

## 第4届 CPHO-S 物理竞赛联考

### 理论试题参考解答及评分标准

命题：简铭 罗启源 郑天宇 翁颢洋 李瀚奕 史景喆 审题：周天宇 夏振灏 组卷：郑天宇

#### 一、(40分) 飓风球

飓风球是一种复杂而又非常有趣的现象，可以帮助我们很好的理解刚体动力学。通过起始时用手旋转，并使用一根管子（如吸管）朝其吹气，刚性连接的两个质量为 $M$ ，半径为 $R$ 的钢球（可整体视为一个刚体）能以极高频率旋转。



Jackson对飓风球现象进行了理论和实验上的分析，他采用分析力学理论给出了系统趋于稳定转动时的拉式函数，以此为基础得到转动角速度与翘起角度之间的关系。

作为对问题的简化，我们忽略质心在水平方向的运动，即假设两球质心 $C$ 被限制在光滑竖直轴上运动，球体与地面间摩擦系数为 $\mu$ ，重力加速度为 $g$ 。

(1) 稳定公转。飓风球在初始用手释放后，绕竖直轴转动，为了描述的方便，我们将此转动角速度称为公转角速度 $\vec{\Omega}_0$ 。假定 $t=0$ 时刻系统有绕两球心连线的自转转动角速度 $\vec{\omega}_0$ ，在 $\vec{\Omega}$ 不大的情况下（即不会翘起的稳定公转），如图1.1所示，求 $t=0$ 时刻的 $\vec{N}_A, \vec{N}_B$ ，并计算 $t$ 时刻的 $\vec{\Omega}, \vec{\omega}$ 。

(2) 在吸管吹气的作用下，飓风球转速变大，当转速增大到某一临界值时，一端的小球由扰动翘起，一段时间后，体系达到无滑转动，如图1.2所示，此时，两球心连线与桌面间形成很小夹角（ $\alpha \rightarrow 0$ ），试求飓风球此时的角速度，亦即临界转速 $\vec{\Omega}_C$ 。

(3) 稳定进动。求出 $\alpha$ 与 $\vec{\Omega}$ 的关系，并指出最大“翘角” $\alpha_m$ 。

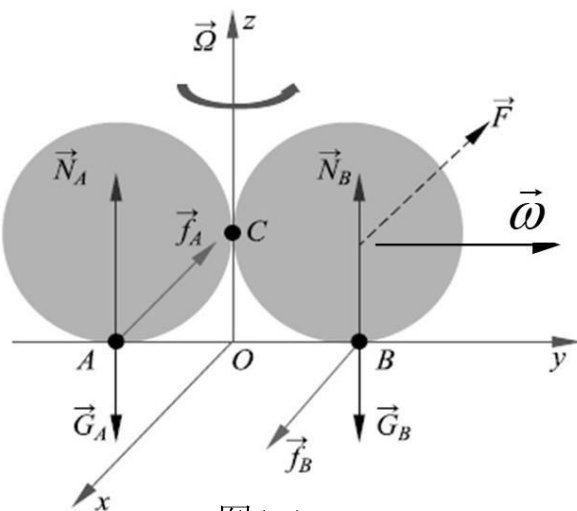


图1.1

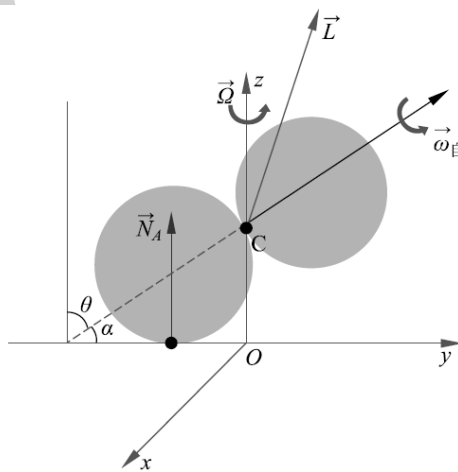


图1.2

解：

(1) 由竖直方向牛顿第二定律

$$N_A + N_B = 2mg \quad (1)$$

由于角速度与角动量有夹角导致A,B受弹力不均

$$\vec{L} = 2 \times \frac{2}{5}mr^2\vec{\omega} + 2 \times \left(\frac{2}{5}mr^2 + mr^2\right)\Omega\vec{k} \quad (2)$$

角动量的变化率为

$$\Omega \vec{k} \times \vec{L} = -2 \times \frac{2}{5} mr^2 \omega \Omega \vec{i} \quad (3)$$

根据角动量定理

$$(N_A - N_B) \times r = 2 \times \frac{2}{5} mr^2 \omega \Omega \quad (4)$$

所以

$$N_A = mg + \frac{2}{5} m \omega \Omega r \quad (5)$$

$$N_B = mg - \frac{2}{5} m \omega \Omega r \quad (6)$$

若  $\omega_0 < \Omega_0$ ，则在摩擦力作用下，角速度大小的变化率满足

$$2 \times \left( \frac{2}{5} mr^2 + mr^2 \right) \frac{d\Omega}{dt} = r(-f_A - f_B) = -2\mu mg \quad (7)$$

$$2 \times \frac{2}{5} mr^2 \frac{d\omega}{dt} = r(f_A - f_B) = \frac{4}{5} \mu m \omega \Omega r \quad (8)$$

得到

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{5g}{7r} t \quad (9)$$

$$\omega = \omega_0 e^{\mu \left( \Omega_0 - \frac{5g}{14r} t \right) t} \quad (10)$$

