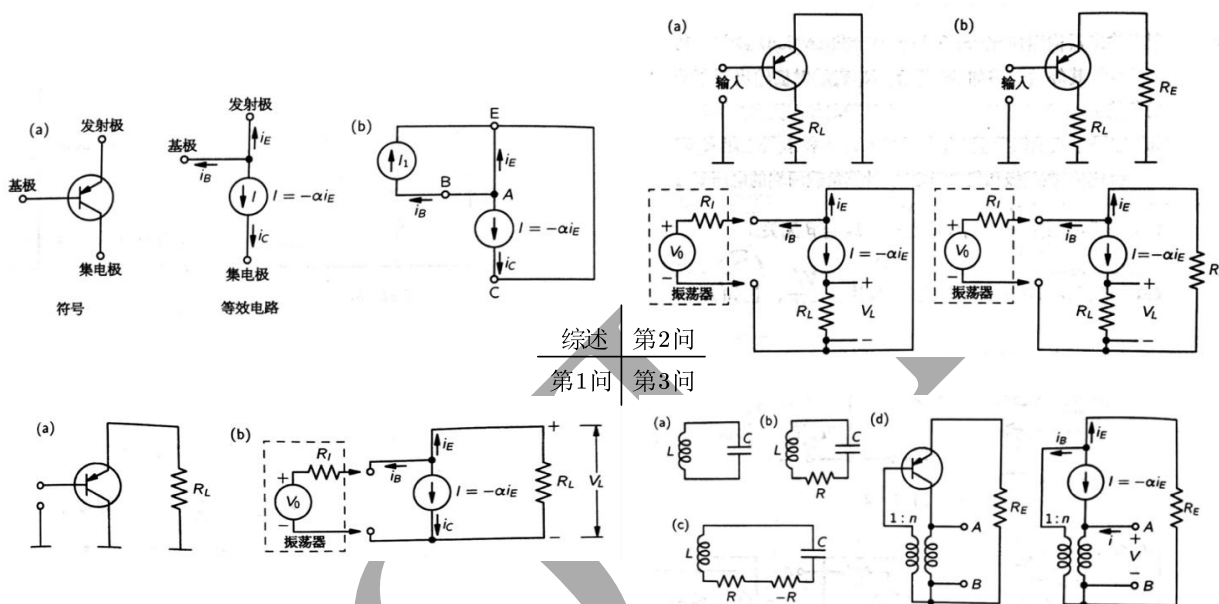
4 分。

三、(50分) 晶体管

理想晶体管的小信号等效电路如下图所示。源 I 是理想电流源， α 是晶体管的一特征常数。

“小信号等价电路”意味着，只有电压和电流围绕晶体管的直流工作电压和电流做小变化时，此电路才与晶体管等效。晶体管的本质是电流放大器，在基极和发射极间连接一电流源，对于

A点，我们得到 $i_E + i_B + i_C = 0$ ，晶体管正常工作时 $i_C = -\alpha i_E$ ，故 $\frac{i_C}{i_B} = \beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ 是集电极和基极间的电流增益。通常 α 大约为0.98~0.99，因此 β 位于50和100之间，由于 α 如此接近于1，我们可以认为 $\beta \approx \frac{1}{1-\alpha}$ 。



下面我们来考虑两种晶体管的基本电路：

(1) 射极输出器构型(Emitter Follower Configuration)

(1.1) 如图所示，将一由峰值为 V_0 的正弦输出信号与一电阻 R_L 串联构成正弦振荡器，计算负载两端电压有效值 V_L ，并证明若 $\frac{R_L}{V_0} \ll \beta$ ， $\frac{V_L}{V_0}$ 为一定值。

(1.2) 将一电容 C_L 替换 R_L ，求 V_L 关于振荡角频率 ω 的函数。

(2) 共发射极构型(Common Emitter Configuration)

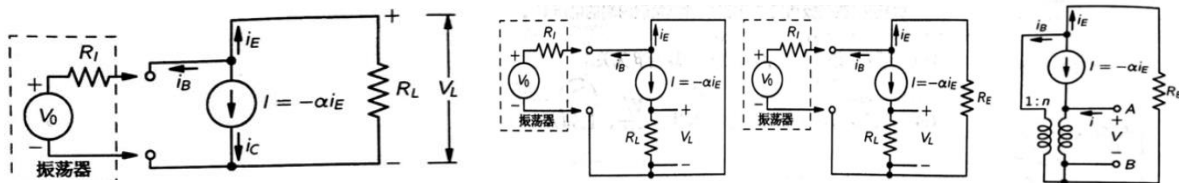
(2.1) 与(1.1)类似，试计算 $\frac{V_L}{V_0}$ 的值。

(2.2) 由(2.1)的结果可知， $\frac{V_L}{V_0}$ 和 β 成正比，由于 β 与温度有很大的相关性，且对于不同的晶体管，其值变化很大，因此电路性能不稳定。为减少 $\frac{V_L}{V_0}$ 对 β 的依赖性，我们可以在回路中

