

## 第2届 CPHO-S 物理竞赛联考参考解答与评分标准

命题人：郑天宇 史景喆 刘科成 卓永祺 夏振灏 刘子贤

### 一、(40分)“重力弹球”

有一个有趣的小游戏叫“重力弹球”，现在我们来研究其中的物理模型。一个弹球（视为质点）从高处以初速度 $v_0$ 落下。

(1) 正下方 $h$ 处有一半半径为 $r$ 的球状障碍物， $r \ll h$ ，取 $v_0 = 0$ ，弹球可以在一个较小的范围改变水平方向的位置，试求小球运动范围，给定重力加速度 $g$ ，碰撞为完全弹性碰撞。

(2) 将球状障碍物换为一个正在以角速度 $\omega$ 旋转的六棱柱，边长为 $a$ ， $a \ll h$ ，六棱柱表面光滑且碰撞为完全弹性碰撞，取 $v_0 = 0$ ，已知第一个弹球撞击时六棱柱最上面的面倾角为 $\alpha$ ，

每隔 $t = \frac{3\pi}{\omega}$ 就有一球释放，求驱动六棱柱的平均功率。每个质点质量为 $m$ 。

(3) 当然实际情况不可能这么简单，通常你能改变的是出射的角度而非位置，即 $v_0$ 方向任意，正下方 $h$ 处有一平面，平面与水平面夹角为 $\theta$ ，平面恢复系数为 $e = 1$ ，摩擦因数为 $\mu$ ，若弹球能做类似于周期运动以重复一致的轨迹在平面上下降，求各参数应满足的条件。

参考解答：

(1)

记小球自由落体后的速度为

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

则可将问题视为从下方障碍处以 $v$ 向各个方向抛射小球。

而抛体运动的包络面为抛物面，则到达范围是：

$$z \leq \frac{x^2 + y^2}{4h} \quad (2)$$

(2)

先研究碰撞问题：我们只关心碰撞点的法向速度

$$v_n = \omega l \tan \alpha \quad (3)$$

其中 $l = \frac{\sqrt{3}}{2}$

则相遇时相对速度

$$u_{\text{相}} = \omega l \tan \alpha + v \cos \alpha \quad (4)$$

由 $e=1$ 得远离速度

$$u = 2\omega l \tan \alpha + v \cos \alpha \quad (5)$$

计算单个小球前后动能的差值：

原动能

$$E_{k0} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (6)$$

新动能

$$E_k = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m(2\omega l \tan \alpha + v \cos \alpha)^2 \quad (7)$$

作差：

$$\Delta E = 2m(v_n^2 + v_n v \cos \alpha) \quad (8)$$

由  $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ , 得:

$$P = \frac{2}{3\pi} m \omega^2 l \tan \alpha (\omega l \tan \alpha + \sqrt{2gh} \cos \alpha) \quad (9)$$

(3)

设小球接触平面时法向速度为  $v_n$ , 切向速度为  $v_\tau$  (碰撞后) 和  $v_\tau'$  (碰撞前), 对加速度进行沿斜面与垂直斜面方向分解, 有:

$$T = \frac{2v_n}{g \cos \theta} \quad (10)$$

由冲量定理有:

$$mv_\tau + mg \sin \theta T = mv_\tau' \quad (11)$$

$$mv_\tau' - I_\tau = mv_\tau \quad (12)$$

$$I_n = 2mv_n \quad (13)$$

又:

$$\mu I_n = I_\tau \quad (14)$$

解得:

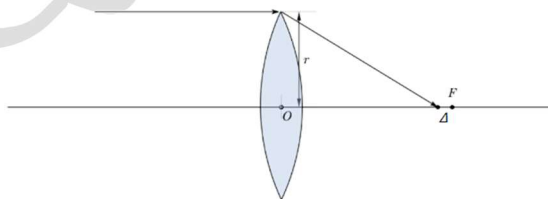
$$\mu = \tan \theta \quad (15)$$

评分标准:

- (1) 问 10 分, ① 2 分, 叙述 2 分, 包络线简单推导 3 分, 答案 3 分, 未考虑三维扣 2 分;  
(2) 问 16 分, ③④⑤⑥⑦各 2 分, ⑧⑨各 3 分;  
(3) 问 14 分, (10) (11) (12) (13) (14) 各 2 分, (15) 4 分, 直接写答案 2 分。

## 二、(40 分) 凸透镜

(1) 如图, 已知该凸透镜左右两面均为球面, 左边球面半径为  $r_1$ , 右边球面半径为  $r_2$ , 玻璃折射率为  $n$ , 试从球面成像公式出发, 算出该透镜的焦距。



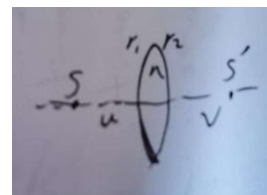
(2) 凸透镜的像散是由入射光的非傍轴性导致的, 射到透镜边缘的光并不汇聚到

焦点  $F$  上。像散值等于边缘光汇聚的焦点与傍轴光汇聚的焦点的距离。如图, 现设该透镜的半径为  $r$  ( $r \ll f$ ), 一束平行光由左方射来, 试求该透镜对该平行光的像散值  $\Delta$ , 用  $r_1, r_2, r, f$  表示。(精确到  $r^2$  项)

(3) 设  $r_1 = 1\text{m}$ ,  $r_2 = 2\text{m}$ ,  $f = 4/3\text{m}$ ,  $r = 1.5\text{cm}$ , 求  $\Delta$ 。

参考解答:

(1) 如图, 设物距为  $u$ , 像距为  $v$ , 第一次成像像距为  $s_1'$



左表面成像:

$$\frac{1}{u} + \frac{n}{s_1'} = \frac{n-1}{r_1} \quad (1)$$

右表面成像:

$$\frac{n}{-s'_1} + \frac{1}{v} = \frac{n-1}{r_2} \quad (2)$$

对比高斯公式

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \quad (3)$$

知:

$$f = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} \quad (4)$$

(2) 如图, 设左球面入射角为  $i$ , 折射角为  $j$ , 右球面入射角为  $i-j+\alpha$ , 折射角为  $\beta$ , 与光轴交汇点距  $O$  点为  $x$ 。