若  $\omega_0 > \Omega_0$ ，则

$$2 \times \left( \frac{2}{5} mr^2 + mr^2 \right) \frac{d\Omega}{dt} = r(f_A - f_B) = \frac{4}{5} \mu m \omega \Omega r \quad (11)$$

$$2 \times \frac{2}{5} mr^2 \frac{d\omega}{dt} = r(-f_A - f_B) = -2\mu mg \quad (12)$$

得到

$$\omega = \omega_0 - \frac{5g}{2r} t \quad (13)$$

$$\Omega = \Omega_0 e^{\frac{2}{7} \mu \left( \omega_0 - \frac{5g}{4r} t \right) t} \quad (14)$$

(2) 在滑动摩擦力的作用下，系统开始绕两球心连线转动，当自转角速度增大到与公转角速度相等时，达到无滑滚动条件，即

$$\omega = \Omega \quad (15)$$

$$N_B = mg - \frac{2}{5} m \omega \Omega r = 0 \quad (16)$$

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{5g}{2r}} \quad (17)$$

(3) 系统的角动量为

$$L = m\Omega R^2 \sin \theta \left( \frac{4}{5} - 2 \cos \theta \right) \vec{j} + m\Omega R^2 \left( \frac{4}{5} (1 + \cos \theta) + 2 \sin 2\theta \right) \vec{k} \quad (18)$$

假设在整个稳定进动过程中无滑滚动条件均成立，则角动量的时间变化率为

$$\frac{dL}{dt} = \Omega \times L = -m\Omega^2 R^2 \sin \theta \left( \frac{4}{5} - 2 \cos \theta \right) \vec{i} \quad (19)$$

根据角动量定理，支持力提供进动所需的力矩

$$N_A R \sin \theta = m \Omega^2 R^2 \sin \theta \left( \frac{4}{5} - 2 \cos \theta \right) \quad (20)$$

由此得到飓风球翘起角度 $\alpha$ 与进动角速度 $\Omega$ 间的关系

$$\sin \alpha = \frac{2}{5} - \frac{g}{\Omega^2 R} \quad (21)$$

即随着进动角速度的增大，翘起角度不断增大，当角速度 $\Omega$ 趋于无穷大时，翘起角度会渐进的趋于一个最大值

$$\alpha_m = \arcsin \frac{2}{5} \approx 23.6^\circ \quad (22)$$

评分标准：本题满分 40 分。第 (1) 小问 22 分，其中 (5) (6) (7) (8) (11) (12) 式各 1 分，(1) (3) (4) (9) (10) (13) (14) 式各 2 分，(2) 式 4 分；第 (2) 小问 4 分，其中 (15) 式 1 分，(17) 式 3 分；第 (3) 小问 14 分，其中 (19) (20) (22) 式各 2 分，(18) (21) 式各 4 分。

## 二、(40 分) 卫星碰撞

如图 2 所示，有一质量为 $m$ 的卫星在 $XY$ 平面内绕地球作半径 $R = 2R_E$ 的圆周运动，沿 $Z$ 轴负方向观察其作顺时针转动。地球视作质量为 $M$ ，半径为 $R_E$ 的匀质球体。另一质量为 $\frac{1}{2}m$ ，在无穷远处速度为零的彗星被地球俘获，其轨道在 $YZ$ 平面内，对称轴为 $Z$ 轴，沿 $X$ 轴负方向观察沿顺时针运动。卫星与彗星在 $(0, R, 0)$ 处发生完全非弹性碰撞。

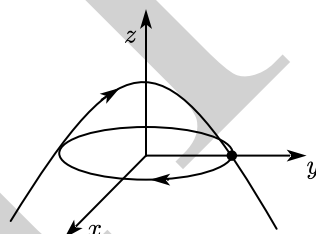


图2

(1) 试求碰撞后结合体的速度 $\vec{v}$ ，以及碰撞后结合体运动轨道的半长轴 $a$ ，离心率 $e$ 。

(2) 证明物体将会与地球碰撞，并求出卫星彗星从碰撞到结合体与地球碰撞所用时间 $t$ ，用 $G, M, R_E$ 表示。

提示：抛物线极坐标参数方程

$$r = \frac{p}{1 + \cos \theta}$$

解：

(1) 卫星做圆周运动，速度

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \hat{x} \quad (1)$$

彗星与卫星焦半径相同，则在焦半径处角向速度大小相同

$$v_{2z} = -\sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (2)$$

在无穷远处速度为零，则总能量为零，可知

$$v_{2y} = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (3)$$

发生完全非弹性碰撞，碰撞前后动量守恒

$$mv_1 + \frac{m}{2}v_2 = \frac{3m}{2}v \quad (4)$$

碰撞后速度

$$v = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{GM}{R}} (2\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}) \quad (5)$$

(2) 碰后单位质量能量

$$\epsilon = \frac{1}{2} v^2 - \frac{GM}{R} = -\frac{2}{3} \frac{GM}{R} \quad (6)$$

单位质量角动量大小

$$h = Rv_t = \frac{\sqrt{5}}{3} \sqrt{GMR} \quad (7)$$

则轨道参数

$$a = -\frac{GM}{2\epsilon} = \frac{3}{4} R \quad (8)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{G^2 M^2}} = \frac{\sqrt{21}}{9} \quad (9)$$

