

第6届 CPHO-S 物理竞赛联考暨38th – CPhO模拟赛

理论考试参考答案及评分标准

考试时间：2021年12月1日 9:00-12:00

命题人：李瀚奕 翁颢洋 任勇钢 史景喆

郑天宇 朱岳宸 杨宸嶒 江弈成

审题人：周天宇 罗启源 刘域尧 周致远

一、(40分)

在日常生活中，我们经常需要调节灯泡的亮度，图1.1为某亮度调节电路。交流电源提供幅值为 U ，角频率为 ω 的正弦交流电，滑动变阻器阻值为 R ，电容的电容量为 C 。表示交流二极管，其伏安特性曲线如图1.2所示；表示交流三极管，其等效电路图如图1.3所示：初态，等效开关 K_t 处于断开状态。当通过栅极（Gate）的电流超过阈值电流 I_t 时， K_t 闭合。 K_t 闭合后，只要途径 K_t 的电流不为零， K_t 将保持闭合不再断开。只有当途经开关 K_t 的电流为零且通过栅极的电流小于阈值电流 I_t 时， K_t 才会断开。

已知三极管等效电阻 R_t 足够大，以至于通过交流二极管的电流相对于通过电容 C 的电流可以忽略不计，且 $I_b \ll I_t$ ， $I_b R_t$ 与 U_d 同数量级，忽略电路中可能存在的电感。

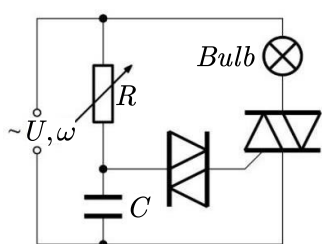


图1.1

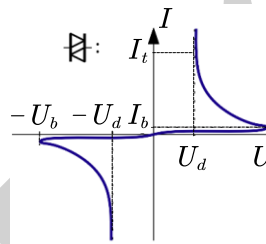


图1.2

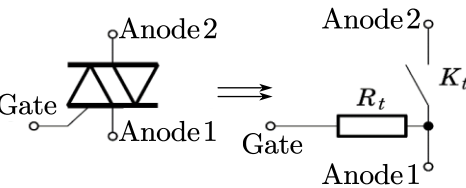


图1.3

- (1) 试求出电容器电压的最大值 U_C 及其相对于电源电压的相位差 φ 。
- (2) 在(1)的基础上，若交流二极管导通瞬间，三极管也立即导通，试推导各参量间应当满足的关系。
- (3) 在(2)的基础上，认为交流二极管导通后的压降始终为 U_d ，当电路稳定后，灯泡上电压随时间的关系示意图如图1.4所示，计算 t_0 的表达式。
- (4) 接(3)，假设灯泡电阻始终不变，且视觉亮度与平均功率成正比。当灯泡直接接到电源两端时，其视觉亮度为 I_0 ，试计算使用调光组件后灯泡视觉亮度 I ，用 t_0 表示，并简述该亮度调节电路相比于直接利用分压电路调节灯泡亮度的优势。

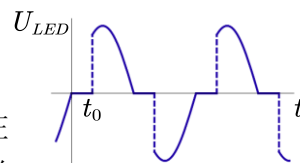


图1.4

解：(1) 由交流电路知识可得

$$\widetilde{U}_C = \frac{\widetilde{Z}_C}{\widetilde{Z}_C + R} \widetilde{U} \quad (1)$$

$$\widetilde{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \quad (2)$$

$$\widetilde{U}_C = \frac{1}{1 + j\omega CR} \widetilde{U} \quad (3)$$

$$U_C = \frac{U}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \quad (4)$$

$$\varphi = -\arctan(\omega CR) \quad (5)$$

(2) 由二极管伏安特性曲线知, 其导通电压为 U_b , 对应的本底电流为 I_b 。

当二极管即将导通但尚未导通时, 电容器两端电压

$$U_{total} = U_b + I_b R_t \quad (6)$$

二极管导通瞬间, 二极管分压迅速降低, 电流快速升高, 同时 R_t 分压上升, 直至二极管和 R_t 上的电压之和再次达到 U_{total} 。

要使得再次平衡时的电流大于 I_t , 需保证

$$U_{total} > U_d + I_t R_t \quad (7)$$

联立上式

$$U_b - U_d > (I_t - I_b) R_t \quad (8)$$

(3) 当 $t = t_0$ 时, 恰好导通, 此时电容器两端电压满足

$$U_{total} = U_C \sin(\omega t_0 + \varphi) \quad (9)$$

联立上式

$$t_0 = \frac{\arcsin \frac{U_b + I_b R_t}{U_C} - \varphi}{\omega} \quad (10)$$

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \left[\arcsin \frac{U_b + I_b R_t}{U} \sqrt{1 + (\omega RC)^2} + \arctan \omega RC \right] \quad (11)$$

(4) 小灯泡直接接在电源两端时的平均功率

$$\bar{P}_0 = \frac{U^2}{2R_L} \quad (12)$$

引入亮度调节电路后, 电路中的平均功率

$$\bar{P} = \frac{\int_{t_0}^{\frac{1}{2f}} \frac{U^2}{R_L} \sin^2(\omega t) dt}{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{U^2}{2R_L} \left(1 - \frac{\omega}{\pi} t_0 + \frac{\sin 2\omega t_0}{2\pi} \right) \quad (13)$$

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_0} = 1 - \frac{\omega}{\pi} t_0 + \frac{\sin 2\omega t_0}{2\pi} \quad (14)$$

$$I = I_0 \left(1 - \frac{\omega}{\pi} t_0 + \frac{\sin 2\omega t_0}{2\pi} \right) \quad (15)$$

该调光电路的优势在于, 其本质上是利用开关 K_t 的闭合时间来控制亮度, 相比直接使用滑动变阻器减少了不必要的能量损耗。

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 10 分: (1) (2) (3) (4) (5) 式各 2 分;

第 (2) 问 10 分: (6) (7) 式各 3 分, (8) 式 4 分, 未考虑 I_b 扣 2 分;

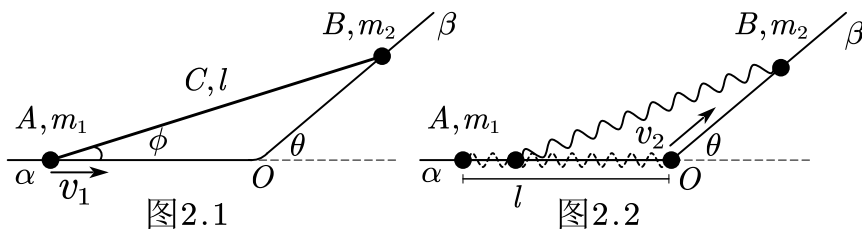
第 (3) 问 10 分: (9) (10) 式各 3 分, (11) 式 4 分, 未考虑 I_b 扣 2 分;