左表面: 由几何关系:

$$\sin i = \frac{r}{r_1}$$

由折射定律:

$$n \sin j = \sin i \quad (6)$$

右表面: 几何关系:

$$\sin \alpha = \frac{r}{r_2} \quad (7)$$

$$x = \frac{r}{\tan(\beta - \alpha)} \quad (8)$$

折射定律:

$$n \sin(i - j + \alpha) = \sin \beta \quad (9)$$

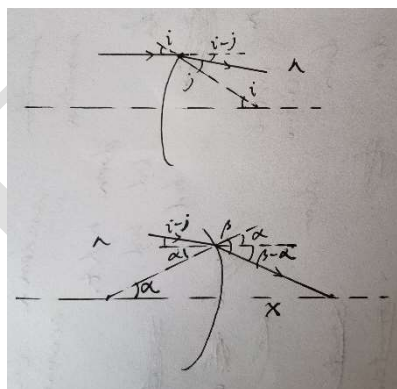
又:

$$\Delta = f - x \quad (10)$$

带入化简一下:

$$\Delta = f - r \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_2^2}} \cdot \cos \beta + n \sin(i - j + \alpha) \cdot \sin \alpha}{n \sin(i - j + \alpha) \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_2^2}} - \frac{r}{r_2} \cdot \cos \beta} \quad (11)$$

题中只要求保留到二阶, 故易知⑪式中分子分母均应保留到三阶, 处理  $\sin(i-j+\alpha)$ :



$$\begin{aligned}\sin(i-j+\alpha) &= (\sin i \cos j - \sin j \cos i) \cos \alpha + \sin \alpha (\cos i \cos j + \sin i \sin j) \\ &= \left( \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \cdot r + \left( \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} \right) \frac{1}{r_1^2} + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{r_2^2} \right) \cdot \frac{r^3}{r_1}\end{aligned}\quad (12)$$

(保留到三阶)

再处理  $\cos \beta$ , 易知  $\beta$  至少为一阶小量, 故保留到三阶有:

$$\cos \beta = 1 - \frac{\beta^2}{2} \quad (13)$$

$\beta$  只需求出其一阶部分, 利用⑨⑫式, 可得:

$$\beta = n \cdot \left( \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \cdot r \quad (14)$$

将⑫⑬⑭代入⑪, 可得:

$$\Delta = \frac{\frac{1}{6}n \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) \frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{6}(n-1) \frac{1}{r_2^3} + \frac{1}{6}n(n^2-1) \left( \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^3 + \frac{1}{3}(n-1)^3 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^3}{(n-1)^2 \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^2} r^2 \quad (15)$$

将  $r, f$  代入, 得:

$$\Delta = 203 \mu\text{m} \quad (16)$$

评分标准:

(1) 问 10 分, ①②各 3 分, ④式 4 分; (2) 问 30 分, ⑤到⑨每个 3 分, ⑫式 8 分, ⑭式 4 分, ⑮式 3 分; (3) 问 5 分, 结果 5 分。

(注: 若第 2, 3 问采用诸如物像等光程+几何关系的方法得出答案的, 最多只能得到 10 分)

### 三、(60 分)

(1) 欢迎进入 M-B 玩家视野: 考虑一些分子质量  $m$  的单原子理想气体分子。

(1.1) 若空间中存在对单个分子的球对称的势场

$E_p(r) = \frac{ar^2}{2}$ , 已知总粒子数  $N$ 、温度  $T$ , 求粒子距离

球对称中心的平均距离  $\bar{r}$ , 总势能  $E_p$ , 定容热容  $C_V$ 。

(1.2) 若在无限高、底面  $S$  柱筒中装有这种气体, 单个分子的势场为  $E_p(z) = \frac{az^2}{2}$ ,  $z$  为到圆柱地面的距离。  $N$ 、 $T$  已知, 求压强分布  $p(z)$ , 粒子平均高度  $\bar{z}$  及  $E_p$ 、 $C_V$ 。

(2) 恭候挑战变异理论:

(2.1) 泛滥高维: 已知半径  $R$  的  $n$  维球表面积 (为待定数列), 求  $n$  维空间中 Maxwell gas 平衡态下与泄流分子束中的速率分布, 并指出  $(n+1)$  维中平衡态下速率分布与  $n$  维中泄流分子数中速率分布的关系。

(2.2) 珍稀狭相: 考虑对相对论粒子 Maxwell 分布。讨论静质量  $m$ 、温度为  $T$  的理想气体分子, 求其速率分布。请将这一讨论运用于近似经典粒子、极端相对论粒子, 分别求出其速率分布; 再将这一讨论运用于光子, 求其动量分布。

(3) 热辐射小建模:

(3.1) 考虑无限长的黑体内外圆柱，其分别与温度为 $T_1$ 、 $T_2$ 的热源接触。分别讨论内外柱共轴；内外柱轴距为 $b$ 的情况，求出单位长度从内向外的净热流。并求第二种情况下，外柱面上 $\theta$ 处单位面积从热源吸热速率 $p(\theta)$ ， $\theta$ 是外柱面上一点和外柱轴心的连线与内柱轴心和外柱轴心的连线之间的夹角。

(3.2) 若内外柱共轴，但均为反射系数为 $\eta$ 的、反射满足布朗体规律的灰体，求从内柱向外柱单位长度上的热流。

(3.3) 如图所示，两个温度恒定为 $T_0$ 、半径为 $a$ 的黑体球位于厚度很小、半径为 $R$ 的圆板的两边，两球连线过板中心且垂直于板，且两球到板的距离皆为 $D$ 。板的导热可以忽略不计。求稳态下，板的温度分布 $T(R)$ 。

参考解答：

(1)

(1.1) 对粒子有：

$$n = n_0 e^{-\frac{\alpha r^2}{2kT}} \quad (1)$$

引入分布函数

$$f(\vec{r}) = \left(\frac{\alpha}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\alpha r^2}{2kT}}$$

