

第 11 届 CPHO-S 物理竞赛联考暨 39th-CPhO 复赛模拟赛

理论试题参考答案及评分标准

考试时间：2022 年 8 月 27 日 9:00—12:00

命题人：代佳乐 罗民睿 黄文杰 王梓人

陆金浩 李瀚奕 孙烨皓

审题人：王 驰 罗钰涵 向滢滢 龚俊安 陈浩楠

一、(40 分)

如图1.1所示，一对间距为 l 的刚性光滑平行细直导轨固定于空间中，过两导轨的平面与水平面的夹角为 θ ，同时垂直于两导轨的直线水平。两导轨通过串联的电容 C 和二极管 D 相连，电容的电容量为 C ，理想二极管 D 导通电压为 U_D ，不会被击穿。空间中有竖直向下的重力加速度 g 和垂直于过两导轨的平面向下的磁场 B ，正方向如图所示。

现将一质量为 m 、在其与两导轨交点之间的电阻为 R 的刚性光滑细直杆垂直于两导轨静止放置于两导轨间，杆长大于 l 以保证杆不会掉落。

除了 R ，忽略其他所有电阻；除了 C ，忽略其他所有电容；忽略所有电感；除了 D ，忽略其他所有非线性效应。以初始时杆的位置为原点，沿导轨向下为 $+x$ 轴，建立一维坐标系。

已知 $m = CB^2 l^2$, $RC = \frac{U_D}{Blg \sin \theta}$ ，本题答案均用参数 $t_0 = RC$ 和 $x_0 = \frac{1}{2} g R^2 C^2 \sin \theta$ 表示。

- (1) 当 $t \leq t_0$ 时，求杆的运动方程 $x = x(t)$ 。
- (2) 当 $t \geq t_0$ 时，求杆的运动方程 $x = x(t)$ 。
- (3) 当 $t = 2t_0$ 时，求 $\frac{x}{x_0}$ 的值，结果保留三位有效数字。

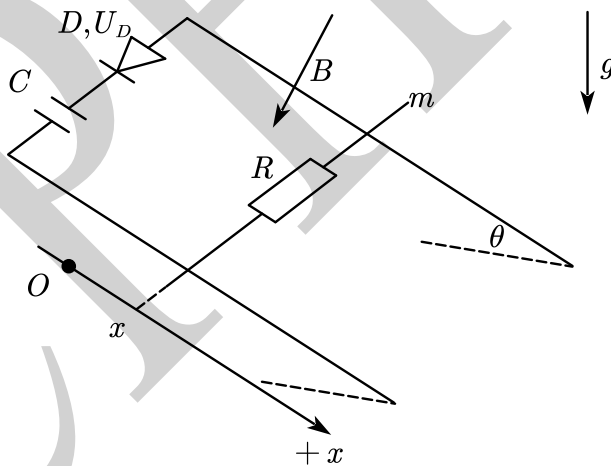


图1.1

解：如图1.2所示设置参数。

- (1) 初始 D 未导通，此时 $I = 0, Q = 0, F_A = 0$ ，杆沿 $+x$ 方向牛顿第二定律：

$$mg \sin \theta = m\ddot{x} \quad (1)$$

得

$$\ddot{x} = g \sin \theta \quad (2)$$

初始条件为 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ ，所以杆做静止开始的匀加速直线运动，运动方程为

$$x(t) = \frac{1}{2} g \sin \theta t^2 \quad (3)$$

电磁感应:

$$\varepsilon = Bl\dot{x} \quad (4)$$

D 未导通需满足:

$$\varepsilon \leq U_D \quad (5)$$

联立 (3) (4) (5) 得条件为

$$t \leq \frac{U_D}{Blg \sin \theta} \quad (6)$$

由题给关系, 得条件恰好为

$$t \leq t_0 \quad (7)$$

这段时间内杆的运动方程由 (3) 式给出。用 x_0, t_0 改写为:

$$x(t) = x_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^2, t \leq t_0 \quad (8)$$

(2) 由 (1) 问, 在 $t > t_0$ 时 D 导通。电磁感应:

$$\varepsilon = Bl\dot{x} \quad (9)$$

安培力:

$$F_A = Bl\dot{Q} \quad (10)$$

回路电压:

$$\varepsilon = \frac{Q}{C} + U_D + R\dot{Q} \quad (11)$$

牛顿第二定律:

$$m\ddot{x} = mg \sin \theta - F_A \quad (12)$$

由 (8) (9) (10) (11) 式得

$$\begin{cases} Bl\dot{x} = \frac{Q}{C} + U_D + R\dot{Q} \\ m\ddot{x} = mg \sin \theta - Bl\dot{Q} \end{cases} \quad (13)$$