第 (4) 问 10 分: (12) (13) (15) 式各 2 分, 电路优势答到“减少能量损耗”给 4 分, 其他答案依照其合理性酌情给分。

二、(40 分)

竖直平面内有两根固连于 O 的杆, 杆 α 水平, 杆 β 与水平面夹角为 θ 。两个质量为 m_1, m_2 的环 A, B 分别套在杆 α, β 上, 杆 α 与环 A 的摩擦系数为 μ , 杆 β 与环 B 间无摩擦耗散, 重力加速

度为 g 。



(1) 如图2.1所示, 将两环用一长 l 的轻质刚性杆 C 连接, 杆与环连接处为铰接。某时刻, 杆 C 与水平夹角为 ϕ , 且 A 有向右的速度 v_1 , 取 $\mu = 0$, 计算此时环 B 的加速度 a_B 及杆 C 的张力 T 。

(2) 如图2.2所示, 将两环与一原长为零, 劲度系数为 k 的轻质弹簧 D 连接。某时刻, 环 A 静止于与 O 点距离为 l 的位置, 环 B 位于 O 点且具有斜向上的速度 v_2 。

(2.1) 若环 B 向上运动的过程中环 A 发生滑动, 计算 A 滑动时 B 与 O 的距离 s_0 。

(2.2) 在(2.1)的基础上, 若环 A 发生滑动后, 其对杆 α 的压力保持向下, 则一段时间内 A, B 两环间构成的运动为一简正模, 试计算简正模的角频率。

解: (1) 由沿杆方向的速度关联可以得到 B 的速率

$$v_1' = -\frac{\cos \phi}{\cos(\theta - \phi)} v_0 \quad (1)$$

由牛顿第二定律

$$m_1 a_A = -\cos \phi T \quad (2)$$

$$m_2 a_B = m_2 g \sin \theta + \cos(\theta - \phi) T \quad (3)$$

沿杆方向加速度关联

$$a_B \cos(\theta - \phi) - a_A \cos \phi = \frac{[v_0 \sin \phi - v_1' \sin(\theta - \phi)]^2}{l} \quad (4)$$

联立上式

$$T = \frac{\frac{m_1 m_2 \sin^2 \theta}{\cos^3(\theta - \phi)} \cdot \frac{v_0^2}{l} - m_1 m_2 g \sin \theta}{m_1 \cos(\theta - \phi) + \frac{m_2 \cos^2 \phi}{\cos(\theta - \phi)}} \quad (5)$$

(2) (2.1) 分类讨论: 如一开始 A 便开始滑动, 即

$$kl > \mu mg \quad (6)$$

此时

$$s = s_0 \quad (7)$$

当 $\mu mg \geq kl$ 时, 临界情况

$$N = m_1 g - k s_0 \sin \theta \quad (8)$$

$$f = \mu N = k(l + s_0 \cos \theta) \quad (9)$$

联立上式

$$s_0 = \frac{\mu m_1 g - kl}{k(\cos \theta + \mu \sin \theta)} \quad (10)$$

(2.2) 设 A 距离 O 点为 x , B 距离 O 点为 s , 由牛顿第二定律

$$m_1 \ddot{x} = \mu m_1 g - \mu \sin \theta sk - k(x + \cos \theta s) \quad (11)$$

$$m_2 \ddot{s} = -k(s + \cos \theta x) - m_2 g \sin \theta \quad (12)$$

整理可得

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{k}{m_1}x + \frac{k}{m_1}(\cos\theta + \mu\sin\theta)s = \mu m_1 g \\ \ddot{s} + \frac{k}{m_2}s + \frac{k\cos\theta}{m_2}x = -\sin\theta g \end{cases} \quad (13)$$

显然我们可以找到

$$\begin{cases} x' = x + x_1 \\ s' = s + s_1 \end{cases} \quad (14)$$

使得

$$\begin{cases} \ddot{x}' + \frac{k}{m_1}x' + \frac{k}{m_1}(\cos\theta + \mu\sin\theta)s' = 0 \\ \ddot{s}' + \frac{k}{m_2}s' + \frac{k\cos\theta}{m_2}x' = 0 \end{cases} \quad (15)$$

再令

$$\begin{cases} x' = P \cos \omega t + \varphi \\ s' = Q \cos \omega t + \varphi \end{cases} \quad (16)$$

带入得

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \frac{k}{m_1}\right)P + \frac{k}{m_1}(\cos\theta + \mu\sin\theta)Q = 0 \\ \frac{k\cos\theta}{m_2}P + \left(-\omega^2 + \frac{k}{m_2}\right)Q = 0 \end{cases} \quad (17)$$

为了得到非凡庸解, 则

$$\omega^4 - \frac{(m_1 + m_2)k}{m_1 m_2} \omega^2 + \frac{k^2}{m_1 m_2} (\sin^2\theta - \mu \cos\theta \sin\theta) = 0 \quad (18)$$

解得:

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)k}{2m_1 m_2}} \pm \sqrt{\left[\frac{(m_1 + m_2)k}{2m_1 m_2}\right]^2 - \frac{k^2}{m_1 m_2} (\sin^2\theta - \mu \cos\theta \sin\theta)} \quad (19)$$

频率为

$$f_{\pm} = \frac{\omega_{\pm}}{2\pi} \quad (20)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 15 分: (1) (2) (3) 式各 2 分, (4) (5) 式各 4 分;

第 (2) 问 25 分:

第 (2.1) 小问 8 分: 讨论 2 分, (7) 式 2 分, (8) 式 4 分;

第 (2.2) 小问 17 分: (11) (12) (15) (17) 式各 3 分, (19) 式 4 分, (20) 式 1 分。

三、(40分)

某空间中 $y > 0$ 部分有匀强磁场 $\vec{B} = B_0 \hat{z} (B_0 > 0)$ 。一质量为 M , 半径为 R , 绝缘且单位长度带电量为 λ 的匀质圆环以速度 $\vec{v} = v_0 \hat{y} (v_0 > 0)$ 运动, $t = 0$ 时刻, 圆环环心位于 $(0, -R, 0)$, 如图3.1所示, 忽略所有非电磁力作用。

(1) 求使得圆环可以完全进入磁场所需的最小初速度 v_1 。

(2) 取 $v_0 = v_1$, 计算圆环恰好完全进入磁场时, 计算环内张

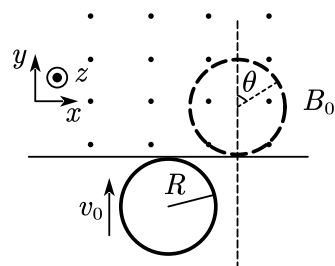


图3.1

力 T 与 θ 的关系。

(3) 接(2), 计算圆环恰好完全进入磁场时, 其圆心坐标 (x, y, z) 。

可能用到的积分公式:

$$\int_0^\theta \theta \sin \theta d\theta = -\theta \cos \theta + \sin \theta$$

$$\int_0^\theta \theta \cos \theta d\theta = \theta \sin \theta + (1 - \cos \theta)$$