(3)  $\epsilon < 0$ , 为椭圆轨道, 到地心最近距离

$$r_{min} = a(1 - e) = 0.368R < \frac{R}{2} = R_E \quad (10)$$

故会发生碰撞。

轨道焦半径

$$p = a(1 - e^2) = \frac{5}{9} R \quad (11)$$

轨道极坐标方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (12)$$

初始时刻  $r_1 = R$ , 可知对应角度

$$\theta_1 = \arccos \left( \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r_1} - 1 \right) \right) = \pi - \arccos \frac{4}{\sqrt{21}} \quad (13)$$

由于初始径向速度大于零, 碰撞角大于  $\pi$ 。碰撞时  $r_2 = \frac{R}{2}$ , 则

$$\theta_2 = 2\pi - \arccos \left( \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r_2} - 1 \right) \right) = 2\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{21}} \quad (14)$$

由角动量定理

$$h = r^2 \dot{\theta} \quad (15)$$

联立 (7) (12) (15) 式知用时

$$t = \frac{p^2}{h} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \quad (16)$$

代入数值

$$t = \frac{1}{8} (4 + 3\sqrt{3}\pi) \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (17)$$

评分标准: 本题满分 40 分。第 (1) 小问 6 分: 其中 (4) 式 2 分, (5) 式 4 分; 第 (2) 小问 12 分: 其中 (6) (7) 式各 2 分, (8) (9) 式各 4 分; 第 (3) 小问 22 分: 其中 (10) (11) (12) (13) (14) (15) 式各 2 分, (16) 式 4 分, (17) 式 6 分。

### 三、(40 分) 磁悬浮列车

磁悬浮列车是一种靠磁悬浮力来推动的列车,它通过电磁力实现列车与轨道之间的无接触的悬浮和导向,再利用直线电机产生的电磁力牵引列车运行。由于其轨道的磁力使之悬浮在空中,减少了摩擦力,行走时不同于其他列车需要接触地面,只受来自空气的阻力,高速磁悬浮列车的速度可达每小时 400 公里以上。磁悬浮列车的驱动可以由下列模型理解:

现空间中分布着方向竖直向上的变化磁场  $B(x, t)$ , 磁场分布随时间变化, 可视为波速  $v_0$  向右传播的行波, 波形图 3.1 所示。

如图 3.2 所示, 在  $t = 0$  时刻, 一个边长为  $a$  的单匝正方形线圈水平放置于磁场中。与  $Y$  轴平行的两条边分别位于  $x = \frac{a}{2}, x = \frac{3a}{2}$ 。为方便表示, 线圈速度(向右为正)记为  $v(t) = v_0 + \delta(t)$ 。当  $t = 0$  时,  $\delta(0) = \delta_0 \ll v_0$ 。线圈的质量为  $m$ , 等效电阻为  $R$ , 等效电感为  $L$ , 等效电容为  $C$ , 电容电量为  $Q(t), Q(0) = 0$ , 电路电流记作  $i(t)$ 。

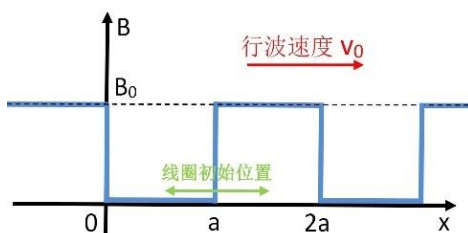


图 3.1

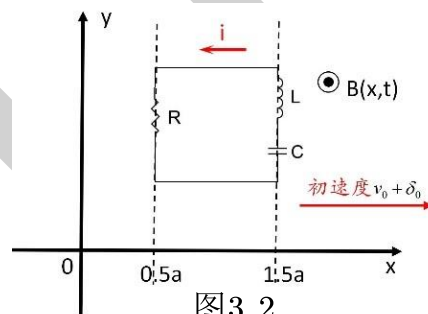


图 3.2

(1) 写出线圈感应电动势  $\varepsilon(t)$  (沿逆时针为正) 与  $\delta(t)$  的关系。

(2) 写出感应电动势  $\varepsilon(t)$  与电容带电量  $Q(t)$  的关系。

(3) 写出关于  $i, \frac{di}{dt}, \frac{d^2i}{dt^2}$  的关系式。

(4) 如果我们要求  $i(t)$  衰减时不发生振荡, 求等效电阻  $R$  需满足的条件。

(5) 这个模型的原理和现实中磁悬浮列车的驱动原理有相似之处, 所以我们其实更关心速度差  $\delta(t)$ , 试求  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \delta(t)$  的值。

注:  $\delta_0$  足够小以至于我们可以认为在本题讨论的时间范围内 (含  $t = +\infty$ ), 线圈相对于磁场行波的位移绝对值总小于  $\frac{a}{2}$ , 以及, 本题采用的合适方法是不需要求解二阶微分方程的。

解:

(1) 由法拉第电磁感应定律:

$$\varepsilon = -\frac{d\varphi}{dt} = -B_0 a \delta \quad (1)$$

(2) 由基尔霍夫定律

$$\varepsilon = L \frac{di}{dt} + iR + \frac{Q}{C} \quad (2)$$

(3) 由牛顿第二定律

$$iB_0 a = m \frac{d\delta}{dt} \quad (3)$$

联立上式可得

$$-B_0 a \delta = L \frac{di}{dt} + iR + \frac{\int_0^t i dt}{C} \quad (4)$$

对(4)式求导得到

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \left( \frac{1}{LC} + \frac{B_0^2 a^2}{mL} \right) i = 0 \quad (5)$$

(4) 令 $i(t)$ 解的形式 $i = i_0 e^{\alpha t}$ , 代入(5)式可得

$$\alpha^2 + \frac{R}{L} \alpha + \left( \frac{1}{LC} + \frac{B_0^2 a^2}{mL} \right) = 0 \quad (6)$$

