第 2 届 CPHO-S 物理竞赛联考

2021 年 3 月 21 日 上午 9:00-12:00

命题人：郑天宇 史景喆 刘科成 卓永祺 夏振灏 刘子贤

考生必读

1、 考生考试前请务必阅读本须知。

2、 本试题共 4 页，满分 320 分。

3、 如遇到试题印刷不清楚的情况，请向监考老师提出。

4、 需要阅卷老师评阅的内容一定要写在答题纸相应题号后面的空白处；阅卷老师只评阅答题纸上的内容，写在试题纸和草稿纸上的内容一律不被评阅。

一、（45 分）“重力弹球”

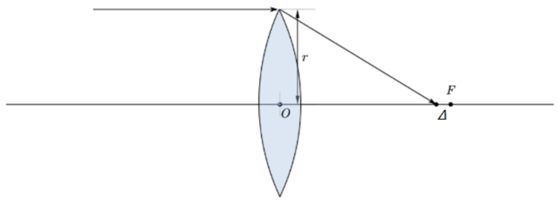
有一个有趣的小游戏叫“重力弹球”，现在我们来研究其中的物理模型。一个弹球（视为质点）从高处以初速度v_0落下。

（1）正下方h处有一半径为r的球状障碍物，$r \ll h$，取$v_0 = 0$，弹球可以在一个较小的范围改变水平方向的位置，试求小球运动范围，给定重力加速度g，碰撞为完全弹性碰撞。

（2）将球状障碍物换为一个正在以角速度ω旋转的六棱柱，边长为$a, a \ll h$，六棱柱表面光滑且碰撞为完全弹性碰撞，取$v_0 = 0$，已知第一个弹球撞击时六棱柱最上面的面倾角为α，每隔$t = \frac{3\pi}{\omega}$就有一球释放，求驱动六棱柱的平均功率，每个质点质量为m。

（3）当然实际情况不可能这么简单，通常你能改变的是出射的角度而非位置，即v_0方向任意，正下方h处有一平面，平面与水平面夹角为θ，平面恢复系数为$e = 1$，摩擦因数为μ，若弹球能做类似于周期运动以重复一致的轨迹在平面上下降，求各参数应满足的条件。

二、（45 分）凸透镜



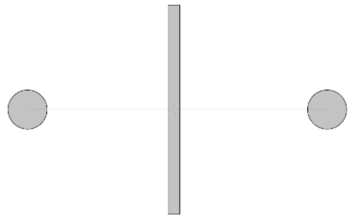
（1）如图，已知该凸透镜左右两面均为球面，左边球面半径为r_1，右边球面半径为r_2，玻璃折射率为n，试从球面成像公式出发，算出该透镜的焦距。

（2）凸透镜的像散是由入射光的非傍轴性导致的，射到透镜边缘的光并不汇聚到焦点 F 上。像散值等于边缘光汇聚的焦点与傍轴光汇聚的焦点的距离。如图，现设该透镜的半径为r（$r \ll f$），一束平行光由左方射来，试求该透镜对该平行光的像散值Δ，用r_1, r_2, r, f表示，精确到r^2项。

（3）设$r_1 = 1\text{m}$，$r_2 = 2\text{m}$，$f = \frac{4}{3}$ m，$r = 1.5$ cm，求Δ。

三、（60 分）M-B 玩家

（1）欢迎进入 M-B 玩家视野：考虑一些分子质量m的单原子理想气体分子。



（1.1）若空间中存在对单个分子的球对称的势场$E_p(r)=\frac{\alpha r^2}{2}$，已知总粒子数$N$、温度$T$，求粒子距离球对称中心的平均距离$\bar{r}$，总势能$E_p$，定容热容$C_V$。

（1.2）若在无限高，底面积为S的柱筒中装有这种气体，单个分子的势场为$E_p(z)=\frac{\alpha z^2}{2}$，$z$为到圆柱地面的距离。$N,T$均为已知量，求压强分布$p(z)$，粒子平均高度$\bar{z}$及$E_p,C_V$。