故类比 Maxwell 分布并由其结论：

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{8k}{\pi\alpha}} \quad (2)$$

$$\bar{\epsilon}_p = \frac{3kT}{2}, E_p = \frac{3NkT}{2} \quad (3)$$

易知

$$U = 3NkT, C_V = 3Nk \quad (4)$$

(1.2) 同理：

$$n = n_0 e^{-\frac{\alpha z^2}{2kT}}$$

积分得到：

$$N = n_0 S \sqrt{\frac{\pi kT}{2\alpha}}, n_0 = \frac{N}{S \sqrt{\frac{\pi kT}{2\alpha}}} \quad (5)$$

则

$$p(z) = n(z)kT = \frac{NkT}{S \sqrt{\frac{\pi kT}{2\alpha}}} e^{-\frac{\alpha z^2}{2kT}} \quad (6)$$

且

$$\bar{z} = \frac{\int_0^\infty n(z) S z dz}{N} = \sqrt{\frac{2kT}{\pi\alpha}} \quad (7)$$

同理

$$E_p = \int_0^\infty \frac{\alpha z^2}{2} n(z) S dz = \frac{NkT}{2} \quad (8)$$

则

$$U = 2NkT, C_V = 2Nk \quad (9)$$

(2)

(2.1) 显然,  $n$  维平衡态下的速率分布应为

$$f(v)_n = C_n v^{n-1} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (10)$$

其中  $C_n = \frac{S_n}{r^{n-1}}$ ,  $S_n$  是  $n$  维球体表面积。

考察

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

显然, 上式也等于  $\int_0^{\infty} C_n r^{n-1} e^{-r^2} dr$

比较可得:

$$C_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2} dr} \left(= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right) \quad (11)$$

易知

$$f(v)'_n = \frac{f(v)_n v}{\int_0^{\infty} f(v)_n v dv} = C'_n v^n e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (12)$$

由归一化条件易知

$$C'_n = C_{n+1} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

则  $n$  维泄流速率分布函数与  $n+1$  维平衡态速率分布函数一致。 (13)

(2.2) 对狭义相对论中的粒子:

$$\varepsilon = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - m_0 c^2$$

运用玻尔兹曼分布易得:

$$dP \propto e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d^3 p = e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} p^2 \sin\theta d\theta d\phi dp$$

对  $\theta$  与  $\phi$  积分得到:

$$f(p) \propto p^2 e^{-\frac{\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - m_0 c^2}{kT}} \quad (14)$$

引入  $\beta = \frac{v}{c}$ , 易知  $\frac{dp}{d\beta} = \frac{m_0 c}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$ , 显然有  $f(\beta) = f(p) \frac{dp}{d\beta}$

则有:

$$f(\beta) = A \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{m_0 c^2}{kT} (-1 + (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}})}$$

由归一化条件得到:

$$A = \frac{1}{\int_0^1 \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{m_0 c^2}{kT} (-1 + (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}})} d\beta} \quad (15)$$

物理图像的判断是根据  $\frac{m_0 c^2}{kT}$  的大小。

极端非相对论：

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (16)$$

极端相对论：

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\int_0^1 \frac{(1-\beta)^{\frac{3}{2}}}{(\beta)^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{m_0 c^2}{kT} \left(-1+\beta^{-\frac{1}{2}}\right)} d\beta} \approx \frac{1}{\left(\frac{m_0 c^2}{kT}\right)^{-3} \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2}}{(\beta)^{\frac{5}{2}}} e^{-\beta^{-\frac{1}{2}}} d\beta} \\ &= \frac{\left(\frac{m_0 c^2}{kT}\right)^3}{2} \\ f(\beta) &\approx \frac{\left(\frac{m_0 c^2}{kT}\right)^3}{2} \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{m_0 c^2}{kT} \left(-1+(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\right)} \end{aligned} \quad (17)$$

光子：

$$f(p) = B p^2 e^{-\frac{pc}{kT}}$$

由归一化条件：

$$B = \frac{1}{\int_0^\infty p^2 e^{-\frac{pc}{kT}} dp} = \frac{c^3}{2(kT)^3}$$

代入得

$$f(p) = \frac{c^3}{2(kT)^3} p^2 e^{-\frac{pc}{kT}} \quad (18)$$

(3)

(3.1)

$$\phi_1 = 2\pi r \sigma T_1^4, \quad \phi_2 = 2\pi r \sigma T_2^4$$

共轴：

$$\Phi = 2\pi r \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (19)$$

非共轴情况下，考察外壁  $\theta$  到  $\theta+d\theta$  处的长条形面积微元：

$$\text{记 } D = \sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta}$$

其射到内轴上的热流为：

$$\frac{dS}{2} \sigma T_2^4 \int_{\arcsin\left(\frac{b\sin\theta}{D}\right) - \arcsin\left(\frac{r}{D}\right)}^{\arcsin\left(\frac{b\sin\theta}{D}\right) + \arcsin\left(\frac{r}{D}\right)} \cos\theta d\theta$$

$$\text{上式等于 } \sigma T_2^4 \frac{r(R-b\cos\theta)}{R^2+b^2-2Rb\cos\theta} dS, \quad dS \text{ 是该长条形面积微元的面积。} \quad (20)$$

根据热力学第零定律可知，从内柱发送到外柱  $\theta$  到  $\theta+d\theta$  处的长条形

面积微元的热流为  $\sigma T_1^4 \frac{r(R-b\cos\theta)}{R^2+b^2-2Rb\cos\theta} dS$ ；同样根据热力学第零定律，

可知从外柱其他地方发送到该面积微元的热流为

$$(\sigma T_2^4 - \sigma T_2^4 \frac{r(R-b)}{R^2+b^2-2Rb\cos\theta})dS \quad (21)$$

可见， $\theta$  处单位面积微元从温度为 $T_2$ 的热源处吸收的热量等于

$$(\sigma T_2^4 - \sigma T_1^4) \frac{r(R-b)}{R^2+b^2-2Rb\cos\theta} \quad (22)$$