保证电流衰减必须满足 $\alpha$ 为实数, 即

$$\left( \frac{R}{L} \right)^2 - 4 \left( \frac{1}{LC} + \frac{B_0^2 a^2}{mL} \right) > 0 \quad (7)$$

$$R > 2 \sqrt{\frac{L}{C} + \frac{B_0^2 a^2 L}{m}} \quad (8)$$

(5) 由(3)式积分可得

$$\delta = \delta_0 + \frac{B_0 a}{m} \int_0^t i dt \quad (9)$$

代入(4)式可得

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d\delta}{dt} + \left( \frac{1}{LC} + \frac{B_0^2 a^2}{mL} \right) \delta = \frac{\delta_0}{LC} \quad (10)$$

故当(7)式成立时, 显然有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \delta(t) = \frac{\delta_0}{1 + \frac{B_0^2 a^2 C}{m}} \quad (11)$$

评分标准: 本题满分40分。第(1)小问4分: (1)式4分; 第(2)小问4分: (2)式4分; 第(3)小问10分: 其中(4)式2分, (3)(5)式各4分; 第(4)小问10分: 其中(6)(7)式各2分, (8)式4分,  $\alpha$ 条件2分; 第(5)小问12分: 其中(9)(10)(11)式各4分。

#### 四、(40分) 无线充电

无线充电技术(Wireless charging technology)源于无线电能传输技术, 元件间以磁场传递能量, 两者之间不用电线连接, 因此充电器及用电的装置都可以做到无导电接点外露。常见的无线充电方式有三种: 电磁感应式、磁场共振式、无线电波式。本题讨论一个电磁感应式无线充电的简化模型:

(1) 研究表明, 在一个较长的距离进行电磁感应功率传输时, 如在某空间范围内, 传输效率是极低的, 目前, 我们无法接受浪费如此多的能量进行低效率能量转化; 另一方面, 只要在近距离的情况下, 电磁感应能量传输是对于有线传输方案是具备竞争力的。无线感应能量传输具备的便捷性和易用性很适合当今提倡节能减排的要求。现将两个同为 $N$ 匝, 半径分别为 $a = r_0, b = 1.5r_0$ 的线圈同轴放置, 两环所在平面相互平行且环心间距为 $L = r_0$ 。试分别计算两环自感系数 $L_a, L_b$ 和互感系数 $M$ , 并计算耦合系数 $k = M/\sqrt{L_a L_b}$ ,  $k$ 值越趋近1, 电磁感应传输效率越高。

已知对于某个载流闭合回路 $\Gamma$ , 其在空间中任意位置激发的磁矢势

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{Id\vec{l}}{r},$$

该回路激发的磁场对某回路 $\Gamma'$ 的磁通

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l},$$

对于具有对称性的耦合系统，利用磁矢势可以简单地计算回路间的耦合关系。

在利用上述方法计算半径为 $r$ 的环形线圈的自感时，考虑到导线结构对耦合关系的影响， $\Gamma'$ 应当等效取与该线圈共平面同圆心，半径 $r' = 0.95r$ 的圆作为积分回路。

(2) 对于(1)中系统，向 $a$ 线圈输入正弦电压 $U = U_0 \sin \omega t$ ， $b$ 线圈与一桥式整流电路串联后接在示波器上，桥式整流电路的二极管可以视为理想二极管，正向导通电压为 $U_d$ 。忽略线圈损耗，取 $U_0 = 7\text{ V}$ ， $U_d = 0.3\text{ V}$ ，画出桥式电路电路图以及示波器波形图。

(3) 将(2)中的波形通过信号发生器输出至 $RC$ 滤波电路， $R \gg \frac{1}{\omega C}$ ，计算稳态下电容电压 $U_C$ 以及示波器输出电压有效值 $U_{<T>}$ 。

本题所有数值结果要求保留三位有效数字。

解：

(1) 容易利用对称性得到，电流环 $a$ 在环 $b$ 上任意一点激发的磁矢势均沿曲线切向

$$A(b)_a = \frac{\mu_0 N I_a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \theta d\theta}{\sqrt{(b - a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2 + L^2}} \quad (1)$$

故通过 $b$ 环的磁通量

$$\phi(b)_a = N \cdot 2\pi b A(b)_a = \frac{\mu_0 N^2 I_a a b}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{(b - a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2 + L^2}} \quad (2)$$

根据自(互)感的定义可知

$$M = \frac{\phi(b)_a}{I_a} = \frac{\mu_0 N^2 a b}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta + L^2}} \quad (3)$$

同理可得

$$L_a = \frac{0.95\mu_0 N^2 a^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{a^2 + (0.95a)^2 - 1.9a^2 \cos \theta}} \quad (4)$$

$$L_b = \frac{0.95\mu_0 N^2 b^2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{b^2 + (0.95b)^2 - 1.9b^2 \cos \theta}} \quad (5)$$

代入数据

$$\begin{aligned} L_a &= 2.9746\mu_0 r_0 N^2, L_b = 4.4619\mu_0 r_0 N^2 \\ M &= 0.5477\mu_0 r_0 N^2, k = \frac{M}{\sqrt{L_a L_b}} = 0.1503 \end{aligned} \quad (6)$$

(2) 注意到示波器可视作理想电压表，即 $R_g \gg \omega L$ ， $L_b$ 近似开路

$$U_1 = \frac{M}{L_a} U_0 \sin \omega t \quad (7)$$

考虑桥式整流电路的输出，分析可知

$$U_{out} = \begin{cases} 0, & |U_{in}| \leq 2U_d \\ |U_{in}| - 2U_d, & |U_{in}| > 2U_d \end{cases} \quad (8)$$