增加一个电阻 R_E ，试计算此时 $\frac{V_L}{V_0}$ 的值，并给出其与 β 相独立的条件。

(3) 最后我们来看晶体管的一个实际应用，对于LC串联谐振电路，一旦被激发，回路将以其共振频率永远振荡下去，然而，由于导线电阻及电磁辐射，总会有能量损失，为了防止这样形式的能量损失，我们需要在回路中增加一个“负电阻”，从而维持电路的稳定。利用晶体管，我们可以制成具有负阻抗的元件，上图(d)展示了一个可行的方案，以AB为端点可以提供一“负电阻”。试计算AB间的阻抗，并给出其阻抗小于零的条件，并标明变压器的极性。

参考解答:



(1.1) 由基尔霍夫定律

$$i_B + i_E + i_C = 0 \quad (1)$$

$$-i_B R_I + i_E R_L = V_0 \cos \omega t \quad (2)$$

解得

$$i_E = \frac{V_0 \cos \omega t}{(1 - \alpha) R_I + R_L} \quad (3)$$

$$V_L = \frac{\sqrt{2} V_0}{2} \frac{R_L}{(1 - \alpha) R_I + R_L} \quad (4)$$

当 $\frac{R_I}{R_L} \ll \beta$ 时

$$(1 - \alpha) R_I \ll R_L, \frac{V_L}{V_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (5)$$

(1.2) 引入复阻抗 $Z_L = \frac{1}{i\omega C_L}$, 利用交流电路知识容易得到

$$|V_L| = \frac{\sqrt{2} V_0}{2} \frac{\frac{1}{\omega C_L}}{\sqrt{(1 - \alpha)^2 R_I^2 + \frac{1}{\omega^2 C_L^2}}} \quad (6)$$

(2.1) 同理, 此时亦有

$$i_B + i_E + i_C = 0 \quad (7)$$

$$-i_B R_I = V_0 \cos \omega t \quad (8)$$

联立上式

$$i_E = \frac{V_0 \cos \omega t}{(1 - \alpha) R_I} \quad (9)$$

故

$$\frac{V_L}{V_0} = \frac{R_L |i_C|}{V_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\alpha R_L}{(1 - \alpha) R_I} = \frac{\sqrt{2} \beta}{2} \frac{R_L}{R_I} \quad (10)$$

(2.2) 此时

$$-i_B R_I + i_E R_E = V_0 \cos \omega t \quad (11)$$

$$i_E = \frac{V_0 \cos \omega t}{(1 - \alpha) R_I + R_E} \quad (12)$$

$$\frac{V_L}{V_0} = \frac{R_L |i_C|}{V_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\alpha R_L}{(1 - \alpha) R_I + R_E} \quad (13)$$

欲使 $\frac{V_L}{V_0}$ 独立于 β , 应有

$$R_E \gg (1 - \alpha) R_I \quad (14)$$

此时

$$\frac{V_L}{V_0} = \frac{\sqrt{2} \alpha R_L}{2 R_E} \quad (15)$$

(3) 由基尔霍夫定律

$$i_B + i_E + i_C = 0 \quad (16)$$

$$i_E R_E = \varphi_L \quad (17)$$

对互感线圈应有

$$\frac{\varphi_L}{1} = \frac{\varphi_R}{n}, (i + i_C) \cdot n = i_B \cdot 1 \quad (18)$$

联立上式

$$Z = \frac{\varphi_R}{i} = \frac{n^2 R_E}{(n+1)\alpha - 1} \quad (19)$$

欲使 $Z < 0$, 应有 $n < 0$, 故两变压器反向耦合

评分标准: 本题满分 50 分。第 (1) 问 14 分, 其中 (1) (2) (3) (4) (5) 式各 2 分, (6) 式 4 分; 第 (2) 问 16 分, 其中 (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) 式各 2 分; 第 (3) 问 20 分, 其中 (16) (17) 式各 3 分, (18) 式 4 分, (19) 式 8 分, 得出反向耦合结论 2 分。

四、(40 分) 圆筒底部的小标记

一竖直放置的空心薄壁圆柱形玻璃筒内装有 m 个半径为 R , 折射率 n 的玻璃球, 玻璃筒内壁半径略大于玻璃球半径, 玻璃球紧贴筒壁, 筒的底面中心有一小标记, 空气折射率为 1。

(1) 证明在傍轴近似下, 玻璃球可等效为一位于球心的薄透镜, 并计算等效焦距 f 。

(2) 若玻璃球折射率 $n = 1.5$, 相邻两玻璃球球心间距为 $d = 6R$, 最下方玻璃球亦与底面紧贴, 从筒中心轴线自上向下观察, 导出观察到小标记的位置与实际筒底距离 y 关于 m 的解析表达式, 并取 $m = 20$, 计算 y 的具体数值。

