

第4届 CPHO-S 物理竞赛联考 理论考试试题

考试时间：2021年6月5日 上午 9:00-12:00

命题：简铭 罗启源 郑天宇 翁颢洋 李瀚奕 史景喆 审题：周天宇 夏振灏 组卷：郑天宇

考生必读

- 1、考生考试前请务必阅读本须知。
- 2、本试题共4页，答题卡共8页，总分320分。
- 3、如遇到试题印刷不清楚的情况，请务必向监考老师提出。
- 4、需要阅卷老师评阅的内容一定要写在答题纸相应题号后面的空白处；阅卷老师只评阅答题纸上的内容，写在试题纸和草稿纸上的内容一律不被评阅。

一、(40分) 飓风球

飓风球是一种复杂而又非常有趣的现象，可以帮助我们很好的理解刚体动力学。通过起始时用手旋转，并使用一根管子（如吸管）朝其吹气，刚性连接的两个质量为 M ，半径为 R 的钢球（可整体视为一个刚体）能以极高频率旋转。

Jackson对飓风球现象进行了理论和实验上的分析，他采用分析力学理论给出了系统趋于稳定转动时的拉式函数，以此为基础得到转动角速度与翘起角度之间的关系。



作为对问题的简化，我们忽略质心在水平方向的运动，即假设两球质心 C 被限制在光滑竖直轴上运动，球体与地面间摩擦系数为 μ ，重力加速度为 g 。

(1) 稳定公转。飓风球在初始用手释放后，绕竖直轴转动，为了描述的方便，我们将此转动角速度称为公转角速度 $\vec{\Omega}_0$ 。假定 $t=0$ 时刻系统有绕两球心连线的自转动角速度 $\vec{\omega}_0$ ，在 $\vec{\Omega}$ 不大的情况下（即不会翘起的稳定公转），如图1.1所示，求 $t=0$ 时刻的 \vec{N}_A, \vec{N}_B ，并计算 t 时刻的 $\vec{\Omega}, \vec{\omega}$ 。

(2) 在吸管吹气的作用下，飓风球转速变大，当转速增大到某一临界值时，一端的小球由扰动翘起，一段时间后，体系达到无滑转动，如图1.2所示，此时，两球心连线与桌面间形成很小夹角（ $\alpha \rightarrow 0$ ），试求飓风球此时的角速度，亦即临界转速 $\vec{\Omega}_C$ 。

(3) 稳定进动。求出 α 与 $\vec{\Omega}$ 的关系，并指出最大“翘角” α_m 。

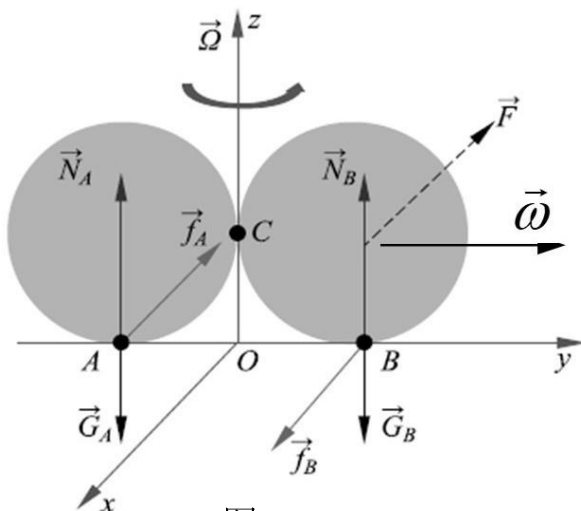


图1.1

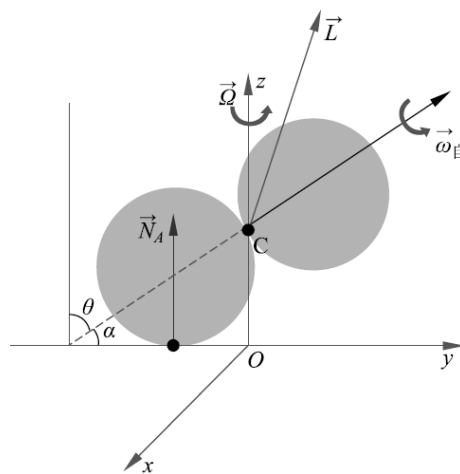


图1.2

二、(40 分) 卫星碰撞

如图 2 所示, 有一质量为 m 的卫星在 XY 平面内绕地球作半径 $R = 2R_E$ 的圆周运动, 沿 Z 轴负方向观察其作顺时针转动。地球视作质量为 M , 半径为 R_E 的匀质球体。另一质量为 $\frac{1}{2}m$, 在无穷远处速度为零的彗星被地球俘获, 其轨道在 YZ 平面内, 对称轴为 Z 轴, 沿 X 轴负方向观察沿顺时针运动。卫星与彗星在 $(0, R, 0)$ 处发生完全非弹性碰撞。