故虚线框2中的电压降 $U_2$ 可以写作

$$U_2 = \begin{cases} 0, & \omega t \in [-0.4842, 0.4842] + k\pi \\ (1.2889|\sin \omega t| - 0.6)\text{V}, & \omega t \in (0.4842, 2.6574) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (9)$$

(3) 由基尔霍夫定律

$$U_2 = U_C + iR + \frac{1}{C} \int idt \quad (10)$$

稳态下, 考虑  $R \gg \frac{1}{\omega C}$ , 应有

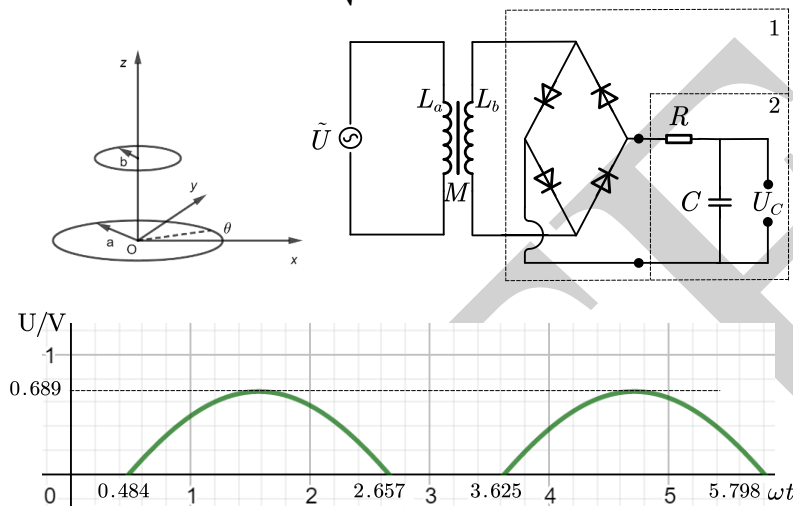
$$U_C = \overline{< U_2 >_t} \quad (11)$$

分段积分得到

$$U_C = 0.3112 \text{ V} \quad (12)$$

输出电压有效值

$$U_{<T>} = \sqrt{< U_2^2 >_t} = 0.4123 \text{ V} \quad (13)$$



评分标准: 本题满分 40 分。第 (1) 小问 10 分: 其中 (1) 式 2 分, (6) 式 8 分; 第 (2) 小问 16 分: 其中 (8) 式 2 分, (7) (9) 式各 4 分, 桥式整流电路 4 分, 示波器波形图 2 分; 第 (3) 小问 14 分: 其中 (10) 式 2 分, (11) (12) (13) 式各 4 分。

### 五、(40 分) 最大功的具体过程

一个系统对外做功的能力是热学中很重要的问题。在一个非平衡系统建立热平衡的过程中, 系统可以对外做功, 但由于建立平衡的方式不同, 系统的末态也不同, 特别的, 能量也不同, 所以, 从非平衡系统能获得的总功将与过程有关。

我们现在只考虑由系统不平衡性所做的功, 即系统对外界除做功外无任何影响, 过程始末外界复原, 如系统体积不变, 与外界总热交换为零等。

(1) 写出系统由非平衡态到平衡态过程中对外做功的表达式, 用初末能量  $E, E'$  表示, 并说明何种条件下做功最大。

现考虑一具体情形: 两绝热容器中有粒子数均为  $N$ , 温度均为  $T_0$ , 绝热系数为  $\gamma$  同种理想气体, 但容器体积不同, 分别为  $V_1, V_2$ 。

(2) 求容器连通后最大对外做功  $W_m$ 。

(3) 试构造具体过程, 使可获得 (2) 问中的最大功, 并写出具体的运算过程证明你的结论。

解:

(1) 初始能量为  $E$ , 末态能量为  $E'$ , 由于除温度  $T$  外无其他参量变化, 由热力学第一定律, 对外做功为

$$W = E_0 - E \quad (1)$$

其他参量不变,  $E$  可视为熵  $S$  的单变量函数, 对  $S$  求导



$$\frac{dW}{dS} = -\frac{dE}{dS} = -\frac{1}{T} < 0 \quad (2)$$

可见,  $W$  为  $S$  的减函数, 而由于总热交换为 0,  $\Delta S \geq 0$ , 故  $\Delta S = 0$  时  $W$  最大。

(2) 由热力学第二定律, 系统和外界整体作为一个孤立系统, 总熵变大于等于零。系统混合前后外界复原, 熵变为 0, 则系统熵变大于等于 0。由“正确”的理想气体熵公式:

$$S = Nk \left( \frac{1}{\gamma - 1} \ln T + \ln \frac{V}{N} \right) + S_0(N) \quad (3)$$

其中  $k$  为 Boltzmann 常数,  $N$  为粒子数,  $T$  为温度,  $V$  为体积,  $S_0(N)$  为只与  $N$  有关的可加函数 (线性函数)。设混合平衡后系统温度为  $T$ , 则总熵变

$$\Delta S = Nk \left( \frac{2}{\gamma - 1} \ln \frac{T}{T_0} + \ln \frac{(V_1 + V_2)^2}{4V_1V_2} \right) \geq 0 \quad (4)$$