解: (1) 由牛顿第二定律与角动量定理

$$M\ddot{x} = 2\lambda R\theta\dot{y}B_0 \quad (1)$$

$$MR^2 \frac{d\omega}{dt} = - \int_{-\theta}^\theta B_0 \cdot \lambda R d\phi \cdot \dot{y} \cdot R \cos \phi \quad (2)$$

考虑到

$$dy = R \sin \theta d\theta \quad (3)$$

联立上式可得

$$d\dot{x} = \frac{2\lambda R^2 B_0}{M} \theta \sin \theta d\theta \quad (4)$$

$$d\dot{\omega} = - \frac{2\lambda R B_0}{M} \sin^2 \theta d\theta \quad (5)$$

对(4)(5)式积分

$$\dot{x} = \frac{2\lambda R^2 B_0}{M} (-\theta \cos \theta + \sin \theta) \quad (6)$$

$$\dot{\omega} = - \frac{\lambda R B_0}{M} (\theta - \sin \theta \cos \theta) \quad (7)$$

由能量守恒

$$\frac{1}{2} M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 = \frac{1}{2} Mv_0^2 \quad (8)$$

解得

$$\dot{y} = \sqrt{v_0^2 - \left(\frac{\lambda R^2 B_0}{M} \right)^2 [4(-\theta \cos \theta + \sin \theta)^2 + (\theta - \sin \theta \cos \theta)^2]} \quad (9)$$

分析可知, \dot{y}^2 在 $\theta \in [0, \pi]$ 区间单调递减, 欲使圆环可以完全进入磁场, 则

$$\dot{y}^2(\theta = \pi) \geq 0 \quad (10)$$

即

$$v_1 = \frac{\sqrt{5}\pi\lambda R^2 B_0}{M} \quad (11)$$

(2.2) 刚进入磁场时

$$\dot{x} = \frac{2\lambda B_0 R^2}{M} \pi, \omega = - \frac{\lambda B_0 R}{M} \pi \quad (12)$$

各质元受洛伦兹力

$$\vec{F} = dq(\dot{x}\hat{x} + \omega\hat{z} \times \hat{r}) \times B_0\hat{z} \quad (13)$$

分析可知, 洛伦兹力中的 $B\dot{x}dq$ 项刚好对圆环各个质元提供 y 方向加速度, 质元的向心加速度由 T 及洛伦兹力中的 $B\omega R dq$ 项提供

$$T d\theta + \lambda R d\theta \cdot \omega R B = \frac{M}{2\pi} d\theta \omega^2 R \quad (14)$$

$$T = -\frac{\pi R^3 B^2 \lambda^2}{2M} \quad (15)$$

负号代表为挤压力。

(2.3) 注意到

$$dx = dy \cdot \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \quad (16)$$

联立 (3) (6) (9) 式

$$dx = \frac{2(-\theta \cos \theta + \sin \theta)}{\sqrt{5 - [4(-\theta \cos \theta + \sin \theta)^2 + (\theta - \sin \theta \cos \theta)^2]}} \cdot R \sin \theta d\theta \quad (17)$$

积分得

$$x = 1.269R \quad (18)$$

圆心坐标

$$(x, y, z) = (1.269, 1, 0)R \quad (19)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 22 分：(1) (2) (3) 式各 2 分，(6) (7) 式各 4 分，(8) (9) 式各 2 分，(11) 式 4 分；

第 (2) 问 10 分：(12) (14) 式各 2 分，(15) 式 3 分，解释或说明 T 为常数 3 分；

第 (3) 问 8 分：(16) (17) (18) (19) 式各 2 分。

四、(40分)

一个世纪以来，气候变化与全球变暖使得人类开始思考如何适应新环境。在宇宙尺度上，地球能量的唯一收支便是黑体辐射，地球自身对外的辐射与太阳对地球的辐射形成了微妙而脆弱的平衡。已知太阳可以视作理想黑体，其表面温度 $T_s = 5790 \text{ K}$ ，日地距离 $d = 1.500 \times 10^{11} \text{ m}$ ，太阳半径 $R_s = 6.955 \times 10^8 \text{ m}$ ，斯忒藩常数 $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{K}^{-4}$ ，地球导热性良好，以至于其各处温度差异可以忽略。本题各小问均保留四位有效数字。

(1) 假设地球也可以视作理想黑体，计算地表温度 T_0 。

(2) 实际上，地球有 $e_1 = 2\%$ 部分的表面被南北极的冰层覆盖，此外有 $e_2 = 3.3\%$ 部分表面被位于赤道的沙漠覆盖，冰层和沙漠均视作理想白体（吸收、发射系数均为零），计算每年 3 月 21 日及 9 月 23 日（即春分日和秋分日，此时太阳直射赤道）地球表面平均温度 T' ，用 T_0, e_i 表示然后计算相应的值。

(3) 忽略 (2) 中的效应，地球仍视作黑体。近地表大气层对于辐射具有一定的吸收和反射作用。如图 4.1 所示，研究表明，不同组分的大气对于不同光谱区域有不同的吸收能力。太阳表面温度较高，其辐射光谱多为可见光，而地球表面温度较低，其辐射光谱多为红外光谱，大气层的作用显然不能同一而论：对于可见光而言，辐射的透射率、反射率分别为 α_1, β_1 ；对于红外光谱而言，辐射的透射系数、反射系数分别为 α_2, β_2 。以及，大气的发射系数 η_i 等于吸收系数 γ_i ，其中

$$\gamma_i = 1 - \alpha_i - \beta_i \quad (4.1)$$

试计算地表温度 T'' ，用 $T_0, \alpha_{1,2}, \beta_{1,2}$ 表示，并代入 $\alpha_1 = 0.70, \beta_1 = 0.10, \alpha_2 = 0.18, \beta_2 = 0.05$ 计算 T'' 的值。