数学提示: 可以利用特征值进行求解递推数列

$$x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}$$

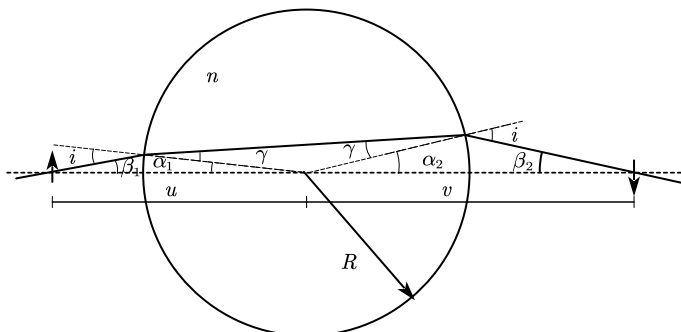
准确地说, 考虑特征方程 $\lambda = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$ 的解 λ_1, λ_2 , 则上式可以写作

$$\frac{x_{n+1} - \lambda_1}{x_{n+1} - \lambda_2} = \frac{a - c\lambda_1}{a - c\lambda_2} \cdot \frac{x_n - \lambda_1}{x_n - \lambda_2}$$

若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, 数列可以写为

$$\frac{1}{x_{n+1} - \lambda} = \frac{2c}{a + d} + \frac{1}{x_n - \lambda}$$

参考解答:



(1) (解法一) 设物与球心距离为 u , 像与球心距离 v , 从物发出的某条光线如图所示, 由几何关系

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = i \\ \alpha_2 + \beta_2 = i \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{u}{\sin i} = \frac{R}{\sin \beta_1} \\ \frac{v}{\sin i} = \frac{R}{\sin \beta_2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\gamma \quad (3)$$

由折射定律

$$\sin i = n \sin \gamma \quad (4)$$

在傍轴近似下

$$\sin i = i, \sin \gamma = \gamma, \sin \alpha_{1,2} = \alpha_{1,2}, \sin \beta_{1,2} = \beta_{1,2} \quad (5)$$

联立上式

$$n \left(1 - \frac{R}{u} \right) + n \left(1 - \frac{R}{v} \right) = 2 \quad (6)$$

即

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2(n-1)}{nR}, f = \frac{n}{2(n-1)}R \quad (7)$$

(解法二) 考虑傍轴近似下的球面成像, 由几何光学知识可知, 物点过玻璃球左右表面成像

$$\frac{1}{u-R} + \frac{n}{v_1} = \frac{n-1}{R} \quad (1^*)$$

$$\frac{n}{u_1} + \frac{1}{v-R} = \frac{n-1}{R} \quad (2^*)$$

由物像关系

$$u_1 + v_1 = 2R \quad (3^*)$$

联立上式

$$n \left(1 - \frac{R}{u} \right) + n \left(1 - \frac{R}{v} \right) = 2 \quad (4^*)$$

即

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2(n-1)}{nR}, f = \frac{n}{2(n-1)}R \quad (5^*)$$

(2) 设相对第 n 个玻璃球的球心, 经玻璃球成像时, 物距为 $u_n R$, 像距为 $v_n R$, 由(7)式得

$$\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} = \frac{2}{3} \quad (8)$$

由物像关系

$$u_{n+1} + v_n = \frac{d}{R} = 6 \quad (9)$$

联立上式

$$u_{n+1} = \frac{9u_n - 18}{2u_n - 3} \quad (10)$$

由题给公式, 递推式(10)的特征根

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3 \quad (11)$$

故

$$\frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{u_n - 3} \quad (12)$$

代入 $u_1 = 1$ 化简可得

$$u_n = \frac{12n - 15}{4n - 7} \quad (13)$$

注意到

$$y_m = R + md - u_{m+1}R \quad (14)$$

联立(13)(14)式

$$y_m = \left(6m - 2 + \frac{6}{-4m + 3}\right)R \quad (15)$$

代入 $m = 20$ 得

$$y_{20} = \frac{9080}{77}R = 117.922R \quad (16)$$

评分标准：本题满分 40 分。第(1)小问 18 分，其中(1)(2)(3)(4)(5)(3*)式各 2 分，(1*)(2*)式各 4 分，(7)式 8 分，其他有效证明方法亦可得分；第(2)小问 22 分，其中(8)(9)(11)(12)(13)(14)(16)式各 2 分，(10)(15)式各 4 分。

五、(50 分) 霍尔效应与磁阻效应

霍尔效应是美国物理学家霍尔于 1879 年在研究金属的导电机理时发现的。当电流垂直于外磁场通过半导体时，载流子发生偏转，垂直于电流和磁场的方向会产生一附加电场，从而在半导体的两端产生电势差。由于霍尔元件的面积可以做的很小，所以可以用它测量某点的磁场或者缝隙中的磁场，还可以利用这一效应来测量导体中的载流子浓度并判断载流子的类型。磁阻效应是另一种电磁效应，将磁阻器件放置在磁场下时，由于载流子运动方向发生偏转，材料电阻将相应发生变化。