可知最小末温

$$T = \left( \frac{2\sqrt{V_1V_2}}{V_1 + V_2} \right)^{\gamma-1} T_0 \quad (5)$$

外界复原, 内能变化为零, 由热力学第一定律, 系统对外做功等于内能减少量, 当末温最小时, 对外做功最大

$$W = \frac{2Nk}{\gamma - 1} (T_0 - T) = \frac{2NkT_0}{\gamma - 1} \left( 1 - \left( \frac{2\sqrt{V_1V_2}}{V_1 + V_2} \right)^{\gamma-1} \right) \quad (6)$$

(3) 最大功要求熵变为零, 则全过程应为准静态。在容器连接处插入隔板, 首先将隔板移至末态平衡位置, 移动过程中对外做功, 使气体体积相等, 气体经历绝热过程, 温度变为

$$T_1 = \left( \frac{2V_1}{V_1 + V_2} \right)^{\gamma-1} T_0 \quad (7)$$

$$T_2 = \left( \frac{2V_2}{V_1 + V_2} \right)^{\gamma-1} T_0 \quad (8)$$

之后以气体为高低温热源, 用微小可逆 Carnot 热机对外做功。不妨设  $V_1 > V_2$ , 某时刻气体温度分别为  $t_1, t_2$ , 则微小 Carnot 热机吸放热分别为

$$dQ_1 = -\frac{Nk}{\gamma - 1} dt_1 \quad (9)$$

$$dQ_2 = \frac{Nk}{\gamma - 1} dt_2 \quad (10)$$

由 Carnot 定理, 吸放热之比

$$\frac{dQ_2}{dQ_1} = -\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{t_2}{t_1} \quad (11)$$

积分得

$$t_1 t_2 = \text{const} \quad (12)$$

可知末温与 (3) 式一致, 而对外做功即为内能减少量, 与 (4) 式一致, 此过程可行。

**评分标准: 本题满分 40 分。第 (1) 小问 8 分: 其中 (1) 式 2 分, (2) 式 4 分, 说明 2 分; 第 (2) 小问 12 分: 其中 (4) (5) (6) 式各 2 分, (3) 式 6 分; 第 (3) 小问 20 分: 其中 (7) (8) (9) (10) (12) 各 2 分, (11) 式 6 分, 说明 4 分, 其他合理方法亦可给分。**

## 六、(40 分) 重绳在有摩擦圆柱上的运动

如图 6 示, 有一半半径为  $R$ , 表面摩擦系数为  $\mu$  的圆柱固定在墙面上, 圆柱轴水平。将一长

度为  $l_0 = 2L + \pi R$ ，线密度为  $\lambda$  的匀质重绳对称悬挂其上，已知重力加速度为  $g$ 。假设绳始终不会脱离圆柱面或滑移，且垂下部分始终保持竖直状态，现在其一端悬挂一质量为  $m$  的质点。

(1) 求使绳开始滑动的最小质点质量  $m_0$ 。

(2) 若  $m > m_0$ ，求加速度  $a$  与滑移距离  $x < L$ 、速度  $v$  之间的关系式  $a = f(x, v)$ 。

(3) 计算当  $\mu = 0.1, v = 0, x = 0, L = \frac{\pi}{2}R, m = 2m_0$  时加速度  $a$  的值。

数学提示：

$$\frac{dy}{dx} + \alpha y = e^{-\alpha x} \frac{d(ye^{\alpha x})}{dx},$$

$$\int e^{\alpha x} \cos x dx = \frac{e^{\alpha x}}{1 + \alpha^2} (\alpha \cos x + \sin x) + C_1,$$

$$\int e^{\alpha x} \sin x dx = \frac{e^{\alpha x}}{1 + \alpha^2} (\alpha \sin x - \cos x) + C_2.$$

解：

(1) 临界条件下，

$$a = 0, v = 0 \quad (1)$$

考虑柱面上  $\theta$  位置处一段绳元的受力，右端绳顶部拉力

$$T(0) = (\lambda L + m_0)g \quad (2)$$

左端绳顶部拉力

$$T(\pi) = \lambda Lg \quad (3)$$

由力平衡，临界滑动时

$$dT = -\mu(T + \lambda Rg \sin \theta)d\theta + \lambda Rg \cos \theta d\theta \quad (4)$$

解得

$$T(\theta) = Ae^{-\mu\theta} + \frac{2\mu}{1 + \mu^2} \lambda Rg \cos \theta + \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \lambda Rg \sin \theta \quad (5)$$

代入 (2) (3) 式可得

$$m_0 = \lambda \left[ (e^{\mu\pi} - 1)L + (e^{\mu\pi} + 1) \frac{2\mu R}{1 + \mu^2} \right] \quad (6)$$

(2) 同理，此时

$$T(0) = [\lambda(L + x) + m] \cdot (g - a) \quad (7)$$

$$T(\pi) = \lambda(L - x) \cdot (g + a) \quad (8)$$

滑动时

$$dN = (T + \lambda Rg \sin \theta - \lambda v^2)d\theta \quad (9)$$

$$df = \mu dN = \mu(T + \lambda Rg \sin \theta - \lambda v^2)d\theta \quad (10)$$

即

$$dT = -\mu(T + \lambda Rg \sin \theta - \lambda v^2)d\theta + \lambda Rg \cos \theta d\theta - \lambda R a d\theta \quad (11)$$