(3.2) 由热力学第零定律易知，外柱发送到内柱的热流占外柱总发出热流的比例为 $k = \frac{r}{R}$

$$\text{从而可以得出: } P_{1\text{吸}} = kP_{2\text{发}} \quad (23)$$

$$P_{2\text{吸}} = (1-k)P_{2\text{发}} + P_{1\text{发}} \quad (24)$$

$$P_{1\text{发}} = \eta P_{1\text{吸}} + (1-\eta)\sigma T_1^4 2\pi r \quad (25)$$

$$P_{2\text{发}} = \eta P_{2\text{吸}} + (1-\eta)\sigma T_2^4 2\pi R \quad (26)$$

解该四元一次方程组易得:

$$\phi = P_{1\text{发}} - P_{1\text{吸}} = \frac{r(R-r)(1-\eta)}{R} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (27)$$

(3.3) 立体角元 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$

故一侧球的发射功率为

$$dP = C * 4\pi a^2 \sigma T_0^4 \sin\theta d\theta d\varphi \quad (28)$$

$$\text{积分得: } 1 = C * \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi, C = \frac{1}{4\pi}$$

而这一部分热流对应板上的面积为

$$dS = D^2 \tan\theta d(\tan\theta) d\varphi \quad (29)$$

板上一侧向外辐射的功率为 $dP = dS\sigma T^4$

则有:

$$T^4 = \frac{a^2}{D^2} T_0^4 \cos^3\theta, T = T_0 \left( \frac{a^2 D}{(D^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (30)$$

评分标准:

(1) 问 16 分, (1) 3 分, (2) (4) 2 分, (3) 1 分, (5) (6) 1 分, (7) (8) (9) 2 分。

(2) 问 24 分, (10) 3 分, (11) (12) 2 分, (13) 1 分, (14) (15) 3 分, (16) 2 分, (17) 6 分, (18) 2 分。

(3) 问 20 分, (19) (20) (21) (22) 2 分, (23) (24) (25) (26) 1 分, (27) 3 分, (28) (30) 2 分, (29) 1 分。



#### 四、(40 分) 电容器的击穿

电容器是一种常用的电学元件;而不恰当的使用可能会造成其损坏。本题考查电容器的击穿。采用平行板电容器简化模型。圆形平行板面积为 $S$ , 不带电时极板间距为 $d_0$ ; 电解质介电常数为 $\epsilon$ 。

1、机械击穿。假设下方极板位于固定面上, 固体电解质固定在极板上, 另一极板固定在电解质上。已知杨氏模量为 $Y$ , 且假设压力与厚度的关系为 $Y \ln\left(\frac{d_0}{d}\right)$ 。求加高频交流电后, 极板之间允许的最大有效电压值。

2、热击穿。假设桌面、环境温度均为 $T_0$ , 且 $d_0$ 很小。电阻率随温度变化满足 $\rho = \rho_0 e^{-\gamma(T-T_0)}$ 。电容器单位面积热容量为 $C$ , 上下表面单位面积散热量之和为 $\lambda(T - T_0)$ 。初态 $T = T_0$ 。现加上形如 $V = V_0 \cos(\omega t)$ 的交流电。求电容器温度满足的微分方程。当交流电频率足够高, (如 5、60 赫兹), 求允许的最大的 $V_0$ 。不要求考虑感生电场。

3、实验室用的 $1\mu F$ 的非极性电容, 其击穿以后是短路还是断路?  $1mH$ 的电感呢?

(1) 解: 体系的总能量为:

$$\begin{aligned} E &= \frac{VQ_f^2}{2\epsilon S^2} \\ &= \frac{x}{\epsilon S} Q_f^2 \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $x$  是电容器两极板的间距。由虚功原理可得:

$$\overline{F} = \frac{\epsilon S}{2} \left( \frac{V_{eff}}{d} \right)^2 \quad (2)$$

由受力平衡, 应有:

$$F = SY \ln \frac{d_0}{d}$$

从而得到:

$$V_{eff}^2 = \frac{2Yd_0^2}{\epsilon} \left( \frac{d}{d_0} \right)^2 \ln \frac{d_0}{d} \quad (3)$$

令  $\frac{d}{d_0} = \xi$ , 且:

$$\frac{d}{d\xi} \xi^2 \ln \xi^{-1} = 2\xi \ln \xi^{-1} - \xi$$

当  $\xi = \frac{1}{\sqrt{e}}$ , 有:

$$\begin{aligned} (V_{eff})_{max} &= \frac{Yd_0^2}{\epsilon e} \\ (V_{eff})_{max} &= \sqrt{\frac{Yd_0^2}{\epsilon e}} \end{aligned} \quad (4)$$

(2) 解:

设电容器两端电压为  $V = V_0 \cos \omega t$ , 则有:

$$j = \frac{V_0}{d\rho_0} e^{\gamma(T-T_0)} \cos \omega t$$

$$\frac{d}{dt}(C(T-T_0)) = \frac{V_0^2}{\lambda d\rho_0} \cos^2 \omega t e^{\gamma(T-T_0)} - \lambda(T-T_0) \quad (5)$$

下记  $T - T_0 = \Delta T$ , 由于  $\omega$  很大, 对时间平均得:

$$\frac{\gamma C}{\lambda} \frac{d}{dt} \Delta T = \frac{V_0^2 \gamma}{2d\rho_0 \lambda} e^{\gamma \Delta T} - \gamma \Delta T \quad (6)$$

考察函数  $f(\xi) = Ae^\xi - \xi$  的图像易知:

为了使得上述微分方程有稳定的解, 必须有  $f(\xi)$  的最小值小于 0, 即:

$$1 - \ln \frac{2d\rho_0 \lambda}{V_0^2 \gamma} < 0, V_0 < \sqrt{\frac{2d\rho_0 \lambda}{\gamma e}} \quad (7)$$

(3) 解:

实验室常用的电容器, 击穿后电阻较低, 可以看作短路; 而电感击穿后可看作断路。

(8)

评分标准:

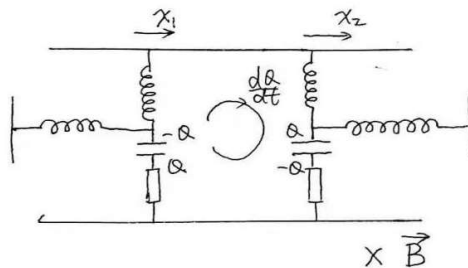
(1) 问 15 分, (1) 4 分, (2) 5 分, (3) (4) 3 分。

(2) 问 19 分, (5) 5 分, (6) 6 分, (7) 8 分。

(3) 问 6 分, (8) 中电容、电感的情况各 3 分。

## 五、(50 分) 电磁感应与振动

如图所示的光滑导轨上放置有两根金属棒。导轨的电阻可以忽略, 金属棒上接有电阻  $R$ 、电感  $L$ 、电容  $C$ , 且金属棒与两侧的固定隔板有劲度系数为  $k$  的不导电弹簧连接。空间中存在如图所示的匀强磁场。左、右两棒偏离平衡位置的坐标分别记为  $x_1$ 、 $x_2$ ; 电容器上带有的电荷记为  $Q$ ; 金属棒长度为  $l$ , 各个坐标的方向如图所示。



已知  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 1H$ ,  $C = 0.5F$ ,  $B = 1T$ ,  $m = 1kg$ ,  $k = 1kg \cdot s^{-2}$ ,  $l = 1m$ 。

在初态,  $x_1 = 0m$ ,  $x_2 = 1m$ ,  $v_1 = 1m/s$ ,  $v_2 = 0m/s$ ,  $Q = 1C$ ,  $\frac{dQ}{dt} = 1A$ 。

(1) 求过了很长时间以后,  $x_1$ 、 $x_2$  与  $Q$  的近似表达式。

(2) 求对任意  $t > 0s$ ,  $x_1$ 、 $x_2$  与  $Q$  的表达式。

容易列出微分方程为:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - Bl\frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - Bl\frac{dQ}{dt} \quad (2)$$

$$2\left(\frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2Q}{dt^2}\right) = -Bl(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (3)$$

对该线性微分方程组, 可以猜其存在如下所示的特解:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ Q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ Q_0 \end{bmatrix} e^{\gamma t} \quad (4)$$

代入微分方程得到:

$$\begin{bmatrix} m\gamma^2 + k & 0 & Bl\gamma \\ 0 & m\gamma^2 + k & -Bl\gamma \\ -\frac{Bl\gamma}{2} & \frac{Bl\gamma}{2} & \frac{1}{C} + R\gamma + L\gamma^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

为了使  $x_{10}$ 、 $x_{20}$ 、 $Q_0$  有非平凡解, 应有:

$$\begin{vmatrix} m\gamma^2 + k & 0 & Bl\gamma \\ 0 & m\gamma^2 + k & -Bl\gamma \\ -\frac{Bl\gamma}{2} & \frac{Bl\gamma}{2} & \frac{1}{C} + R\gamma + L\gamma^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

显然,  $\gamma$  有六个解; 通过观察体系得知, 有两解为:

$$\gamma_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6)$$

这两解对应的震荡模式为:

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

显然, 另外四解对应的震荡模式都会存在能量的损耗, 在  $t \rightarrow \infty$  时会衰减。通过代入初条件易得, 第一问的解答为:

$$\frac{x_1}{m} = 0.5\left(\cos\frac{t}{s} + \sin\frac{t}{s}\right) \quad (8)$$

$$\frac{x_2}{m} = 0.5\left(\cos\frac{t}{s} + \sin\frac{t}{s}\right) \quad (9)$$

$$\frac{Q}{C} = 0 \quad (10)$$

容易猜出, 另外四解对应的震荡模式应为:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ -x_0 \\ Q_0 \end{bmatrix}$$

将其代入以上的方程得到：

$$mL\gamma^4 + mR\gamma^3 + \left(\frac{m}{C} + kL + B^2l^2\right)\gamma^2 + kR\gamma + \frac{k}{C} = 0 \quad (11)$$

代入各个数据，得到  $\gamma$  的四个解为：（以下默认为国际单位）

$$\gamma_{a,b} = -0.0730275 \pm 0.779584i \quad (12)$$

$$\gamma_{c,d} = -0.426973 \pm 1.75496i \quad (13)$$

这四个解分别对应：

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.192142 \pm 0.491993i \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.557858 \mp 1.216991i \end{bmatrix} \quad (15)$$

以上找到了六个线性无关的特解。将这六个解叠加即可得：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ Q \end{bmatrix} &= (X \cos(t) + Y \cos(t)) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{A}e_a^{\gamma t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0.192142 + 0.491993i \end{bmatrix} \\ &+ \tilde{B}e_b^{\gamma t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0.192142 - 0.491993i \end{bmatrix} + \tilde{C}e_c^{\gamma t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0.557858 - 1.216991i \end{bmatrix} \\ &+ \tilde{D}e_d^{\gamma t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0.557858 + 1.216991i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

现在设：

$$\tilde{A} = R_A + I_A * i;$$

$$\tilde{B} = R_B + I_B * i$$

由对称性易知：

$$R_A = R_B;$$

$$I_A = -I_B$$

对  $\tilde{C}$  与  $\tilde{D}$  同理。

将初条件带入易得：

$$X = 0.5$$

$$Y = 0.5$$

$$R_A = -0.468465$$

$$R_C = 0.218465$$

$$I_A = -0.660918$$

$$I_C = 0.117480$$

得第二问答案为：（单位已代入）

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{m} = & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{t}{s} + \frac{\pi}{4}\right) - 1.6202 \cos\left(0.779584\frac{t}{s} + 0.95418\right)e^{-0.073028\frac{t}{s}} \\ & + 0.49610 \cos\left(1.7550\frac{t}{s} + 0.49339\right)e^{-0.42697\frac{t}{s}} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{m} = & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{t}{s} + \frac{\pi}{4}\right) + 1.6202 \cos\left(0.779584\frac{t}{s} + 0.95418\right)e^{-0.073028\frac{t}{s}} \\ & - 0.49610 \cos\left(1.7550\frac{t}{s} + 0.49339\right)e^{-0.42697\frac{t}{s}} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C} = & 0.855767e^{-0.073028\frac{t}{s}} \cos\left(0.77958\frac{t}{s} - 0.98894\right) \\ & + 0.66416e^{-0.42697\frac{t}{s}} \cos\left(1.7550\frac{t}{s} - 0.64759\right) \end{aligned} \quad (19)$$