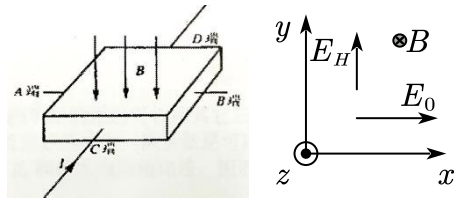
大部分材料以电子作为载流子进行电传导过程，本题将采用经典模型计算材料的霍尔效应和磁阻效应。电子在热运动的基础上由于电场的作用而被加速，从而产生一宏观电流。电子运动过程中会与材料中的原子和杂质发生碰撞并被散射，一般地，散射后瞬间电子速度沿各方向概率相同。在室温下，电子的热运动速率远大于其沿电场方向的漂移速率，可以认为电子相邻两次被散射的时间间隔 t 满足分布

$$P = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

其中 P 为散射时间间隔为 t 对应的概率， τ 为散射平均时间间隔，与材料属性和环境温度 T 有关，在本题中视为已知常量。

(1) 某种材料载流子质量 m ，带电量为 q ，数密度为 n_0 ，试计算零磁场下材料的电导率 σ_0 。

(2) 如图所示，在一块长方形的薄金属板两端C和D之间加上一恒定电压，该电压对载流子的作用可以等效为电场 E_0 。再垂直于金属板施加一恒定磁场 B ，一般的，有 $\tau \ll \frac{2\pi m}{B|q|}$ 。由于洛伦兹力的作用，载流子将向A或B侧偏转并在



元件两边积累，从而产生一恒定霍尔电场 E_H 。

(2.1) $t = 0$ 时刻，某载流子受到一次散射，速度变为 $\vec{u}_0 = u_{0x}\hat{x} + u_{0y}\hat{y}$ ，试计算 t 时刻（载流子尚未被第二次散射）时该载流子的速度 $\vec{u}(t)$ 。

(2.2) 试求稳定状态下霍尔电场 E_H 的值，并计算材料电导率 σ 随磁感应强度 B 的变化。

(3) 由(2.3)可以看出，当霍尔电场存在时，导体的磁阻效应不明显，故实验中常将AB端短路，试用载流子迁移率 $\mu = \frac{v}{E}$ ，即导体中载流子在电场作用下的平均漂移速度 v 与电场 E 的

比值，表示材料电导率的相对变化率 $\eta = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0}$ 随磁场 B 的关系。

由于对一些微观效应的忽略，上述简化模型与实际有一定偏差，不过大体来看是合理的。
可能用到的数学知识：

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \dots, \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots, \int xe^{-x}dx = -(1+x)e^{-x} + C_1,$$

$$\int x^2e^{-x}dx = -(2+2x+x^2)e^{-x} + C_2, \int x^3e^{-x}dx = -(6+6x+3x^2+x^3)e^{-x} + C_3$$

其中 $C_{1,2,3}$ 为积分常数。

参考解答：

(1) 设载流子在某次散射后速度为 \vec{u}_0 ，由牛顿第二定律

$$m \frac{d\vec{u}}{dt} = q\vec{E} \quad (1)$$

载流子再次被散射前，其作匀加速运动，设相邻两次散射间隔时间为 t ，载流子平均速度

$$\langle \vec{u} \rangle_T = \frac{\int_0^t \vec{u} dt}{t} = \vec{u}_0 + \frac{q\vec{E}}{2m}t \quad (2)$$

考虑电流的微观机制

$$\vec{j} = nq\langle \vec{u} \rangle_T \quad (3)$$

对全空间取平均，注意到散射后粒子运动方向的随机性

$$\overline{\vec{u}_0} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{q\vec{E}}{2m}t = \frac{\int_0^{+\infty} te^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{q\vec{E}}{2m}t \cdot dt}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} t dt} = \frac{q\vec{E}}{m}\tau \quad (5)$$

故

$$\vec{j} = \frac{n_0 q^2 \tau}{m} \vec{E} \quad (6)$$

由欧姆定律的微观形式

$$\sigma_0 = \frac{\vec{j}}{\vec{E}} = \frac{n_0 q^2 \tau}{m} \quad (7)$$

(2.1) 忽略载流子在 Z 方向的运动，由牛顿第二定律

$$m\ddot{x} = qE_0 - qB\dot{y} \quad (8)$$

$$m\ddot{y} = qE_H + qB\dot{x} \quad (9)$$

在漂移速度参考系 $\vec{v} = \left(-\frac{E_H}{B}, \frac{E_0}{B}\right)$ 中，粒子做匀速圆周运动

$$\omega = \frac{Bq}{m} \quad (10)$$

由此可以写出 $\vec{u}(t) = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$

$$\dot{x} = -\frac{E_H}{B} + \left(u_{0x} + \frac{E_H}{B}\right)\cos\omega t - \left(u_{0y} - \frac{E_0}{B}\right)\sin\omega t \quad (11)$$

$$\dot{y} = \frac{E_0}{B} + \left(u_{0y} - \frac{E_0}{B}\right)\cos\omega t + \left(u_{0x} + \frac{E_H}{B}\right)\sin\omega t \quad (12)$$