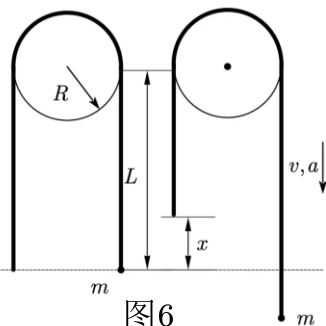
利用题给公式化简得

$$T(\theta) = Ae^{-\mu\theta} + \frac{2\mu}{1 + \mu^2} \lambda Rg \cos \theta + \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \lambda Rg \sin \theta + \lambda \left( v^2 - \frac{Ra}{\mu} \right) \quad (12)$$

代入边界条件

$$[\lambda(L + x) + m](g - a) - \frac{2\mu}{1 + \mu^2} \lambda Rg - \lambda \left( v^2 - \frac{Ra}{\mu} \right) = \lambda(L - x)(g + a) + \frac{2\mu}{1 + \mu^2} \lambda Rg - \lambda \left( v^2 - \frac{Ra}{\mu} \right) \quad (13)$$

解得



$$a = \frac{m + \lambda \left[ (e^{\mu\pi} + 1) \cdot \left( x - \frac{2\mu}{1 + \mu^2} R \right) + (e^{\mu\pi} - 1) \cdot \left( \frac{v^2}{g} - L \right) \right]}{m + \lambda \left[ (e^{\mu\pi} + 1) \cdot L + (e^{\mu\pi} - 1) \cdot \left( \frac{R}{\mu} - x \right) \right]} \cdot g \quad (14)$$

(3) 当  $\mu = 0.1, v = 0, x = 0, L = \frac{\pi}{2} R, m = 2m_0$  时

$$m = 1.049\lambda R \quad (15)$$

$$a = 0.110g \quad (16)$$

评分标准：本题满分 40 分。第 (1) 小问 15 分：其中 (1) (2) (3) 式各 2 分，(4) (5) (6) 式各 3 分；第 (2) 小问 20 分：其中 (7) (8) (9) (10) 式各 2 分，(11) (12) (14) 式各 4 分；第 (3) 小问 5 分：其中 (15) 式 2 分，(16) 式 3 分。

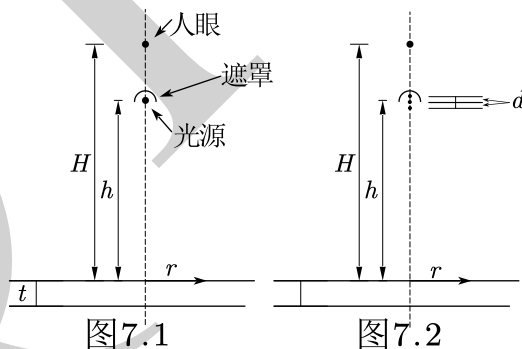
### 七、(40 分) 散斑干涉

在一面普通镜子上擦一点滑石粉，由镜子后退三四步，用一个小型的手电筒照镜子，并观看灯泡的反射。移动光源使它比你的眼睛离镜子还近，当观察的角度和距离合适时，便可以看见彩色的干涉条纹。此即牛顿曾发现过的“散斑干涉”现象，简化起见可以等效为如下模型：如图 7.1 所示，在一块厚为  $t$  的玻璃板上均匀撒有粉末，粉末可以对光束向各个方向漫反射，玻璃板下表面镀膜以增强反射，其上方  $h \gg t$  处有一点光源，发出波长为  $\lambda \ll t$  的光，人眼在于光源同一竖直线上高度  $H > h$  处观察，光源上方的灯罩确保其发出的光不会直射进入人眼。

(1) 画出若干条由  $r$  处粉末散射进入人眼的光路，以  $a, b, c \dots$  标记，通过分析各光分量光强判定条纹是由哪两束光干涉产生的。

(2) 计算第  $m$  个暗环的半径  $r_m$  ( $r_m \ll h$ )。

(3) 如图 7.2 示，若前问中的光源实际是由三个两两在竖直方向上相距  $d \sim \lambda \ll t$  的小光源构成，计算额外产生的暗纹位置  $r'_m$ 。



解：

(1) 如图所示为三条主要光线  $a, b, c$ ，其中光线  $a$  由粉末直接散射射进入人眼， $b, c$  光线在经过两次透射、一次反射、一次散射后进入人眼。干涉应由强度接近的光束相互作用，故  $b, c$  光束发生干涉。

(2) 设  $\phi_b, \phi_c, \phi'_b, \phi'_c$  为光线入射角，出射角， $\theta_b, \theta_c$  为光线折射角，计算两光路的光程由折射定律可知

$$n \sin \theta_b = \sin \phi_b \quad (1)$$

$$n \sin \theta_c = \sin \phi'_c \quad (2)$$

且由几何关系

$$\sin \theta_b = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \quad (3)$$

$$\sin \theta'_c = \frac{r}{\sqrt{r^2 + H^2}} \quad (4)$$

故

$$L_b = \sqrt{h^2 + (r - 2t \tan \theta_b)^2} + \frac{2nt}{\cos \theta_b} \quad (5)$$

$$L_c = \sqrt{h^2 + (r + 2t \tan \theta_c)^2} + \frac{2nt}{\cos \theta_c} \quad (6)$$

光程差

$$\Delta L = L_c - L_b = (L_c - L_0) + (L_0 - L_b) = \frac{t}{n} \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{H} \right)^2 r^2 \quad (7)$$

干涉相消条件

$$\Delta L = \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda, m = 0, 1, 2 \dots \quad (8)$$

故

$$r_m = \frac{\left( m + \frac{1}{2} \right) n \lambda}{t \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{H} \right)^2} \quad (9)$$