评分标准：

(1) (2) (3) 2 分，(4) 4 分，(5) 2 分，(6) 1 分，(7) 2 分，(8) (9) 2 分，(10) 1 分；

(11) 5 分，代入数据或列出能够得到相同特征根方程的线性微分方程也算正确；

(12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) 3 分，(19) 4 分。

## 六、(80 分) 索末菲原子模型和相对论性卢瑟福散射

本题建立一个相对论性的原子模型，并利用该模型研究索末菲氢原子模型和相对论性卢瑟福散射。

注意事项：(1) 本题分为三部分：A 部分为铺垫，B 部分与 C 部分互相独立。

(2) 本题中请不要使用任何小量近似！

(3) 本题忽略原子核内部结构，忽略推迟效应和电磁辐射。

### Part A (20 分) 相对论性比耐方程

分析一个电荷量为  $Z_2 e$ ，位置固定不动的原子核。在该原子核产生的电场中，存在一个带电量为  $Z_1 e$ ，静质量为  $m$  的粒子。取以原子核为原点的极坐标系  $(r, \varphi)$  来研究该粒子的运动。为方便表示，设该粒子的动质量为  $m'$ ，设距离  $r$  的倒数为  $u = \frac{1}{r}$ 。已知粒子的角动量为  $L$ ，总能量为  $E$

$$\left(E = m'c^2 + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)。$$

1. 用  $L, u, \varphi$  表示粒子的径向动量  $p_r$  和切向动量  $p_\varphi$ 。

2. 推导粒子的相对论性比耐方程 ( $u$  关于  $\varphi$  的二阶微分方程)，用  $u, \varphi, E, L$  和一些物理常数表示。TIPS：相对论形式下  $F = \frac{dp}{dt}$  仍成立。

### Part B (30 分) 束缚态：索末菲原子模型

上世纪初，科学家们将上述模型套用在氢原子的研究上 ( $Z_1 = -1, Z_2 = 1, m = m_e$ )，得到了索末菲原子模型，并在一定程度上成功解释了谱线分裂等现象。

为方便表示，我们令  $\varphi = 0$  处对应电子初始时的近核点。

1、请根据比耐方程求出电子的反比轨道方程 ( $u$  关于  $\varphi$  的方程)。你可以自己设定一个待定参数  $A$ 。

2、求出电子轨道每个周期的进动角度。

3、电子运动包含径向和角向两个自由度，所以我们可以得到两个方向上的量子化条件。已知切向方向上的量子化条件  $L = n_\varphi \hbar$  同时为方便表示，我们引入参量  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$ ， $\epsilon = \frac{\hbar c A}{\alpha E} (n_\varphi^2 - \alpha^2)$ 。

请你利用以上三个式子对轨道方程  $u(\varphi)$  进行化简 (化简后的方程仅含  $u, \varphi, A, n_\varphi, \alpha, \epsilon$ )。

4、已知径向方向上的量子化条件  $\oint p_r dr = n_r \hbar$  (注意这里是  $\hbar$  而非  $h$ )，求参数  $\epsilon$  的值，用  $n_r, n_\varphi, \alpha$  表示。

可能用到的积分公式：
$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{a \sin(x)}{1 + a \cos(x)} \right)^2 dx = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} - 2\pi$$

### Part C (30 分) 散射态：相对论性卢瑟福散射

我们非常熟悉经典的卢瑟福散射及其微分散射截面。一般情况下我们使用的  $\alpha$  粒子来自于原子核的  $\alpha$  衰变，能量并不是很高，所以我们能够忽略相对论效应带来的影响。但如果我们用一束高能粒子轰击固定靶，那么可能就需要考虑相对论效应。由于散射的实质是交换虚光子，严格的

计算需要使用量子电动力学，但是我们已经做了题文中的许多简化。此题中我们还可以忽略靶原子的电子。已知前面提到的粒子初始（在无穷远处）速度 $\beta c$ ，记 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 。假定这粒子从

$(r, \varphi) = (\infty, -\varphi_0)$ 处入射，瞄准距离为 $b$ ，从 $(r, \varphi) = (\infty, \varphi_0)$ 出射，其中 $\varphi_0$ 未知。

1、把 $L$ 的表达式代入比耐方程。之后请勿在答案中使用 $L$ 。提示：如果把所有常量直接写出，那么你接下来的计算量会爆炸。为了你的人身安全，请你找出一个具有长度量纲的量 $b_0$ 来代替一堆常量，化简你的结果。

2、求出散射角 $\theta$ 和瞄准距离 $b$ 的关系。

3、求出相对论性卢瑟福散射的微分散射截面 $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{relativistic}$ ，微分散射截面的定义是：

$\frac{\text{单位立体角内散射的粒子数}}{\text{单位面积入射的粒子数}}$ ，用散射角作为自变量。但是，此题中无法用散射角来表示微分散射截面，所以请你用瞄准距离 $b$ 给出微分散射截面，并且给出用散射角 $\theta$ 确定 $b$ 的方法。

参考解答：

#### Part A

1. 显然有切向动量

$$p_\varphi = \frac{L}{r} = Lu \quad (1)$$

设 $\gamma' = \frac{m'}{m} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r'^2+\varphi'^2 r^2}{c^2}}}$ ，则角动量可以写成

$$L = \gamma' m \dot{\varphi} r^2 \quad (2)$$

已知径向动量

$$p_r = \gamma' m \dot{r} \quad (3)$$

善用

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (4)$$

于是改写

$$\frac{d}{dt} = \frac{L}{\gamma' m r^2} \frac{d}{d\varphi} \quad (5)$$

所以厘米

$$p_r = \gamma' m \frac{L}{\gamma' m r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -L \frac{du}{d\varphi} \quad (6)$$