(2.2) 由 (4) 式可知， \vec{u}_0 在平均意义下为零，避免累赘不再写出，考虑到 $\omega\tau \ll 1, E_H \ll E_0$

$$\dot{x} = -\frac{1}{2} \frac{E_H}{B} (\omega t)^2 + \frac{E_0}{B} \left(\omega t - \frac{1}{6} (\omega t)^3 \right) \quad (13)$$

$$\dot{y} = \frac{1}{2} \frac{E_0}{B} (\omega t)^2 + \frac{E_H}{B} \omega t \quad (14)$$

对 (11) 式, 取时间平均

$$\langle \dot{x} \rangle_T = \frac{\int_0^t \dot{x} dt}{t} = -\frac{1}{6} \frac{E_H}{B} (\omega t)^2 + \frac{E_0}{B} \left(\frac{1}{2} \omega t - \frac{1}{24} (\omega t)^3 \right) \quad (15)$$

$$\langle \dot{y} \rangle_T = \frac{\int_0^t \dot{y} dt}{t} = \frac{1}{6} \frac{E_0}{B} (\omega t)^2 + \frac{1}{2} \frac{E_H}{B} (\omega t) \quad (16)$$

取空间平均

$$\overline{\langle \dot{x} \rangle_T} = \frac{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \langle \dot{x} \rangle_T t \cdot dt}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} t dt} = -\frac{E_H}{B} (\omega \tau)^2 + \frac{E_0}{B} (\omega \tau - (\omega \tau)^3) \quad (17)$$

$$\overline{\langle \dot{y} \rangle_T} = \frac{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \langle \dot{y} \rangle_T t \cdot dt}{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} t dt} = \frac{E_0}{B} (\omega \tau)^2 + \frac{E_H}{B} (\omega \tau) \quad (18)$$

稳态下Y方向无宏观电流, 故

$$\overline{\langle \dot{y} \rangle_T} = 0 \quad (19)$$

得到

$$E_H = -E_0 \omega \tau = -\frac{B q \tau}{m} E_0 \quad (20)$$

将 (16) 式代入 (14) 式

$$j_x = n_0 q \overline{\langle \dot{x} \rangle_T} = \frac{n_0 q^2 \tau}{m} E_0 \quad (21)$$

即

$$\sigma = \sigma_0 \quad (22)$$

(3) 将AB端短接后

$$E_H = 0 \quad (23)$$

代入 (14) 式得到

$$j'_x = n_0 q \overline{\langle \dot{x} \rangle_T} = \frac{n_0 q^2 \tau}{m} \left(1 - \left(\frac{B q \tau}{m} \right)^2 \right) E_0 \quad (24)$$

由 (6) 式可得

$$\mu = \frac{q \tau}{m} \quad (25)$$

联立上式

$$\eta = \frac{\Delta \sigma}{\sigma_0} = -\mu^2 B^2 \quad (26)$$

实际上, 即便不将AB端短接, 也有磁阻效应产生, 且无论是否短接, 该效应均正比于磁感应强度的平方, (26) 式的解与实验在数量级上一致。

评分标准: 本题满分 50 分。第 (1) 小问 12 分, 其中 (1) (2) (3) (4) (6) (7) 式各 2 分; 第 (2) 小问 30 分, 其中 (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) 式各 2 分; 第 (3) 小问 8 分, 其中 (23) (24) (25) (26) 式各 2 分。

六、(50 分) 黑洞热力学

黑洞是广义相对论极其优美的预言之一，黑洞无毛定理告诉我们，任何一个稳态黑洞的状态只由其质量 M ，电量 Q ，和角动量 J 决定。

(1) Kerr – Newman黑洞是具有非零角动量和电量的轴对称稳态黑洞，在球坐标下的时空度规(Kerr – Newman metric)可表示为

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(cdt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}((r^2 + a^2)d\varphi - acdt)^2 + \rho^2\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right),$$

其中 ds 表示四维空间中的时空间隔，其地位大致相当于三维空间中的空间间隔（距离），且

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \sin^2 \theta, \Delta = r^2 - rr_g + r_Q^2 + a^2,$$

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}, r_Q = \sqrt{\frac{GQ^2}{4\pi\epsilon_0 c^4}}, a = \frac{J}{Mc}$$