消去 x 并代入题给关系 (下省略 “代入题给关系”) 得

$$t_0 \ddot{Q} + 2\dot{Q} = BlCg \sin \theta \quad (14)$$

由 (1) 得初始条件为 $t = t_0, x = x_0, \dot{x} = gt_0 \sin \theta, Q = 0$, 结合 (13) 式得初始 $\dot{Q} = 0$, 因此将 (14) 式分离变量两边积分得

$$\dot{Q} = \frac{U_D}{2R} \left(1 - e^{-\frac{2(t-t_0)}{t_0}} \right) \quad (15)$$

发现 $t > t_0, \dot{Q} > 0$, 所以 D 不会截止。再积分得

$$Q = \frac{U_D}{2R} \left((t - t_0) - \frac{1}{2} t_0 \left(1 - e^{-\frac{2(t-t_0)}{t_0}} \right) \right) \quad (16)$$

将 (15) (16) 式代入 (13) 式得

$$\dot{x} = \frac{U_D}{2Bl t_0} \left(t + t_0 + \frac{1}{2} t_0 \left(1 - e^{-\frac{2(t-t_0)}{t_0}} \right) \right) \quad (17)$$

积分得运动方程

$$x(t) = \frac{1}{4} x_0 \left(2 \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 + 6 \left(\frac{t}{t_0} \right) - 5 + e^{-2 \left(\frac{t}{t_0} - 1 \right)} \right), t \geq t_0 \quad (18)$$

(3) 在 (18) 式中代入 $t = 2t_0$ 得

$$\frac{x}{x_0} = \frac{1}{4} \left(15 + \frac{1}{e^2} \right) = 3.78 \quad (19)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 10 分：(1) (3) (8) 式各 2 分，(2) (4) (5) 式各 1 分，(6) 式或 (7) 式 1 分；

第 (2) 问 28 分：(13) (14) 式各 4 分，(15) (16) (17) (18) 式各 3 分，(9) (10) (11) (12) 式各 2 分；

第 (3) 问 2 分：(19) 式 2 分。

二、(40 分)

(1) 如图 2.1 所示，两块相同的均匀长方体板并排静止于光滑地面上，板与板之间存在微小夹角。每块板质量为 m ，长度为 l ，宽度为 d ，倾角为 θ 。已知重力加速度为 g ，计算平衡时倾角 θ 和板间支持力 N 的大小，并求出板间摩擦系数 μ 需满足的条件，以及 d, l 间需满足的关系。

(2) 如图 2.2 所示，两块相同的均匀长方体板放置在粗糙地面上，假设只有接触棱有力的作用。长方体板长度为 l ，宽度为 d ，倾角分别为 θ_1, θ_2 ，其中 $d/l \rightarrow 0, \theta_1 = 2\theta_2 = \pi/3$ 。欲使体系能够平衡，计算各接触点摩擦因数 μ, μ_1, μ_2 的最小值。

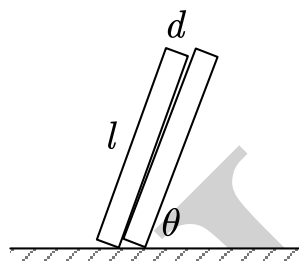


图 2.1

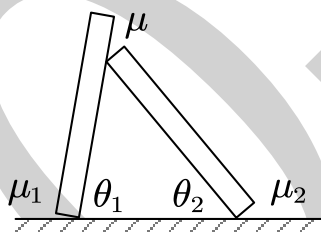


图 2.2

解：

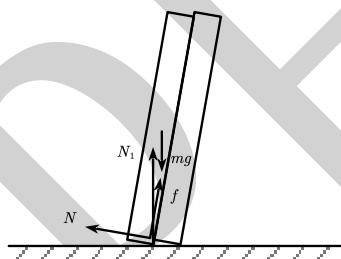


图 2.3

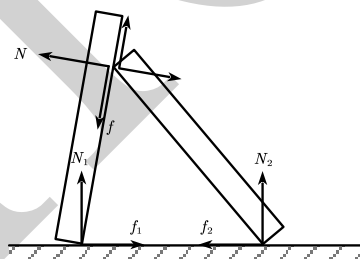


图 2.4

(1) 左板平衡方程（长度向受力平衡，宽向受力平衡，地面接触点力矩平衡）

$$N_1 \sin \theta + f - mg \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$N_1 \cos \theta - N + mg \cos \theta = 0 \quad (2)$$

$$d \cot \theta \times N - \left(\frac{l}{2} \cos \theta - \frac{d}{2} \sin \theta \right) \times mg = 0 \quad (3)$$