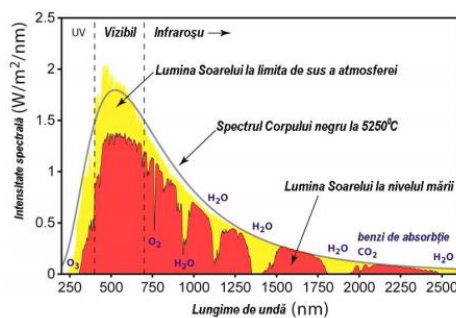


图 4.1

解：(1) 太阳发射的总能量为

$$P_0 = \sigma T_s^4 4\pi R_s^2 \quad (1)$$

地球收到的总能量与投影面积成正比, 根据地球的热量平衡

$$4\pi R_e^2 \sigma T_0^4 = \frac{\pi R_e^2}{4\pi d^2} P_0 \quad (2)$$

得到

$$T_0 = T_s \sqrt{\frac{R_s}{2d}} = 278.8 \text{ K} \quad (3)$$

(2) 设赤道上沙漠的宽度为 l , 当 e 较小时, 由几何关系

$$e_2 = \frac{2\pi Rl}{4\pi R^2} \quad (4)$$

地球从太阳吸收热量

$$Q'_1 = (\pi R_E^2 - 2Rl) \frac{P_0}{4\pi d^2} \quad (5)$$

地球向外辐射热量

$$Q'_2 = 4\pi R_e^2 \sigma T'^4 (1 - e_1 - e_2) \quad (6)$$

热收支平衡

$$Q'_1 = Q'_2 \quad (7)$$

解得

$$T' = T_0 \sqrt[4]{\frac{1 - \frac{4}{\pi} e_2}{1 - e_1 - e_2}} = 279.6 \text{ K} \quad (8)$$

(3) 设大气层温度为 T_g , 地球单位时间吸收的能量为

$$Q''_1 = \alpha_1 \pi R_e^2 \frac{P_0}{4\pi d^2} + 4\pi R_e^2 \beta_2 \sigma T''^4 + 4\pi R_e^2 (1 - \alpha_2 - \beta_2) \sigma T_g^4 \quad (9)$$

辐射的能量为

$$Q''_2 = 4\pi R_e^2 \sigma T''^4 \quad (10)$$

对于云层, 其单位时间吸收的能量为

$$Q_{1g} = (1 - \alpha_1 - \beta_1) \pi R_e^2 \frac{P_0}{4\pi d^2} + 4\pi R_e^2 (1 - \alpha_2 - \beta_2) \sigma T''^4 \quad (11)$$

辐射的能量为

$$Q_{2g} = 2 \cdot 4\pi R_e^2 (1 - \alpha_2 - \beta_2) \sigma T_g^4 \quad (12)$$

热收支平衡

$$Q''_1 = Q''_2, Q_{1g} = Q_{2g} \quad (13)$$

联立上式

$$T_g^4 = \frac{1}{2} T''^4 \left(\frac{(1 + \alpha_2 - \beta_2)(1 - \alpha_1 - \beta_1)}{(1 + \alpha_1 - \beta_1)(1 - \alpha_2 - \beta_2)} + 1 \right) \quad (14)$$

解得

$$T'' = T_0 \sqrt[4]{\frac{1 + \alpha_1 - \beta_1}{1 + \alpha_2 - \beta_2}} = 304.1 \text{ K} \quad (15)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 5 分: (2) 式 2 分, (3) 式 3 分;

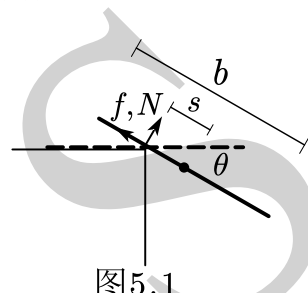
第 (2) 问 15 分: (7) 式 2 分, (4) (5) (6) 式各 3 分, (8) 式 4 分;

第 (3) 问 20 分: (10) (12) (13) 式各 2 分, (9) (11) (14) 式各 3 分, (15) 式 5 分。

五、(40分)

1996年搞笑诺贝尔物理学奖获奖文章讨论了这样一个问题：为啥面包总是涂有黄油的一面着地？很多人将面包着地的问题当做是墨菲定律的证据，但这其实只是一个纯粹的物理问题。一个被广泛认同的观点是涂抹黄油果酱造成的质量分布不对称从而影响到面包的运动，然而，黄油对于面包的总的惯性及空气阻力影响并不大；实验表明，面包掉落过程仅仅是像抛硬币的随机过程，面包落地时的状态完全取决于其下落时的初始条件。

要严格求解这个问题是非常困难的，且必须要借助计算机进行模拟，不过我们可以将其简化为以下模型：如图5.1所示，一块面包片平行于桌沿放在桌面上，其上表面涂有黄油，由于受到扰动而绕桌面转动并滑动下坠，之后与地面发生完全非弹性碰撞，面包片视作厚度 $a \rightarrow 0$ ，长度为 b 的匀质薄板。记面包片脱离桌面前，平板质心相对桌沿滑动距离为 s ，平板相对水平面转角为 θ ，重力加速度为 g ，桌面与板间摩擦系数为 μ ，桌面对平板支持力为 N ，摩擦力为 f 。



(1) 面包刚开始运动时， $s \rightarrow 0$ ，且与桌面间无滑动，计算其相对桌面滑动时 $\theta = \theta_0$ 的值。

(2) 当 $\theta > \theta_0$ 时，写出面包片满足的动力学方程，然后给出 $s, \dot{s}, \ddot{s}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \mu, g, b$ 间满足的两组关系式，并给出面包脱离桌面时 $\dot{s}, \dot{\theta}, \theta, g$ 间应当满足的条件。

(3) 实验表明，面包与桌面脱离时，一般有 $\theta_t \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ ，在本题中，不妨取 $\theta_t = \frac{\pi}{4}$ 。记面包片脱离桌面时 $s = s_0$ 。我们将在 $\mu \rightarrow 0$ 的基础上，估计面包片脱离桌面时的角速度 $\dot{\theta} = \omega_0$ 。

已知，对于方程

$$Ax + \frac{B}{x} = 2C, A, B > 0, C \geq \sqrt{AB} \quad (5.1)$$

容易得到

$$x \in \left[\frac{C}{A}, \frac{B}{C} \right] \quad (5.2)$$

其中 $[p, q]$ 表示 p, q 之间的闭区间。

试给出 s_0 需满足的条件，以及 ω_0 的取值范围与 s_0 的关系。

(4) 严格的计算表明， ω_0 的真实值与(3)中得到区间的较小值较为接近。对于一般情况，餐桌高度 $h = 0.75 \text{ m}$ ，面包片长度 $b = 12 \text{ cm}$ ，其在空中下落的时间

$$t \approx \sqrt{\frac{2(h-b)}{g}} \quad (6.3)$$

计算使得面包片落地时黄油面朝下的 $\varepsilon = \frac{2s_0}{b}$ 的取值范围。

解：(1) 面包此时受支持力 N ，摩擦力 f ，重力 mg 作用，设面包和水平方向夹角为 θ ，则有

$$f = mg \sin \theta, N = mg \cos \theta \quad (1)$$

开始滑动时有临界条件

$$f = \mu N \quad (2)$$

此时

$$\theta_0 = \arctan \mu \quad (3)$$

(2) 对面包关于支撑点列出角动量方程

$$mgs \cos \theta = \frac{d \left[\left(\frac{1}{12} mb^2 + ms^2 \right) \dot{\theta} \right]}{dt} \quad (4)$$