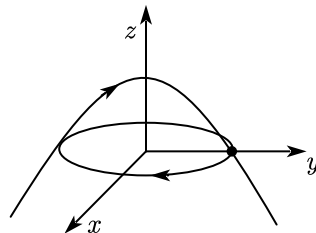


图2

(1) 试求碰撞后结合体的速度 \vec{v} , 以及碰撞后结合体运动轨道的半长轴 a , 离心率 e 。

(2) 证明物体将会与地球碰撞, 并求出卫星彗星从碰撞到结合体与地球碰撞所用时间 t , 用 G, M, R_E 表示。

提示: 抛物线极坐标参数方程

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$$

三、(40 分) 磁悬浮列车

磁悬浮列车是一种靠磁悬浮力来推动的列车, 它通过电磁力实现列车与轨道之间的无接触的悬浮和导向, 再利用直线电机产生的电磁力牵引列车运行。由于其轨道的磁力使之悬浮在空中, 减少了摩擦力, 行走时不同于其他列车需要接触地面, 只受来自空气的阻力, 高速磁悬浮列车的速度可达每小时 400 公里以上。磁悬浮列车的驱动可以由下列模型理解:

现空间中分布着方向竖直向上的变化磁场 $B(x, t)$, 磁场分布随时间变化, 可视为波速 v_0 向右传播的行波, 波形图 3.1 所示。

如图 3.2 所示, 在 $t = 0$ 时刻, 一个边长为 a 的单匝正方形线圈水平放置于磁场中。与 Y 轴平行的两条边分别位于 $x = \frac{a}{2}, x = \frac{3a}{2}$ 。为方便表示, 线圈速度 (向右为正) 记为 $v(t) = v_0 + \delta(t)$ 。当 $t = 0$ 时, $\delta(0) = \delta_0 \ll v_0$ 。线圈的质量为 m , 等效电阻为 R , 等效电感为 L , 等效电容为 C , 电容电量为 $Q(t)$, $Q(0) = 0$, 电路电流记作 $i(t)$ 。

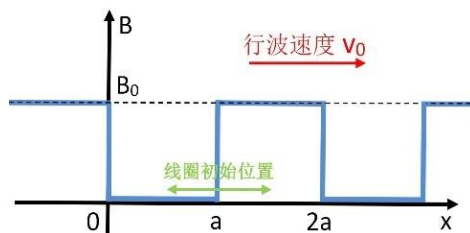


图3.1

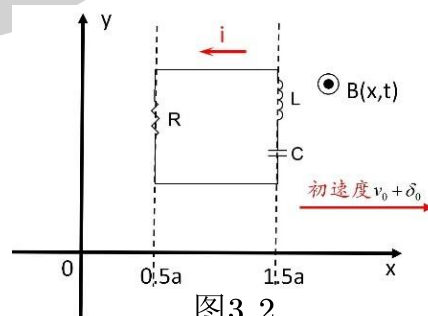


图3.2

(1) 写出线圈感应电动势 $\varepsilon(t)$ (沿逆时针为正) 与 $\delta(t)$ 的关系。

(2) 写出感应电动势 $\varepsilon(t)$ 与电容带电量 $Q(t)$ 的关系。

(3) 写出关于 $i, \frac{di}{dt}, \frac{d^2i}{dt^2}$ 的关系式。

(4) 如果我们要求 $i(t)$ 衰减时不发生振荡, 求等效电阻 R 需满足的条件。

(5) 这个模型的原理和现实中磁悬浮列车的驱动原理有相似之处, 所以我们其实更关心速度差 $\delta(t)$, 试求 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \delta(t)$ 的值。

注: δ_0 足够小以至于我们可以认为在本题讨论的时间范围内 (含 $t = +\infty$), 线圈相对于磁场行波的位移绝对值总小于 $\frac{a}{2}$, 以及, 本题采用的合适方法是不需要求解二阶微分方程的。