(1.1) 黑洞视界对应度规径向的奇异性，可以理解为在视界处长度被无限拉伸，试求出 Kerr – Newman黑洞的视界半径 r_{\pm} 。

(1.2) 熵的概念由德国物理学家克劳修斯于1865年所提出，其在希腊语源中意为“内在”，即“一个系统内在性质的改变”，在公式中一般记作 S 。微小热力学过程的熵变 dS 等于外界输入系统能量 dQ 除以系统热力学温度 T 的商数，即

$$dS = \frac{dQ}{T},$$

黑洞热力学中，黑洞的熵可表述为

$$S = \frac{\pi k_B c^3}{2Gh} A,$$

其中 $A = 4\pi(r_{\pm}^2 + a^2)$ 为视界面积， $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 为真空中光速， $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ 为玻尔兹曼常数， $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ 为普朗克常量。黑洞内能由质能关系决定。试求 Kerr – Newman黑洞的温度 T ，用 r_{\pm} 、 a 和其它物理常量表示。

(2) 下面考虑 Kerr – Newman黑洞的一个特例，Schwarzschild黑洞，即角动量 J 、电量 Q 均为零，质量为 M 的球对称黑洞。由量子场论可知，其会发出黑体辐射，斯忒藩常量 $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3}$ 。

(2.1) 不考虑宇宙背景辐射，求黑洞存在时间 t_1 ，用 M 及其它物理常量表示。

(2.2) 考虑背景辐射温度 T_0 的影响，讨论不同质量黑洞的命运：

(2.2.1) 宇宙背景辐射温度 $T_0 = 2.725 \text{ K}$ ，求使黑洞不会蒸发的最小质量 M_0 ；

(2.2.2) 地球上 $T_* = 300 \text{ K}$ ，求地球上质量 $m = 1 \text{ kg}$ 的黑洞的存在时间 t_2 。

参考解答：

(1.1) 分析可知，对于 Kerr – Newman黑洞，当视界处长度被无限拉伸时

$$\Delta = r^2 - rr_g + r_Q^2 + a^2 = 0 \quad (1)$$

解得

$$r_{\pm} = \frac{r_g \pm \sqrt{r_g^2 - 4(r_Q^2 + a^2)}}{2} \quad (2)$$

实际上，(2) 式具有一定的物理意义

$$\begin{cases} r_g^2 - 4(r_Q^2 + a^2) > 0 \text{ 时，对应黑洞具有内外视界} \\ r_g^2 - 4(r_Q^2 + a^2) = 0 \text{ 时，对应黑洞具有单一视界} \\ r_g^2 - 4(r_Q^2 + a^2) < 0 \text{ 时，对应裸奇环} \end{cases} \quad (3)$$

而由于宇宙监督定理，裸奇环是不会自然形成的。

(1.2) 黑洞的熵

$$S = \frac{2\pi^2 k_B c^3}{Gh} (r_+^2 + a^2) \quad (4)$$

对(4)式微分

$$dS = \frac{4\pi^2 k_B c^3}{Gh} (r_+ dr_+ + ada) \quad (5)$$

由题可知

$$dr_+ = \frac{1}{2M} \left(r_g + \frac{r_g^2 + 4a^2}{\sqrt{r_g^2 - 4(r_Q^2 + a^2)}} \right) dM \quad (6)$$

$$da = -\frac{a}{M} dM \quad (7)$$

联立上式

$$dS = \frac{4\pi^2 k_B c^3}{Gh} \frac{r_g(r_+^2 + a^2)}{M \sqrt{r_g^2 - 4(r_Q^2 + a^2)}} dM \quad (8)$$

由熵的定义

$$dQ = T dS \quad (9)$$

质能关系

$$dQ = dM \cdot c^2 \quad (10)$$

联立上式解得

$$T = \frac{hc(r_+ - r_-)}{8\pi^2 k_B (r_+^2 + a^2)} \quad (11)$$

(2.1) 对Schwarzschild黑洞

$$r = \frac{2GM}{c^2} \quad (12)$$

$$T = \frac{hc^3}{16\pi^2 k_B GM} \quad (13)$$

黑洞向外发射热辐射

$$P = 4\pi r^2 \sigma T^4 = \frac{hc^6}{30720\pi^2 G^2 M^2} \quad (14)$$

又

$$P = -\frac{dM}{dt} c^2 \quad (15)$$

联立上式可得

$$t_1 = \frac{10240\pi^2 G^2 M^3}{hc^4} \quad (16)$$

对于与太阳质量相当的Schwarzschild黑洞, $M_s = 2 \times 10^{30} \text{kg} \rightarrow t_1 = 2.1 \times 10^{67} \text{a}$, 可见黑洞寿命极其漫长。

(2.2.1) 此时, (14) 式改写为

$$P' = 4\pi r^2 \sigma (T^4 - T_0^4) = \frac{16\pi G^2 \sigma T_0^4}{c^4} \left(\frac{M_0^4}{M^2} - M^2 \right) \quad (17)$$

当 $M \geq M_0$ 时, $P' \leq 0$ 黑洞不会蒸发; 当 $M < M_0$ 时, $P' > 0$ 黑洞会蒸发。其中临界质量

$$M_0 = \frac{hc^3}{16\pi^2 k_B G T_0} = 4.5 \times 10^{22} \text{kg} \approx 2 \times 10^{-8} M_s \quad (18)$$