由牛顿第三定律

$$mg \sin \theta - f = m(\ddot{s} - s\dot{\theta}^2) \quad (5)$$

$$mg \cos \theta - N = m(s\ddot{\theta} + 2\dot{s}\dot{\theta}) \quad (6)$$

联立上式

$$gs \cos \theta = \left(\frac{1}{12} b^2 + s^2 \right) \ddot{\theta} + 2s\dot{s}\dot{\theta} \quad (7)$$

$$g \sin \theta - \ddot{s} + s\dot{\theta}^2 = \mu(g \cos \theta - s\ddot{\theta} - 2\dot{s}\dot{\theta}) \quad (8)$$

分析可知, 当面包片脱离桌面时

$$g \cos \theta = 2s\dot{\theta} \quad (9)$$

(3) 由题意, $\mu \rightarrow 0, f \rightarrow 0$, 此时体系能量守恒

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} mb^2 + ms^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\dot{s}^2 = mgs \sin \theta \quad (10)$$

联立 (9) (10) 式

$$\left(\frac{1}{12} b^2 + s_0^2 \right) \omega_0^2 + \left(\frac{g \cos \theta_t}{2} \right)^2 \frac{1}{\omega_0^2} = 2gs_0 \sin \theta_t. \quad (11)$$

为了保证方程有解, 要求

$$gs_0 \sin \theta_t \geq \sqrt{\left(\frac{1}{12} b^2 + s_0^2 \right) \left(\frac{g \cos \theta_t}{2} \right)^2} \quad (12)$$

即

$$\frac{b}{2} \geq s_0 \geq \frac{b \cos \theta_t}{\sqrt{12(4 \sin^2 \theta_t - \cos^2 \theta_t)}} = \frac{b}{6} \quad (13)$$

此时 ω_0 的范围

$$\omega_0 \in \left[\sqrt{\frac{gs_0 \sin \theta_t}{\frac{1}{12} b^2 + s_0^2}}, \sqrt{\frac{g \cos^2 \theta_t}{4s_0 \sin \theta_t}} \right] = \left[\sqrt{\frac{\sqrt{2}gs_0}{2 \left(\frac{1}{12} b^2 + s_0^2 \right)}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{8s_0}} \right] \quad (14)$$

(4) 注意到

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}gs_0}{2 \left(\frac{1}{12} b^2 + s_0^2 \right)}} < \sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{8s_0}}, s \in \left[\frac{b}{6}, \frac{b}{2} \right] \quad (15)$$

即

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}\varepsilon}{1 + 3\varepsilon^2} \frac{g}{b}} \quad (16)$$

面包落地时角度

$$\Delta \theta = \theta_t + \omega t = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}\varepsilon}{1 + 3\varepsilon^2} \frac{2(h-b)}{b}} + \frac{\pi}{4} \quad (17)$$

注意到 $\Delta \theta$ 取极大值时

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{1+3\varepsilon^2} \right) = 0 \rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{3} \quad (18)$$

此时

$$\Delta\theta_{\max} = 4.371 \approx 1.391\pi \quad (19)$$

以及

$$\Delta\theta|_{\varepsilon=\frac{1}{3}} = \Delta\theta|_{\varepsilon=1} = \Delta\theta_{\min} \approx 1.312\pi \quad (20)$$

注意到

$$\frac{3}{2}\pi > \Delta\theta_{\max} > \Delta\theta_{\min} > \frac{1}{2}\pi \quad (21)$$

故对于任意可能的 s_0 ，即

$$1 > \varepsilon > \frac{1}{3} \quad (22)$$

均会使得黄油面朝下落地。

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 4 分：(1) 式 2 分，(3) 式 2 分；

第 (2) 问 16 分：(4) (5) (6) 式各 2 分，(7) (8) 式各 3 分，(9) 式 4 分；

第 (3) 问 10 分：(10) (11) (12) (13) (14) 式各 2 分；

第 (4) 问 10 分：(16) (17) (19) (20) (22) 式各 2 分。

六、(40分)

高斯光束沿传播方向获得相位移，此相移与具有相同光学频率的平面波传播不同。这种差异被称为古伊相移 (Gouy-phase Shift)，其一个很常用的推论是汇聚球面波经过焦点时产生一个快速而连续的相位为 π 的变化；以及，当光沿某一特定方向前进，通过相关波阵面的两个主曲率中心之一时，相位将突然改变 $\pi/2$ 。

本题我们将从衍射积分的角度，在合理近似下，用并不复杂计算导出上述结论。

(1) 考虑一简单的成像系统：在光轴上自左向右依次摆放光源、透镜、光阑与光屏，其两两间距依次为 u, d, x 。已知透镜焦距为 f ，且其半径足够大，光阑透光半径为 a ，试求光屏上亮斑半径 r 及面积 S 。

(2) 我们从波动光学的角度讨论上述光学系统，简化起见认为体系满足傍轴条件，如图 6.1 所示。实际上，光屏上任意一点的光场可以由菲涅尔-基尔霍夫衍射积分计算得到。

菲涅尔-基尔霍夫衍射积分公式的思想与惠更斯原理类似。记 W 为光传播到衍射屏附近的波面， $U(Q)$ 为该波在波面 W 上的光场， s 为观察点 P 到衍射屏 W 上 Q 的距离，则

$$U(P) = -\frac{i}{\lambda} \iint_W U(Q) \frac{e^{iks}}{s} dS \quad (6.1)$$

其中 e^{iks} 为球面波的相位因子项， λ 为单色光波长， $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 为波矢， A 为球面波常数因子， dS 为波面 W 上 Q 附近的面元。

当空间光场为一由 P_0 发出的球面波时

$$U(Q) = \frac{Ae^{ikr}}{r} \quad (6.2)$$

其中 r 为源 P_0 到波面 W 的距离， e^{ikr} 为球面波的相位因子项。

特别的，在傍轴条件下， r, s 不会由于波面 W 及 Q 点的选取有显著的变化，故(6.1)式可以写作

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda r' s'} \iint_W e^{ik(r+s)} dS \quad (6.3)$$