2. 设 $k = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}$ ，那么运动方程就是

$$ku^2 \hat{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(p_r \hat{\mathbf{r}} + p_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}) = \frac{dp_r}{dt} \hat{\mathbf{r}} + \frac{L}{r} \frac{d\hat{\boldsymbol{\phi}}}{dt} = \left( \frac{d}{dt} \left( -L \frac{du}{d\phi} \right) - \frac{\phi L}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} \quad (7)$$

仿照之前的方法化简，可以得到

$$ku^2 = \frac{L}{\gamma' m r^2} \frac{d}{d\phi} \left( \gamma' m \frac{L}{\gamma' m r^2} \frac{dr}{d\phi} \right) - \frac{L^2}{\gamma' m r^3} = -\frac{L^2 u^2}{\gamma' m} \frac{d^2 u}{d\phi^2} - \frac{L^2 u^3}{\gamma' m} \quad (8)$$

其实，用（7）（8）两式推导略显复杂，可以直接使用  $F = \frac{dp}{dt}$  在径向方向的投影形式  $\frac{dp_r}{dt} - p_\phi \frac{d\theta}{dt} = ku^2$  来进行推导。

于是可得

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = -\frac{\gamma' m k}{L^2} \quad (9)$$

注意到由于忽略了电磁辐射，所以能量守恒。另外由于忽略了推迟效应，所以忽略电场能因为加速运动而产生的改变。也就是说

$$\gamma' m c^2 + ku = E \quad (10)$$

往回代入即可得到

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = -\frac{kE}{c^2 L} + \frac{k^2}{c^2 L^2} u \quad (11)$$

再化简一下就是

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + \left( 1 - \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 c L} \right)^2 \right) u = -\frac{Z_1 Z_2 e^2 E}{4\pi\epsilon_0 c^2 L} \quad (12)$$

## Part B

1. 显然，

$$u = A \cos \left( \sqrt{1 - \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c L} \right)^2} \phi \right) + \frac{\frac{e^2 E}{4\pi\epsilon_0 c^2 L}}{1 - \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c L} \right)^2} \quad (13)$$

2. 容易发现电子绕核旋转的椭圆轨道在进动，每周期进动角度是

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c L} \right)^2}} - 2\pi \quad (14)$$

3. 代入  $L = n_\phi \hbar$ ,  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$ , 可得  $u = A \cos \left( \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n_\phi^2}} \phi \right) + \frac{E}{\hbar c} \cdot \frac{\alpha}{n_\phi^2 - \alpha^2}$



继续代入  $\varepsilon = \frac{\hbar c A}{\alpha E} (n_\phi^2 - \alpha^2)$  可得

$$u = A \cos \left( \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n_\phi^2}} \varphi \right) + \frac{A}{\varepsilon} \quad (15)$$

4. 结合之前的结论可得

$$p_r = -L \frac{du}{d\varphi} = n_\phi \hbar A \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n_\phi^2}} \sin \left( \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n_\phi^2}} \varphi \right) \quad (16)$$

$$dr = -\frac{1}{u^2} du = \frac{A \sin \left( \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n_\phi^2}} \varphi \right)}{\left( A \cos \left( \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n_\phi^2}} \varphi \right) + \frac{A}{\varepsilon} \right)^2} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n_\phi^2}} d\varphi \quad (17)$$

令  $a = \varepsilon, x = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n_\phi^2}} \varphi$ , 则有

$$\oint p_r dr = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n_\phi^2}} n_\phi \hbar \int_0^{2\pi} \left( \frac{a \sin x}{a \cos x + 1} \right)^2 dx = 2\pi n_\phi \hbar \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 \right)$$

$$\oint p_r dr = \sqrt{n_\phi^2 - \alpha^2} h \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 \right) \quad (18)$$

由题给条件知  $\oint p_r dr = n_r h$

所以

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{n_\phi^2 - \alpha^2}{\left( n_r + \sqrt{n_\phi^2 - \alpha^2} \right)^2}} \quad (19)$$

Part C

1. 根据瞄准距离, 可以算出

$$L = \gamma \beta m c b \quad (20)$$

代入, 则可知

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u &= -\frac{\gamma m k}{L^2} + \frac{k^2}{L^2 c^2} u \\ &= -\frac{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi \varepsilon_0 \gamma \beta m c^2}}{\beta b^2} + \frac{\left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi \varepsilon_0 \gamma \beta m c^2} \right)^2}{b^2} u \\ &= -\frac{b_0}{\beta b^2} + \frac{b_0^2}{b^2} u \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi \varepsilon_0 \gamma \beta m c^2} \quad (22)$$

2. 解这个方程。注意分情况讨论： $b > b_0$ 和 $b < b_0$ 。根据非齐次线性方程可以分成一个通解和一个特解的叠加，很容易知道

$$u = \begin{cases} -\frac{\frac{b_0}{\beta b^2}}{1-\frac{b_0^2}{b^2}} + A \cos\left(\sqrt{1-\frac{b_0^2}{b^2}}\varphi\right) & , b > b_0 \\ -\frac{\frac{b_0}{\beta b^2}}{1-\frac{b_0^2}{b^2}} + A \cosh\left(\sqrt{\frac{b_0^2}{b^2}-1}\varphi\right) & , b < b_0 \end{cases} \quad (23)$$

注意到粒子从无穷远处来，即 $(u, \varphi) = (0, \varphi_0)$ 是一个边界条件，另一个边界条件关于瞄准距离，是

$$\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} r \sin(\varphi_0 - \varphi) = b \quad (24)$$