此质量远小于形成黑洞的恒星质量, 因此除了宇宙初期形成的小型黑洞, 其余黑洞一般是不会蒸发的。

(2.2.2) 地球温度近似视为辐射温度。

(解法一) 联立 (15) (17) 式可得

$$\frac{16\pi\sigma G^2 M_*^2 T_*^4}{c^6} \left(\frac{M_*^2}{M^2} - \frac{M^2}{M_*^2} \right) + \frac{dM}{dt} = 0 \quad (19)$$

其中 $M_* = \frac{hc^3}{16\pi^2 k_B G T_*} = 4.09 \times 10^{20} \text{kg}$, 移项积分并化简得到

$$t_2 = \frac{15h^2 c^5}{2\pi^4 k^3 G T_*^3} \int_0^{\frac{m}{M_*}} \frac{x^2 dx}{1-x^4} = 8.41 \times 10^{-17} \text{s} \ll 1 \text{s} \quad (20)$$

由此看出小质量黑洞蒸发速率极快, 这也意味着在地球上制造黑洞是不可能的。

(解法二) 黑洞初始温度

$$T' = \frac{hc^3}{16\pi^2 k_B G m} = 1.23 \times 10^{23} \text{K} \gg T_* \quad (19^*)$$

远大于地球温度, 可忽略外界辐射, 由 (16) 式计算蒸发时间

$$t_2 = \frac{10240\pi^2 G^2 m^3}{hc^4} = 8.41 \times 10^{-17} \text{s} \ll 1 \text{s} \quad (20^*)$$

评分标准: 本题满分 50 分。第 (1) 小问 26 分, 其中 (7) (10) 式各 2 分, (1) (2) (6) (8) 式各 4 分, (11) 式 6 分; 第 (2) 小问 24 分, 其中 (12) (13) (14) (15) (16) (17) (19) (19*) 式各 2 分, (18) 式各 4 分, (20) (20*) 式 6 分。

七、(40 分) 放射性与地球年龄

假设地球刚形成时同位素 ^{238}U 和 ^{235}U 已经存在, 且不存在它们的衰变产物, 利用 ^{238}U 和 ^{235}U 的衰变可以确定地球的年龄 T 。

(1) 同位素 ^{238}U 以 $\tau_{238} = 4.50 \times 10^9 \text{a}$ 的半衰期衰变, 衰变过程中其余放射性衰变产物的半衰期比 ^{238}U 的半衰期要短得多, 作为一级近似, 我们可以忽略这些衰变产物的存在。整个衰变过程终止于铅的稳定同位素 ^{206}Pb 。试用地球年龄 T 、 ^{238}U 的半衰期 τ_{238} 和现在 ^{238}U 原子核的数量 N_{238} 表示由放射衰变产生的 ^{206}Pb 原子核的数量 n_{206} 。

(2) 类似地, ^{235}U 以 $\tau_{235} = 0.710 \times 10^9 \text{a}$ 的半衰期衰变, 在经过一系列较短半衰期产物后, 最后终止于稳定的同位素 ^{207}Pb 。写出由放射衰变产生的 ^{207}Pb 原子核的数量 n_{207} 与现在 ^{235}U 原子核的数量 N_{235} 和 ^{235}U 半衰期 τ_{235} 的关系式。

(3) 用质谱仪对一种铅和铀的混合矿石进行分析, 测得这种矿石中铅同位素 ^{204}Pb 、 ^{206}Pb 和 ^{207}Pb 的相对浓度比为 1.00: 29.6: 22.6。由于同位素 ^{204}Pb 不是放射性的, 可以用作分析时的参考。分析一种纯铅矿石, 发现这 3 种同位素的相对浓度之比为 1.00: 17.9: 15.5, 且比值 $N_{238}: N_{235} = 137: 1$ 。精确计算地球年龄 T 的值。

(4) 考虑一个静止的铀核 ^{239}Pu 自发衰变成一个铀核 ^{235}U 和一个 ^4He 核, 计算考虑相对论效应与不考虑相对论效应时 ^4He 核的动能差值。

已知下列粒子静止质量:

$$m_{239\text{Pu}} = 239.0522m_p, m_{235\text{U}} = 235.0439m_p, m_{^4\text{He}} = 4.0026m_p, m_p = 938.27 \text{ MeV}/c^2$$

参考解答:

(1) 同位素 ^{238}U 的衰变规律为

$$N_{238} = N_{238_0} 2^{-\frac{t}{\tau_{238}}} \Rightarrow N_{238_0} = N_{238} \cdot 2^{\frac{t}{\tau_{238}}} \quad (1)$$

其中 N_{238_0} 为 ^{238}U 衰变前的原始原子核数, N_{238} 为衰变后所剩下的 ^{238}U 原子核数, τ_{238} 为 ^{238}U 半衰期。已经发生衰变的 ^{238}U 原子核数为

$$n_{238} = N_{238_0} - N_{238} = N_{238} \left(2^{\frac{t}{\tau_{238}}} - 1 \right) \quad (2)$$