其中 r', s' 分别为源 P_0 和观察点 P 到衍射屏中心的距离。

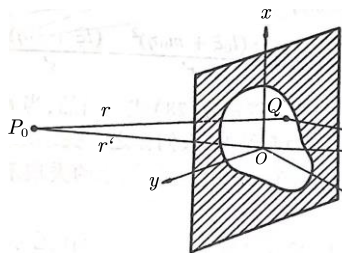


图6.1

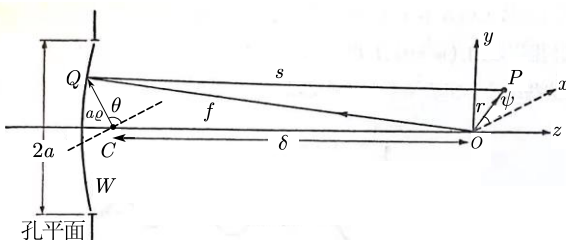


图6.2

(2.1) 如图6.2所示, 考虑一个自左向右传播, 汇聚于轴上焦点 O 的单色球面波。我们将讨论该球面波受到光阑遮挡后于焦点 O 附近(波长量级)某点 P 处的行为。

在 O 点建立直角坐标系 xyz , z 轴正方向为球面波传播方向, W 取光阑平面附近的球面, 球面半径为 f , 球心为 O 点。记光阑半径为 a , 观察点 $P: (r \cos \psi, r \sin \psi, z)$, 球面 W 上某点 $Q: (a \rho \cos \theta, a \rho \sin \theta, \delta), \rho < 1$ 。

已知

$$r^2 + z^2 \ll \lambda f, f \gg a \gg \lambda, a^2 \gg \lambda f \quad (6.5)$$

引入参量

$$u = \frac{2\pi z}{\lambda} \left(\frac{a}{f}\right)^2, v = \frac{2\pi r}{\lambda} \left(\frac{a}{f}\right) \quad (6.6)$$

简化表达式, 做适当近似, 可以得到出 P 点光场的衍射积分表达式

$$U(P) = -\frac{ia^2 A}{2\lambda f^2} e^{iu\left(\frac{f}{a}\right)^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-i\chi} \rho d\rho d\theta \quad (6.7)$$

试给出被积表达式中的指数因子 $\chi = \chi(u, v, \rho, \theta, \psi)$ 。

(2.2) 显然, 上述积分的完整计算不是初等的, 欲严格求解需要用到复杂的数学知识, 故我们仅观察轴上各点的性质。试给出轴上各点光强表达式 $I(u) = |U(u)|^2$, 并计算该光学系统的可允许的焦点公差, 即 $\frac{I(z)}{I(0)} = 0.8$ 时 z 的值。

(2.3) 利用阶跃函数

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

给出轴上各点, 尤其是焦点处的相位信息 $\phi = \phi(u)$, 并指出所有相位突变点的坐标 u 。

解: (1) 由透镜成像公式

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

由几何关系

$$\frac{r}{|v - d - x|} = \frac{a}{|v - d|} \quad (2)$$

联立上式

$$r = \left| \frac{uf - (u-f)(d+x)}{uf - d(u-f)} \right| \quad (3)$$

亮斑面积

$$S = \pi \left(\frac{uf - (u-f)(d+x)}{uf - d(u-f)} \right)^2 \quad (4)$$

(2.1) 由于入射波是汇聚球面波, 故

$$r = -f, r' = s' = f \quad (5)$$

带入近似后的衍射公式, 得到

$$U(P) = -\frac{iA}{\lambda f^2} \iint_W e^{ik(s-f)} dS \quad (6)$$

Q 点在球面 W 上, 对 δ 有约束

$$\delta = -\sqrt{f^2 - a^2 \rho^2} \quad (7)$$

由余弦定理

$$s = \sqrt{r^2 + a^2 \rho^2 - 2ar \cos(\theta - \psi) + (z - \delta)^2} \quad (8)$$

小量近似, 保留至 a^2, z, r 项, 得到

$$s - f = -\frac{\rho ar}{f} \cos(\theta - \psi) + z - \frac{a^2}{2f^2} z \rho^2 \quad (9)$$

衍射面积元在振幅项, 可近似为

$$dS = a^2 \rho d\rho d\theta \quad (10)$$

带入(6)式得到

$$U(P) = -\frac{ia^2 A}{\lambda f^2} e^{i\left(\frac{f}{a}\right)^2 u} \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-i\left[v\rho \cos(\theta - \psi) + \frac{1}{2}u\rho^2\right]} \rho d\rho d\theta \quad (11)$$

$$\chi(u, v, \rho, \theta, \psi) = v\rho \cos(\theta - \psi) + \frac{1}{2}u\rho^2 \quad (12)$$

(2.2) 令 $v = 0$, 并进行积分

$$U(P) = \frac{\pi a^2 A}{f^2} e^{i\left\{\left[\left(\frac{f}{a}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]u - \frac{\pi}{2}\right\}} \frac{\sin \frac{u}{4}}{\frac{u}{4}} \quad (13)$$

由题意

$$I(P) = |U(P)|^2 = \left(\frac{\pi a^2 A}{f^2}\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{u}{4}}{\frac{u}{4}}\right)^2 \quad (14)$$

强度比相斑中心低20%的点的位置

$$\left(\frac{\sin \frac{u}{4}}{\frac{u}{4}}\right)^2 = 80\% \quad (15)$$

可被允许的焦点公差

$$z = \pm 0.515\lambda \left(\frac{f}{a}\right)^2 \quad (16)$$

(2.3) 与半波损失类似, 振幅中因子 $\sin \frac{u}{4}$ 会导致相位的突变, 利用阶跃函数写出相位

$$\phi(u) = \left[\left(\frac{f}{a}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]u - \frac{\pi}{2} + H\left(-\sin\left(\frac{|u|}{4}\right)\right) \quad (17)$$

在焦点处, $u = 0$, 相位为

$$\phi(u) = -\frac{\pi}{2} \quad (18)$$

相位突变处即 $\sin \frac{u}{4}$ 符号改变处

$$u = 4k\pi, k = 1, 2, 3 \dots \quad (19)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 10 分：（1）（2）（4）式各 2 分，（3）式 4 分（不加绝对值得 2 分）；

第（2）问 30 分：

第（2.1）小问 14 分：（5）式或（6）式 2 分，（7）式 2 分，（8）（9）式各 3 分，（11）式 4 分；

第（2.2）小问 8 分：（14）（16）式各 2 分，（13）式 4 分；

第（2.3）小问 8 分：（18）（19）式各 2 分，（17）式 4 分（不利用阶跃函数最多得 2 分）。

七、（40分）

根据标准模型，希格斯（Higgs）粒子是质量之源，其他粒子在希格斯粒子构成的“海洋”中游弋，受它的作用产生惯性并最终有了质量。标准模型的许多重要预言都得到了实验证实，然而在理论中起核心作用的希格斯粒子在2012年之前仍未“显形”。