也就是说，

$$\frac{du}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -\frac{1}{b}$$

第一个边界条件给出

$$u = \begin{cases} \frac{\frac{b_0}{\beta b^2}}{1-\frac{b_0^2}{b^2}} \left( \frac{\cos\left(\sqrt{1-\frac{b_0^2}{b^2}}\varphi\right)}{\cos\left(\sqrt{1-\frac{b_0^2}{b^2}}\varphi_0\right)} - 1 \right) & , b > b_0 \\ \frac{\frac{b_0}{\beta b^2}}{1-\frac{b_0^2}{b^2}} \left( \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{b_0^2}{b^2}-1}\varphi\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{b_0^2}{b^2}-1}\varphi_0\right)} - 1 \right) & , b < b_0 \end{cases} \quad (25)$$

第二个边界条件给出

$$\begin{cases} -\frac{\frac{b_0}{\beta b^2}}{\sqrt{1-\frac{b_0^2}{b^2}}} \tan\left(\sqrt{1-\frac{b_0^2}{b^2}}\varphi_0\right) = -\frac{1}{b} & , b > b_0 \\ -\frac{\frac{b_0}{\beta b^2}}{\sqrt{\frac{b_0^2}{b^2}-1}} \tanh\left(\sqrt{\frac{b_0^2}{b^2}-1}\varphi_0\right) = -\frac{1}{b} & , b < b_0 \end{cases} \quad (26)$$

可以得到

$$\varphi_0 = \begin{cases} \frac{\arctan\left(\beta \sqrt{\frac{b^2}{b_0^2}-1}\right)}{\sqrt{1-\frac{b_0^2}{b^2}}} & , b > b_0 \\ \frac{\operatorname{arctanh}\left(\beta \sqrt{1-\frac{b^2}{b_0^2}}\right)}{\sqrt{\frac{b_0^2}{b^2}-1}} & , b < b_0 \end{cases}$$

于是

$$\theta = \pi - 2\varphi_0 = \begin{cases} \pi - \frac{2\arctan\left(\beta\sqrt{\frac{b^2}{b_0^2}-1}\right)}{\sqrt{1-\frac{b_0^2}{b^2}}}, & b > b_0 \\ \pi - \frac{2\operatorname{arctanh}\left(\beta\sqrt{1-\frac{b^2}{b_0^2}}\right)}{\sqrt{\frac{b_0^2}{b^2}-1}}, & b < b_0 \end{cases} \quad (27)$$

$$\text{其中 } b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma \beta m c^2}$$

值得注意的是，从之前的结果可以发现，两种情况的相互变换无非就是把根号中的 $i$ 提取出来，然后把三角函数中的 $i$ 提取出来变成双曲函数或反之。这是因为我们算出来的东西是可以解析延拓的。本题的评分标准是，给出 $b > b_0$ 或者 $b < b_0$ 的任何一种情况并且说明相互变换的方式即可得满分，否则必须给出两种情况，只给一种的得一半的分数。

$$3. \quad \text{已知 } \sigma = \pi b^2, \quad \Omega = 2\pi \cos\theta. \quad (28)$$

由于已知上面这个有趣的结论，所以接下来只算 $b > b_0$ ，然后只需要根据这个变换就可以确定 $b < b_0$ 的情况。

这里比较难用 $\theta$ 表示 $b$ ，所以先求 $\frac{d\Omega}{d\sigma}$ ：

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\sigma} &= -\frac{2}{b_0^2} \sin\theta \frac{d\theta}{d\frac{b^2}{b_0^2}} \\ &= \frac{2}{b_0^2} \sin \frac{2\arctan\left(\beta\sqrt{\frac{b^2}{b_0^2}-1}\right)}{\sqrt{1-\frac{b_0^2}{b^2}}} \frac{d}{d\frac{b^2}{b_0^2}} \frac{2\arctan\left(\beta\sqrt{\frac{b^2}{b_0^2}-1}\right)}{\sqrt{1-\frac{b_0^2}{b^2}}} \\ &= \frac{2}{b_0^2} \sin \frac{2\arctan\left(\beta\sqrt{\frac{b^2}{b_0^2}-1}\right)}{\sqrt{1-\frac{b_0^2}{b^2}}} \left( \frac{\frac{\beta b}{b_0}}{\left(\frac{b^2}{b_0^2}-1\right)\left(1+\beta^2\left(\frac{b^2}{b_0^2}-1\right)\right)} - \frac{\arctan\left(\beta\sqrt{\frac{b^2}{b_0^2}-1}\right)}{\frac{b}{b_0}\left(\frac{b^2}{b_0^2}-1\right)^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

然后就能知道微分散射截面是

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{relativistic}} \\ &= \frac{b^2 - b_0^2}{2 \sin \frac{2\arctan\left(\beta\sqrt{\frac{b^2}{b_0^2}-1}\right)}{\sqrt{1-\frac{b_0^2}{b^2}}} \left( \frac{\frac{\beta b}{b_0}}{1+\beta^2\left(\frac{b^2}{b_0^2}-1\right)} - \frac{\arctan\left(\beta\sqrt{\frac{b^2}{b_0^2}-1}\right)}{\frac{b}{b_0}\sqrt{\frac{b^2}{b_0^2}-1}} \right)} \end{aligned} \quad (30)$$

其中  $b_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma \beta m c^2}$ ,  $\theta = \pi - \frac{2\arctan\left(\beta \sqrt{\frac{b^2}{b_0^2} - 1}\right)}{\sqrt{1 - \frac{b_0^2}{b^2}}}$  是  $b$  关于  $\theta$  的隐函数, 可以由此用  $\theta$  表示  $b$ ,

进而表示  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{relativistic}}$ 。 (31)

当然, 本题的计算结果全然是错误的, 严格的计算必须使用量子电动力学。

评分标准:

**PART A** 20 分, (1) (2) (3) (5) 1 分, (6) 2 分, (7) (9) (10) (11) (12) 2 分, (8) 4 分。

**PART B** 30 分, (13) (14) 4 分, (15) (16) (17) (18) 4 分, (19) 6 分。

**PART C** 30 分, (20) (22) 1 分, (21) 2 分, (23) (24) 4 分, (25) (26) 1 分, (27) 4 分, (28) 2 分, (29) 4 分, (30) (31) 3 分。