（2）恭候挑战变异理论：

（2.1）泛滥高维：已知半径R的n维球表面积（为待定数列），求n维空间中 Maxwell gas 平衡态下与泄流分子束中的速率分布，并指出$(n+1)$维中平衡态下速率分布下与n维中泄流分子数中速率分布的关系。

（2.2）珍稀狭相：考虑对相对论粒子 Maxwell 分布。讨论静质量m，温度为T的理想气体分子，求其速率分布。请将这一讨论运用于近似经典粒子、极端相对论粒子，分别求出其速率分布；再将这一讨论运用于光子，求其动量分布。

（3）热辐射小建模：

（3.1）考虑无限长的黑体内外圆柱，其分别与温度为T_1、T_2的热源接触。分别讨论内外柱共轴；内外柱轴距为b的情况，求出单位长度从内向外的净热流。并求第二种情况下，外柱面上θ处单位面积从热源吸热速率$p(\theta)$，θ是外柱面上一点和外柱轴心的连线与内柱轴心和外柱轴心的连线之间的夹角。

（3.2）若内外柱共轴，但均为反射系数为η的、反射满足博朗体规律的灰体，求从内柱向外柱单位长度上的热流。

（3.3）如图所示，两个温度恒定为T_0、半径为a的黑体球位于厚度很小、半径为R的圆板的两边，两球连线过板中心且垂直于板，且两球到板的距离皆为D。板的导热可以忽略不计。求稳态下，板的温度分布$T(R)$。

四、（40 分）电容器的击穿

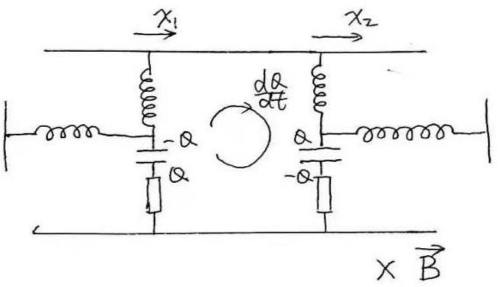
电容器是一种常用的电学元件，而不恰当的使用可能会造成其损坏。本题考查电容器的击穿：采用平行板电容器简化模型，圆形平行板面积为S，不带电时极板间距为d_0；电解质介电常数为ε。

（1）机械击穿：假设下方极板位于固定面上，固体电解质固定在极板上，另一极板固定在电解质上。已知杨氏模量为Y，且假设压力与厚度的关系为$Y\cdot\ln\left(\frac{d_0}{d}\right)$。求加高频交流电后，极板之间允许的最大有效电压值。

（2）热击穿：假设桌面及环境温度均为T_0，d_0很小，电阻率随温度变化满足$\rho=\rho_0e^{-\gamma(T-T_0)}$，电容器单位面积热容量为$C$，上下表面单位面积散热量之和为$\lambda(T-T_0)$。初态$T=T_0$，现加上形如$V=V_0\cos(\omega t)$的交流电，求电容器温度满足的微分方程。当交流电频率足够高，如数十赫兹时，求允许的最大的电压V_0，不要求考虑感生电场。

（3）实验室用的$1\ \mu F$的非极性电容，以及$1\ mH$的电感，判断其击穿以后是短路还是断路。

五、（50 分）电磁感应与振动



如图所示的光滑导轨上放置有两根金属棒，其间距为l。导轨的电阻可以忽略，金属棒上接有电阻R、电感L、电容C，且金属棒与两侧的固定隔板有进度系数为k的不导电弹簧连接，空间中存在如图所示的匀强磁场。左、右两棒偏离平衡位置的坐标分别记为x_1、x_2；电容器上带有的电荷记为Q；各个坐标的方向如图所示。

已知$R = 1\ \Omega, L = 1\ \mathrm{H}, C = 0.5\ \mathrm{F}, B = 1\ \mathrm{T}, m = 1\ \mathrm{kg}, k = 1\mathrm{kg/s^2}, l = 1\ \mathrm{m}$。

初态$x_1 = 0\ \mathrm{m}, x_2 = 1\ \mathrm{m}, v_1 = 1\ \mathrm{m/s}, v_2 = 0\ \mathrm{m/s}, Q = 1\ \mathrm{C}, \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 1\ \mathrm{A}$。