四、(40 分) 无线充电

无线充电技术 (Wireless charging technology) 源于无线电能传输技术, 元件间以磁场传递能量, 两者之间不用电线连接, 因此充电器及用电的装置都可以做到无导电接点外露。常见的无线充电方式有三种: 电磁感应式、磁场共振式、无线电波式。本题讨论一个电磁感应式无线充电的简化模型:

(1) 研究表明, 在一个较长的距离进行电磁感应功率传输时, 如在某空间范围内, 传输效率是极低的, 目前, 我们无法接受浪费如此多的能量进行低效率能量转化; 另一方面, 只要在近距离的情况下, 电磁感应能量传输是对于有线传输方案是具备竞争力的。无线感应能量传输具备的便捷性和易用性很适合当今提倡节能减排的要求。现将两个同为 N 匝, 半径分别为 $a = r_0, b = 1.5r_0$ 的线圈同轴放置, 两环所在平面相互平行且环心间距为 $L = r_0$ 。试分别计算两环自感系数 L_a, L_b 和互感系数 M , 并计算耦合系数 $k = M/\sqrt{L_a L_b}$, k 值越趋近 1, 电磁感应传输效率越高。

已知对于某个载流闭合回路 Γ , 其在空间中任意位置激发的磁矢势

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l}}{r},$$

该回路激发的磁场对某回路 Γ' 的磁通

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l},$$

对于具有对称性的耦合系统, 利用磁矢势可以简单地计算回路间的耦合关系。

在利用上述方法计算半径为 r 的环形线圈的自感时, 考虑到导线结构对耦合关系的影响, Γ' 应当等效取与该线圈共平面同圆心, 半径 $r' = 0.95r$ 的圆作为积分回路。

(2) 对于 (1) 中系统, 向 a 线圈输入正弦电压 $U = U_0 \sin \omega t$, b 线圈与一桥式整流电路串联后接在示波器上, 桥式整流电路的二极管可以视为理想二极管, 正向导通电压为 U_d 。忽略线圈损耗, 取 $U_0 = 7\text{ V}, U_d = 0.3\text{ V}$, 画出桥式电路电路图以及示波器波形图。

(3) 将 (2) 中的波形通过信号发生器输出至 RC 滤波电路, $R \gg \frac{1}{\omega C}$, 计算稳态下电容电压 U_C 以及示波器输出电压有效值 $U_{<T>}$ 。
本题所有数值结果要求保留三位有效数字。

五、(40 分) 最大功的具体过程

一个系统对外做功的能力是热学中很重要的问题。在一个非平衡系统建立热平衡的过程中, 系统可以对外做功, 但由于建立平衡的方式不同, 系统的末态也不同, 特别的, 能量也不同, 所以, 从非平衡系统能获得的总功将与过程有关。

我们现在只考虑由系统不平衡性所做的功, 即系统对外界除做功外无任何影响, 过程始末外界复原, 如系统体积不变, 与外界总热交换为零等。

(1) 写出系统由非平衡态到平衡态过程中对外做功的表达式, 用初末能量 E, E' 表示, 并说明何种条件下做功最大。

现考虑一具体情形: 两绝热容器中有粒子数均为 N , 温度均为 T_0 , 绝热系数为 γ 同种理想气体, 但容器体积不同, 分别为 V_1, V_2 。

(2) 求容器连通后最大对外做功 W_m 。

(3) 试构造具体过程, 使可获得 (2) 问中的最大功, 并写出具体运算过程证明你的结论。

六、(40 分) 重绳在有摩擦圆柱上的运动

如图 6 示, 有一半径为 R , 表面摩擦系数为 μ 的圆柱固定在墙面上, 圆柱轴水平。将一长度为 $l_0 = 2L + \pi R$, 线密度为 λ 的匀质重绳对称悬挂其上, 已知重力加速度为 g 。假设绳始终