右板

$$-f + N_2 \sin \theta - mg \sin \theta = 0 \quad (4)$$

$$N - N_2 \cos \theta + mg \cos \theta = 0 \quad (5)$$

$$d \times f - \left(\frac{l}{2} \cos \theta - \frac{d}{2} \sin \theta \right) \times mg = 0 \quad (6)$$

(1) (2) (4) (5) 联立可得

$$\frac{f}{N} = \tan \theta \quad (7)$$

(7) 代回 (3) (6) 可得

$$N = \frac{\frac{l}{2} \cos \theta - \frac{d}{2} \sin \theta}{d \cot \theta} mg \quad (8)$$

$$N = \frac{\frac{l}{2} \cos \theta - \frac{d}{2} \sin \theta}{d \tan \theta} mg \quad (9)$$

因此

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad (10)$$

$$N = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{l}{d} - 1 \right) mg \quad (11)$$

$$\mu \geq \frac{f}{N} = 1 \quad (12)$$

又要求 $N, N_{1,2} > 0$

$$d < l < 3d \quad (13)$$

(2) 对左物块平衡方程 (水平受力, 竖直受力, 地面接触点力矩平衡), 考虑 $d \ll l$

$$f_1 = f \cos \theta_1 + N \sin \theta_1 \quad (14)$$

$$N_1 - mg + N \cos \theta_1 - f \sin \theta_1 = 0 \quad (15)$$

$$mg \left(\frac{l}{2} \cos \theta_1 \right) = \frac{l \sin \theta_2}{\sin \theta_1} N \quad (16)$$

对整体类似

$$f_2 = f_1 \quad (17)$$

$$N_1 + N_2 = 2mg \quad (18)$$

$$mg \left(\frac{l}{2} \cos \theta_1 \right) + mg \left(\frac{l}{\sin \theta_1} \sin(\theta_1 + \theta_2) - \frac{l}{2} \cos \theta_2 \right) = N_2 \frac{l}{\sin \theta_1} \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (19)$$

代入 $\theta_1 = \frac{\pi}{3}, \theta_2 = \frac{\pi}{6}$

$$N = mg \frac{\cos \theta_1 \sin \theta_1}{2 \sin \theta_2} = \frac{\sqrt{3}}{4} mg \quad (20)$$

$$N_1 = mg \left(1 - \frac{\sin \theta_1}{2 \sin(\theta_1 + \theta_2)} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \right) = \frac{11 - \sqrt{3}}{8} mg \quad (21)$$

$$N_2 = mg \left(1 + \frac{\sin \theta_1}{2 \sin(\theta_1 + \theta_2)} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \right) = \frac{5 + \sqrt{3}}{8} mg \quad (22)$$

$$f = mg \left(\frac{1}{2 \sin(\theta_1 + \theta_2)} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) + \frac{\cos^2 \theta_1}{2 \sin \theta_2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} mg \quad (23)$$

$$f_1 = f_2 = mg \left(\frac{\cos \theta_1}{2 \sin(\theta_1 + \theta_2)} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) + \frac{\cos \theta_1}{2 \sin \theta_2} \right) = \frac{3 + \sqrt{3}}{8} mg \quad (24)$$

故

$$\mu_1 \geq \frac{f_1}{N_1} = \frac{18 + 7\sqrt{3}}{59} = 0.511 \quad (25)$$

$$\mu_2 \geq \frac{f_2}{N_2} = \frac{6 + \sqrt{3}}{11} = 0.703 \quad (26)$$

$$\mu \geq \frac{f}{N} = 1 \quad (27)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 16 分：(1) (2) (3) (4) (5) (6) 式各 1 分，(10) 式 2 分，(11) (12) 式各 2 分，(13) 式 4 分；

第 (2) 问 24 分：(14) (15) (16) (17) (18) (19) 式各 1 分，(20) (21) (22) (23) 式各 2 分，(24) 式 4 分，(25) (26) (27) 式各 2 分。其中 (24) 式 f_1, f_2 只对一个给 2 分。

三、(40 分)