（1）求过了很长时间以后，x_1、x_2与Q的近似表达式。

（2）求对任意$t > 0s$，x_1、x_2与Q的表达式。

六、（80 分）索末菲原子模型和相对论性卢瑟福散射

本题建立一个相对论性的原子模型，并利用该模型研究索末菲氢原子模型和相对论性卢瑟福散射。

注意事项：（1）本题分为三部分：A 部分为铺垫，B 部分与 C 部分互相独立。

（2）本题中请不要使用任何小量近似！

（3）本题忽略原子核内部结构，忽略推迟效应和电磁辐射。

Part A（20 分）相对论性比耐方程

分析一个电荷量为Z_2e，位置固定不动的原子核。在该原子核产生的电场中，存在一个带电量为Z_1e，静质量为m的粒子。取以原子核为原点的极坐标系(r,φ)来研究该粒子的运动。为方便表示，设该粒子的动质量为m'，设距离r的倒数为$u = \frac{1}{r}$ 。已知粒子的角动量为L，总能量为

$$E = m'c^2 + \frac{Z_1Z_2e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

1. 用L, u, φ表示粒子的径向动量p_r和切向动量p_φ。

2. 推导粒子的相对论性比耐方程（u关于φ的二阶微分方程），用u, φ, E, L和一些物理常数表示。提示：相对论形式下$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$仍成立。

Part B（30 分）束缚态：索末菲原子模型

上世纪初，科学家们将上述模型套用在对氢原子的研究上$\left(Z_1 = -1, Z_2 = 1, m = m_e\right)$，得到了索末菲原子模型，并在一定程度上成功解释了谱线分裂等现象。

为方便表示，我们令$\varphi = 0$处对应电子初始时的近核点。

1.请根据比耐方程求出电子的轨道方程（u关于φ的方程）。你可以自己设定一个待定参数A。

2.求出电子轨道每个周期的进动角度。

3.电子运动包含径向和角向两个自由度，所以我们可以得到两个方向上的量子化条件。已知切向方向上的量子化条件为$L = n_\theta \hbar$。同时为方便表示，我们引入参量$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$，$\varepsilon = \frac{\hbar c A}{\alpha E}\left(n_\varphi^2 - \alpha^2\right)$。

请你利用以上三个式子对轨道方程$u(\varphi)$进行化简（化简后的方程仅含$u,\varphi,A,n_\varphi,\alpha,\varepsilon$）。

4.已知径向方向上的量子化条件$\oint P_r dr = n_r h$ （注意这里是h而非$\hbar$），求参数E的值，用n_r,n_φ,α表示。

可能用到的积分公式：

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{a\sin(x)}{1+a\cos(x)}\right)^2 dx=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}-2\pi$$

Part C（30 分）散射态：相对论性卢瑟福散射

我们非常熟悉经典的卢瑟福散射及其微分散射截面。一般情况下我们使用的α粒子来自于原子核的α衰变，能量并不是很高，所以我们能够忽略相对论效应带来的影响。但如果我们用一束高能粒子轰击固定靶，那么可能就需要考虑相对论效应。由于散射的实质是交换虚光子，严格的计算需要使用量子电动力学，但是我们已经做了题文中的许多简化。此题中我们还可以忽略靶原子的电子。已知前面提到的粒子初始（在无穷远处）速度βc，记$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$。假定这粒子从$(r,\varphi)=(\infty,-\varphi_0)$处入射，瞄准距离为$b$，从$(r,\varphi)=(\infty,\varphi_0)$出射，其中$\varphi_0$未知。

1.把L的表达式代入比耐方程，之后请勿在答案中使用L。提示：如果把所有常量直接写出，那么接下来的计算量会很大，为了控制计算量，请你找出一个具有长度量纲的量b_0来代替各种常量，化简你的结果。

2.求出散射角θ和瞄准距离b的关系。

3.求出相对论性卢瑟福散射的微分散射截面$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{relativistic}$，微分散射截面的定义是：$\frac{\text{单位立体角内散射的粒子数}}{\text{单位面积入射的粒子数}}$，用散射角作为自变量。但是，此题中无法用散射角来表示微分散射截面，所以请你用瞄准距离b给出微分散射截面，并且给出用散射角θ确定b的方法。