由于1个 ^{238}U 原子核最终衰变为1个稳定同位素 ^{206}Pb 原子核, 因此衰变掉的 ^{238}U 原子核数 n_{238} 就是最终所生成的 ^{206}Pb 原子核数 n_{206} , 即

$$n_{206} = n_{238} = N_{238} \left(2^{\frac{t}{\tau_{238}}} - 1 \right) = N_{238} \left(2^{\frac{t}{4.50}} - 1 \right) \quad (3)$$

(2) 同理, 1个 ^{235}U 原子核最终变为1个稳定同位素 ^{207}Pb 原子核, 因此衰变掉的 ^{235}U 原子核数 n_{235} 就是最终所生成的 ^{207}Pb 原子核数 n_{207} , 仿照(1)的解法, 可得

$$n_{207} = N_{235} \left(2^{\frac{t}{\tau_{235}}} - 1 \right) \quad (4)$$

(3) 铀铅矿石中, ^{206}Pb 和 ^{207}Pb 的相对浓度之比即为相应原子核数比, 由(3)(4)式可知

$$\frac{n_{206}}{n_{207}} = \frac{N_{238} \left(2^{\frac{t}{4.50}} - 1 \right)}{N_{235} \left(2^{\frac{t}{0.710}} - 1 \right)} \quad (5)$$

铀铅矿石中铅的三种同位素 ^{204}Pb 、 ^{206}Pb 和 ^{207}Pb 的相对浓度比值为1.00: 29.6: 22.6, 而纯铅矿石中铅的三种同位素 ^{204}Pb 、 ^{206}Pb 和 ^{207}Pb 的相对浓度比值为1.00: 17.9: 15.5, 所以铀铅矿石中由 ^{238}U 衰变得到的 ^{206}Pb 和由 ^{235}U 衰变得到的 ^{207}Pb 的浓度之比为

$$\eta = \frac{29.6 - 17.9}{22.6 - 15.5} \quad (6)$$

将相关数据代入上式可得

$$\eta = \frac{137}{1} \cdot \frac{2^{\frac{T}{4.50}} - 1}{2^{\frac{T}{0.710}} - 1} \quad (7)$$

解得

$$T = 4.55 \times 10^9 \text{ a} \quad (8)$$

即地球年龄为45.5亿年, 此即美国科学家帕特森在1956年测量地球年龄的原理, 帕特森通过这种方法测得地球的精确年龄为 $(45.5 \pm 0.7) \times 10^8 \text{ a}$ 。

(4) 设铀核 ^{235}U 和 ^4He 核动量分别为 p_{U} 、 p_{He} , 铀核静止, 由动量守恒

$$p_{\text{U}} + p_{\text{He}} = 0 \quad (9)$$

若不考虑相对论效应, 由能量守恒

$$m_{\text{Pu}} c^2 = m_{\text{U}} c^2 + \frac{p_{\text{U}}^2}{2m_{\text{U}}} + m_{\text{He}} c^2 + \frac{p_{\text{He}}^2}{2m_{\text{He}}} \quad (10)$$

解得

$$E_{\text{kHe}} = \frac{p_{\text{He}}^2}{2m_{\text{He}}} = \frac{m_{\text{U}}}{m_{\text{U}} + m_{\text{He}}} (m_{\text{Pu}} - m_{\text{U}} - m_{\text{He}}) c^2 \quad (11)$$

若考虑相对论效应, 由能量守恒

$$m_{\text{Pu}} c^2 = \sqrt{(m_{\text{U}} c^2)^2 + (p_{\text{U}} c)^2} + \sqrt{(m_{\text{He}} c^2)^2 + (p_{\text{He}} c)^2} \quad (12)$$

解得

$$E'_{k\text{He}} = \sqrt{(m_{\text{He}}c^2)^2 + (p_{\text{He}}c)^2} - m_{\text{He}}c^2 = \frac{(m_{\text{Pu}} - m_{\text{He}})^2 - m_{\text{U}}^2}{2m_{\text{Pu}}}c^2 \quad (13)$$

代入数据

$$E_{k\text{He}} = 5.258596 \text{ MeV} \quad (14)$$

$$E'_{k\text{He}} = 5.258528 \text{ MeV} \quad (15)$$

$$E_{k\text{He}} - E'_{k\text{He}} \approx 6.2 \times 10^{-5} \text{ MeV} = 62 \text{ eV} \quad (16)$$

评分标准：本题满分 40 分。第 (1) 小问 8 分，其中 (1) (2) 式各 2 分，(3) 式 4 分；第 (2) 小问 4 分，其中 (4) 式 4 分；第 (3) 小问 12 分，其中 (5) (6) (7) (8) 式各 3 分；第 (4) 小问 16 分，其中 (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) 式各 2 分。