(3) 此时, 考虑到  $H, h \gg d$ , 故可以认为光线平行光出射, 相邻点光源光程差

$$l = d \cos \phi \quad (10)$$

分析可知, 干涉相消条件

$$l = \left( \frac{1}{3} + m' \right) \lambda, m' = 0, 1, 2 \dots \quad (11)$$

故

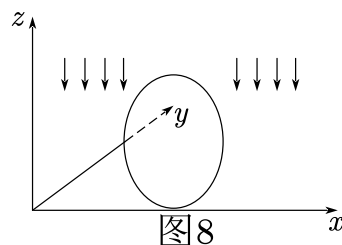
$$r'_m = h \tan \phi_{m'} = h \sqrt{\left( \frac{d}{\left( \frac{1}{3} + m' \right) \lambda} \right)^2 - 1} \quad (12)$$

评分标准: 本题满分 40 分。第 (1) 小问 6 分: 其中图示 3 分, 分析 3 分; 第 (2) 小问 26 分: 其中 (1) (2) (3) (4) 各 2 分, (5) (6) 式各 3 分, (7) 式 8 分, (8) 式 2 分, (9) 式 2 分; 第 (3) 小问 8 分: 其中 (12) 式 2 分, (10) (11) 式各 3 分。

致谢: 感谢王彦臻为本题做出的贡献。

#### 八、(40 分) 相对论

如图 8 所示, 在某惯性系  $S$  中, 地面上有一个黑体以  $v = c\beta$  的速度匀速向右前进, 该黑体在其本征系中为半径为  $R$  的正球。在  $S$  系中, 以  $t = 0$  时黑体与地面接触位置为原点, 黑体运动方向为  $X$  轴正方向, 竖直向上为  $Z$  轴正方向建立直角坐标系。  $S$  系中存在沿  $-z$  方向的均匀“光子雨”, 当光子雨不受阻碍落到地面上时, 地面单位面积单位时间接收能量为  $P$ 。考虑狭义相对论, 不考虑黑体辐射。



(1) 求  $S$  系中,  $t$  时刻地面上阴影边界的解析式。

(2) 求  $S$  系中, 为了维持该黑体的运动, 施加给其的力  $\vec{F}$ 。认为地面不会反射光子, 与黑体也没有相互作用。

(3) 如果仅仅给黑体施加  $z$  方向的力以保持其中心高度不变, 而在  $t = 0$  时撤去  $x$  方向的力, 求此后黑体的速度随时间  $t$  的变化关系, 已知黑体静质量为  $m_0$ ,  $t = 0$  时刻速度  $v = c\beta_0$ 。特殊地, 计算在  $\beta_0 = 0.5$  的情况下, 黑体中心沿  $x$  方向移动的最远距离。

数学提示:

$$\frac{d\beta}{\beta\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{d\alpha}{\sin\alpha} = \frac{d\cos\alpha}{\cos^2\alpha-1} = d\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right), \beta = \sin\alpha$$

解：（1）在黑体球本征系 $S'$ 系中，黑体是一个球体，光子雨的速度方向与 $Z$ 轴夹角

$$\theta = \arcsin\beta \quad (1)$$

分析可知，地面上的投影为一椭圆，椭圆中心

$$r' = (-R\tan\theta, 0, 0) \quad (2)$$

其长短轴

$$a = \frac{R}{\cos\theta}, b = R \quad (3)$$

联立上式，即 $S'$ 中的阴影边界

$$C': \frac{(\sqrt{1-\beta^2}x' + \beta R)^2}{R^2} + \frac{y'^2}{R^2} = 1 \quad (4)$$

由洛伦兹变换

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}}, y' = y \quad (5)$$

得到

$$C: \frac{(x - \beta ct + \beta R)^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1 \quad (6)$$

（2）在 $S'$ 系中，地面上单位面积光子能量

$$P' = \frac{P}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (7)$$

单位时间击中黑体球光子的总能量

$$\varepsilon = P' \cdot \pi ab = \frac{\pi R^2 P}{1-\beta^2} \quad (8)$$

黑体球静质量改变率

$$\frac{dm_s}{dt'} = \frac{\varepsilon}{c^2} \quad (9)$$

在地面系中，由时间延缓

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (10)$$

由动量定理

$$F_x = \frac{dm_s}{dt} \cdot \frac{\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (11)$$

故

$$F_x = \frac{\pi R^2 \beta P}{(1-\beta^2)c} \quad (12)$$

此外，容易得到

$$F_z = \frac{\pi R^2 P}{c} \quad (13)$$

（3）设 $m_s$ 为黑体球静质量，由动量守恒

$$d\left(\frac{m_s \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 0 \quad (14)$$

由此可知

$$dm_s + \frac{d\beta}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (15)$$

又

$$m_s = m_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \frac{\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \quad (16)$$

联立上式

$$\frac{d\beta}{dt} = -\beta^2 \frac{\pi R^2 P}{m_0 c^2} \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{\beta_0} \quad (17)$$

对 (17) 式积分可得

$$\beta = \frac{1}{\frac{1}{\beta_0} + \frac{\pi R^2 P}{m_0 c^2} \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{\beta_0} t} \quad (18)$$

又由 (18) 式可知

$$s_{max} \rightarrow \infty \quad (19)$$

评分标准：本题满分 40 分。第 (1) 小问 12 分：其中 (1) (2) (3) (4) (5) (6) 式各 2 分；  
第 (2) 小问 16 分：其中 (7) (8) (9) (10) (11) (12) 式各 2 分，(13) 式 4 分；第 (3)  
小问 12 分：其中 (14) (15) (16) (17) (18) (19) 式各 2 分。