2012年7月4日，欧洲核子研究中心大型强子对撞机（LHC）上的紧凑缪子线圈实验（CMS）报道了寻找希格斯粒子的最新进展，研究团队以 4.9σ 的置信度（后来修正为 5σ ， σ 为标准偏差）探测到一种新的玻色子，该发现被广泛认为是希格斯粒子存在的证据。

利用大型强子对撞机重新“制造”出希格斯粒子，每亿万次的对撞才有可能产生一个希格斯粒子，并且该粒子会在极短的时间内衰变成其他粒子，因此实验上必须通过希格斯粒子的衰变产物间接进行探测。

根据粒子物理学模型，希格斯玻色子（即希格斯粒子） H 可衰变为一个 μ 子对（这意味着希格斯粒子衰变后两个 μ 子状态一致）和一个光子 γ ，而 μ 子主要的衰变模式为一电子 e^- 、一反电子中微子 ν_e^+ 和一 μ 子中微子 ν_μ ，即

$$H \rightarrow \mu + \mu + \gamma \quad (7.1)$$

$$\mu \rightarrow e^- + \nu_e^+ + \nu_\mu \quad (7.2)$$

已知电子质量 $m_e = 511.00 \text{ keV}/c^2$ ， μ 子质量 $m_\mu = 105.66 \text{ MeV}/c^2$ ，中微子 ν_i 静止质量可略，真空中光速 $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$ ，本题所有结果保留三位有效数字。

（1）在对撞机中，存在许多衰变产生的电子和光子。现有一能量为 E 的光子，与动量为 p 的电子对头碰撞，计算碰撞后光子能量 E' 与光子偏转角 θ 的关系，并讨论 E' 的取值范围。

（2）假设希格斯粒子的初始动能 $T = 400 \text{ GeV}$ ，测得二次衰变后电子的最大能量 $\varepsilon = 517.7 \text{ GeV}$ ，计算希格斯粒子的静止质量 m_H 。

解：（1）（1）由动量守恒

$$p'^2 c^2 = \left(\frac{E}{c} - p\right)^2 + \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{E}{c} - p\right)\frac{E'}{c} \cos \theta \quad (1)$$

能量守恒

$$\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + E = \sqrt{p'^2 c^2 + m^2 c^4} + E' \quad (2)$$

化简得到

$$E' = h\nu' = \frac{\sqrt{p^2 + m^2 c^2} + p}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2} + p \cos \theta + h\nu(1 - \cos \theta)} E \quad (3)$$

讨论：若 $E > pc$ ，则

$$E' \in \left[\frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + pc}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - pc + 2E}, 1 \right] E \quad (4)$$

若 $E < pc$, 则

$$E' \in \left[1, \frac{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} + pc}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - pc + 2E} \right] E \quad (5)$$

(2) 先考虑 μ 子衰变, 欲使电子能量尽可能大, 则 ν_e^+, ν_μ, e^- 运动方向应当与 μ 子运动方向在同一直线上, 记中微子总动量为 p_ν , 由动量守恒

$$p_e = p_\mu - p_\nu \quad (6)$$

由能量守恒

$$\sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2} + p_\nu c = E_\mu \quad (7)$$

联立上式, 解得

$$p_\nu c = \frac{m_\mu^2 c^4 - m_e^2 c^4}{2(E_\mu - p_\mu c)} \quad (8)$$

$$\varepsilon = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} = E_\mu - p_\nu c = E_\mu - \frac{m_\mu^2 c^4 - m_e^2 c^4}{2(E_\mu - \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4})} \quad (9)$$

注意到 $m_e c^2 \ll m_\mu c^2 \ll E_\mu^2$, (11) 式化简为

$$E_\mu \approx \varepsilon \quad (10)$$

再考虑希格斯粒子的衰变, 分析可知当电子具有最大能量时, 希格斯粒子的衰变产物光子不携带能量, 在 (10) 式的基础上, 能量较小的 μ 子能量

$$E'_\mu = T + m_H c^2 - E_\mu \quad (11)$$

由动量守恒

$$\frac{1}{c} \sqrt{E'^2_\mu - m_\mu^2 c^4} - \frac{1}{c} \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{(T + m_H c^2)^2 - m_H^2 c^4} \quad (12)$$

联立上式, 考虑到 $E_\mu, E'_\mu \gg m_\mu c^2$, 化简可得

$$(m_H c^2)^2 - 4\varepsilon \cdot m_H c^2 + 4(\varepsilon^2 - \varepsilon T) = 0 \quad (13)$$

解得

$$m_H c^2 = 125.3 \text{ GeV} \quad (14)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 16 分: (4) (5) 式各 2 分, (1) (2) (3) 式各 4 分 (不加绝对值得 2 分);

第 (2) 问 24 分: (6) (7) (9) (10) (11) (12) 式各 2 分, (8) (13) (14) 式各 4 分。

八、(40分)

一简化的四轮汽车模型如图8.1所示: 将前后轮胎均视为外半径为 R 的柱形刚体, 前后轮轮轴相距 $2L$; 汽车 (包括轮重) 与人总质量为 M , 等效质心 (包括车胎在内) 位于两轮心连线中点上方 H 处, 且认为人与汽车始终保持相对静止; 如果人与车绕其共同质心转动的同时保持轮子相对地面参考系没有转动, 测得此时人车整体绕质心转动惯量为 I_t 。汽车的四个轮胎是完全相同的, 每个轮胎均由内胎与外胎组成, 结构如图8.2所示: 内胎由6根长为 R_i , 质量为 m_i 的匀质细辐条组成, 并

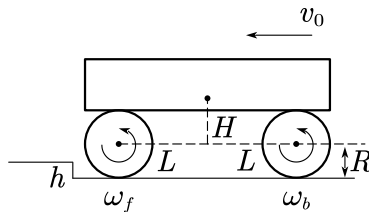


图8.1

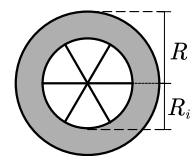


图8.2

测得此时人车整体绕质心转动惯量为 I_t 。汽车的四个轮胎是完全相同的, 每个轮胎均由内胎与外胎组成, 结构如图8.2所示: 内胎由6根长为 R_i , 质量为 m_i 的匀质细辐条组成, 并

与轮轴连接，外胎可以视作质量为 m ，内外半径分别为 R_i, R 的匀质圆柱层。

现有一熄火的汽车以速度 v_0 冲向一个高为 $h = R(1 - \sin \theta)$ 的台阶，这个过程中发动机没有能力提供任何力矩。所有碰撞都是完全非弹性碰撞，台阶与车轮间摩擦系数很大。