不会脱离圆柱面或滑移,且垂下部分始终保持竖直状态,现在其一端悬挂一质量为 m 的质点。

(1) 求使绳开始滑动的最小质点质量 m_0 。

(2) 若 $m > m_0$, 求加速度 a 与滑移距离 $x < L$ 、速度 v 之间的关系式 $a = f(x, v)$ 。

(3) 计算当 $\mu = 0.1, v = 0, x = 0, L = \frac{\pi}{2}R, m = 2m_0$ 时加速度 a 的值。

数学提示:

$$\frac{dy}{dx} + \alpha y = e^{-\alpha x} \frac{d(ye^{\alpha x})}{dx},$$

$$\int e^{\alpha x} \cos x dx = \frac{e^{\alpha x}}{1 + \alpha^2} (\alpha \cos x + \sin x) + C_1,$$

$$\int e^{\alpha x} \sin x dx = \frac{e^{\alpha x}}{1 + \alpha^2} (\alpha \sin x - \cos x) + C_2.$$

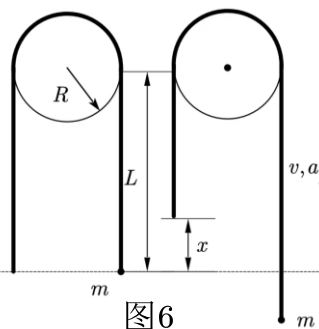


图6

七、(40 分) 散斑干涉

在一面普通镜子上擦一点滑石粉,由镜子后退三四步,用一个小型的手电筒照镜子,并观看灯泡的反射。移动光源使它比你的眼睛离镜子还近,当观察的角度和距离合适时,便可以看见彩色的干涉条纹。此即牛顿曾发现过的“散斑干涉”现象,简化起见可以等效为如下模型:如图 7.1 所示,在一块折射率为 n ,厚为 t 的玻璃板上均匀撒有粉末,粉末可以对光束向各个方向漫反射,玻璃板下表面镀膜以增强反射,其上方 $h \gg t$ 处有一点光源,发出波长为 $\lambda \ll t$ 的光,人眼在光源同一竖直线上高度 $H > h$ 处观察,光源上方的灯罩确保其发出的光不会直射进入人眼。

(1) 画出若干条由 r 处粉末散射进入人眼的光路,以 $a, b, c \dots$ 标记,通过分析各光分量光强判定条纹是由哪两束光干涉产生的。

(2) 计算第 m 个暗环的半径 r_m ($r_m \ll h$)。

(3) 如图 7.2 示,若前问中的光源实际是由三个两两在竖直方向上相距 $d \sim \lambda \ll t$ 的小光源构成,计算额外产生的暗纹位置 r'_m 。

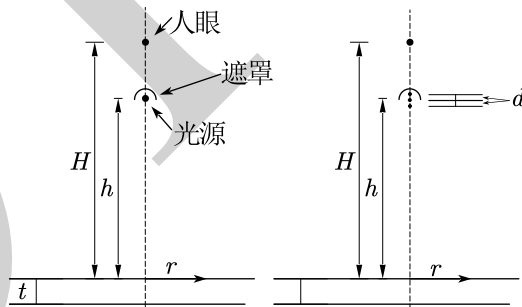


图7.1

图7.2

八、(40 分) 相对论

如图 8 所示,在某惯性系 S 中,地面上有一个黑体以 $v = c\beta$ 的速度匀速向右前进,该黑体在其本征系中为半径为 R 的正球。在 S 系中,以 $t = 0$ 时黑体与地面接触位置为原点,黑体运动方向为 X 轴正方向,竖直向上为 Z 轴正方向建立直角坐标系。 S 系中存在沿 $-z$ 方向的均匀“光子雨”,当光子雨不受阻碍落到地面上时,地面单位面积单位时间接收能量为 P 。考虑狭义相对论,不考虑黑体辐射,忽略重力。

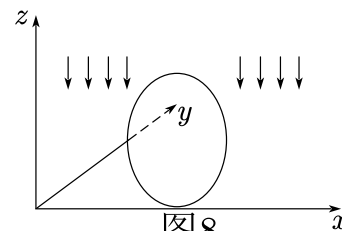


图8

(1) 求 S 系中, t 时刻地面上阴影边界的解析式。

(2) 求 S 系中,为了维持该黑体的运动,施加给其的力 \vec{F} 。认为地面不会反射光子,与黑体也没有相互作用。

(3) 如果仅仅给黑体施加 z 方向的力以保持其中心高度不变,而在 $t = 0$ 时撤去 x 方向的力,求此后黑体的速度随时间 t 的变化关系,已知黑体静质量为 m_0 , $t = 0$ 时刻速度 $v = c\beta_0$ 。特殊地,计算在 $\beta_0 = 0.5$ 的情况下,黑体中心沿 x 方向移动的最远距离。