已知重力加速度取 $g = 10 \text{ m/s}^2$ ，其余各参量如下：

$$R = 1 \text{ m}, R_i = 0.9 \text{ m}, L = 1 \text{ m}, H = 0.5 \text{ m}, M = 100 \text{ kg},$$

$$m_i = 0.5 \text{ kg}, m = 3.5 \text{ kg}, I_t = 50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, v_0 = 20 \text{ m/s}$$

(1) 计算每对轮胎（一辆汽车有前后两对车轮）对轮轴的转动惯量 I_r ，保留两位有效数字并在之后的计算中将该结果作为真值。

(2) 考虑碰撞前后四个车轮始终与地面接触且无滑的情况，取 $\theta = 60^\circ$ ，计算汽车与台阶碰撞结束后汽车前、后轮角速度 ω_f, ω_b 的值，以及碰撞过程中汽车的总动能损失比例 $\eta = -\frac{\Delta E_k}{E_k}$ ，

保留三位有效数字。

(3) 设后轮支持力冲量 $N_b \rightarrow 0^+$ 时的 $\theta \rightarrow \theta_1$ ；当 $\theta > \theta_2$ 时，碰撞过程汽车后轮会脱离地面。计算 θ_1 的值，并定性分析 θ_1, θ_2 的大小关系，以及 $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ 时后轮的行为，其中 $[p, q]$ 表示 p, q 之间的闭区间。

解：(1) 每个车轮的转动惯量由两部分构成

$$I_1 = 6 \cdot \frac{1}{3} m_i R_i^2 \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} m (R_i^2 + R^2) \quad (2)$$

$$I_r = 2(I_1 + I_2) = 7.95 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \approx 8.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (3)$$

(2) 此时车轮做纯滚动，设前后轮受摩擦力冲量、支持力冲量分别为 f_1, f_2 ，汽车绕质心转动角速度为 Ω ，利用瞬心写出速度关联

$$\frac{2L}{\cos \theta} \Omega = R \omega_f \quad (4)$$

$$2L \tan \theta \Omega = R \omega_b \quad (5)$$

对前后轮写出角动量定理

$$I_r \left(\omega_f - \frac{v_0}{R} \right) = f_1 R \quad (6)$$

$$I_r \left(\omega_b - \frac{v_0}{R} \right) = f_2 R \quad (7)$$

对瞬心写出角动量定理

$$I_t \Omega + M \Omega (L^2 + (2L \tan \theta - H)^2) - I_r (\omega_f + \omega_b) = M v_0 (2L \tan \theta - H) - 4I_r \frac{v_0}{R} - f_1 \frac{2L + R \cos \theta}{\cos \theta} - f_2 (R + 2L \tan \theta) \quad (8)$$

联立上式解得

$$\Omega = \frac{M(2L \tan \theta - H) + \frac{2I_r L}{R^2} \left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta \right)}{I_t + M(L^2 + (2L \tan \theta - H)^2) + 4I_r \left(\frac{L^2}{R^2 \cos^2 \theta} + \frac{L^2 \tan^2 \theta}{R^2} \right)} v_0 \quad (9)$$

$$\omega_f = \frac{2L}{\cos \theta} \Omega = 1.137 \frac{v_0}{R} = 22.74 \text{ rad/s} \quad (10)$$

$$\omega_b = 2L \tan \theta \Omega = 0.9849 \frac{v_0}{R} = 19.70 \text{ rad/s} \quad (11)$$

碰撞发生前，汽车总动能

$$E = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 I_r \left(\frac{v_0}{R} \right)^2 = 2.32 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \quad (12)$$

碰撞后汽车动能

$$E' = \frac{1}{2} \cdot I_r (\omega_f^2 + \omega_b^2) + \frac{1}{2} [I_t + M(L^2 + (2L \tan \theta - H)^2)] \Omega^2 = 2.02 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \quad (13)$$

$$\eta = -\frac{E' - E}{E} = -12.7\% \quad (14)$$

(3) 记汽车前轮收到支持力冲量为 N_1 ，由动量定理

$$N_1 \cos \theta + f_1 \sin \theta + f_2 = M[v_0 - \Omega \cdot (2L \tan \theta - H)] \quad (15)$$

$$N_1 \sin \theta - f_1 \cos \theta = M \Omega L \quad (16)$$

联立 (15) (16) 式，消去 N_1

$$\frac{\Omega R}{v_0} = \frac{108 \tan \theta + \frac{8}{\cos \theta}}{100 - 50 \tan \theta + 216 \tan^2 \theta + \frac{16}{\cos \theta}} \quad (17)$$

联立 (9) (17) 式，解得

$$\theta_1 = 44.92^\circ \quad (18)$$

注意到， $\theta = \theta_1$ 时 $\omega_b \neq \omega_0$ ，这意味着 $f_2 \neq 0$ ，但是脱离时应当有 $f_2 = \mu N_2 = 0$ ，这说明

$$\theta_1 - \theta_2 \neq 0 \quad (19)$$

如果我们将摩擦系数记为 μ ，显然我们在此处考虑的是 $\mu \rightarrow \infty$ 的情况，也就意味着如果将 θ_1 与 θ_2 看成 μ 的函数，那么 (19) 式实际上指

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \theta_1(\mu) - \theta_2(\mu) \neq 0 \quad (20)$$

下文的论述中将 $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \theta_{1,2}$ 简单记作 $\theta_{1,2}$ ，先考虑 μ 有限的情况得到 $\theta_1(\mu)$ 与 $\theta_2(\mu)$ 的大小关系，

再取极限来得到 θ_1 与 θ_2 的大小关系。不难想象，对于 μ 足够大使得前轮不打滑的情况下，随着 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 开始减小，后轮先是纯滚，随后将达到 $f_2 = \mu N_2$ 的状态；此后 θ 继续减小，后轮将会开始滑动，直至 $N_2, f_2 = 0$ 。此后 θ 再小，则后轮将会脱离地面。显然，这两个临界状态分别是 $\theta = \theta_1(\mu)$ 与 $\theta = \theta_2(\mu)$ ，从而应当有

$$\theta_1(\mu) > \theta_2(\mu) \quad (21)$$

故

$$\theta_1 > \theta_2 \quad (22)$$

同时由上述论述可得，当 $\theta_2 < \theta < \theta_1$ 时，后轮会打滑但不脱离地面。

实际上

$$\theta_2 \approx 24^\circ \quad (23)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 6 分：(1) (2) (3) 式各 2 分；

第 (2) 问 18 分：(4) (6) 式共 2 分，(5) (7) 式共 2 分，(8) 式 4 分，(9) 式 4 分，(10) (11) 式各 2 分，(14) 式 2 分。

第 (3) 问 16 分：(15) (16) 式各 2 分，(17) 式 2 分，(18) 式 4 分，(22) 式 2 分，汽车后轮运动状态的分析与结论 4 分。