霍尔效应在地磁场测定以及各类精密电路中均有广泛的应用，该效应是由于载流子受磁场影响导致内部电荷重新分布引起的附加电压。大部分时候，我们使用的霍尔片较薄，一般无需考虑其自身电流产生的磁场，而对于在交流电实验中常见的同轴电缆，当有电流流过时，内外表面间可能出现霍尔电压。

如图 3.1 所示，在内外半径分别为 R_1, R_2 的圆柱形导体壳中心放置了一根载有电流 I_0 的导线。圆柱形导体壳中分布有大小为 I 的均匀电流，载流子电量为 q ，数密度为 n 。

(1) 计算霍尔电势差 U_H 的值。

(2) 对于同轴电缆，此时有 $I = -I_0$ ，计算霍尔电压的表达式，用 I_0 表示。

(3) 对于普通薄圆柱壳，不存在中心导线，即 $I_0 = 0$ 。引入无量纲参数 $x = R_2/R_1$ ，用 x, R_1 表示霍尔电压的大小，并考虑欲使霍尔电压尽可能大， x, R_1 应分别如何取值。

(4) 基于以上结论，判断在薄导体圆柱壳的情形下能否观测到霍尔效应。

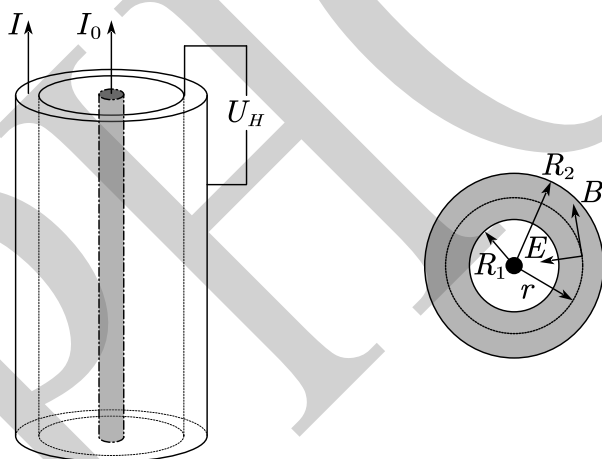


图 3.1

解：(1) 由安培环路定理

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I \quad (1)$$

电流由内部导线和外壳电流自身激发

$$\sum I = I_0 + I \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (2)$$

则径向坐标 r 位置处的磁感应强度

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \left[I_0 + \frac{I}{R_2^2 - R_1^2} (r^2 - R_1^2) \right] \quad (3)$$

对于平衡态下的载流子，电场力与洛伦兹力平衡

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4)$$

则有霍尔电场大小

$$E = vB \quad (5)$$

霍尔电场

$$E(r) = \frac{\mu_0 v}{2\pi r} \left[I_0 + \frac{I}{R_2^2 - R_1^2} (r^2 - R_1^2) \right] \quad (6)$$

载流子的速度由电流给出

$$I = nq\pi(R_2^2 - R_1^2)v \quad (7)$$

那么横向电场

$$E(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 nq(R_2^2 - R_1^2)r} \left[I_0 + \frac{I}{R_2^2 - R_1^2} (r^2 - R_1^2) \right] \quad (8)$$

霍尔电压

$$U_H = \int_{R_1}^{R_2} E dr \quad (9)$$

带入积分得到

$$U_H = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 nq(R_2^2 - R_1^2)} \left[I_0 \ln \frac{R_2}{R_1} + I \left(\frac{1}{2} - \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \right] \quad (10)$$

(2) 构成回路时

$$I + I_0 = 0 \quad (11)$$

则

$$U_H = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 nq(R_2^2 - R_1^2)} \left(\frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{1}{2} \right) \quad (12)$$

(3) 当去掉中心导线后

$$I_0 = 0 \quad (13)$$

带入 (1) 问

$$U_H = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 nq(R_2^2 - R_1^2)} \left(\frac{1}{2} - \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (14)$$

带入引入的无量纲量

$$U_H = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2 nqR_1^2(x^2 - 1)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2 - 1} \ln x \right) \quad (15)$$

对 (15) 式求导可得, 欲使霍尔电压尽可能大, 应当有

$$x \rightarrow 1 \quad (16)$$

$$R_1 \rightarrow 0 \quad (17)$$

(4) 由 (15) 式可知, 在薄导体圆柱壳的情形下能观测到霍尔效应。

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 22 分: (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) 式各 2 分, (10) 式 4 分;

第 (2) 问 4 分: (11) (12) 式各 2 分;

第 (3) 问 12 分: (14) (15) 式各 2 分, (16) (17) 式各 4 分;

第 (4) 问 2 分: 判断 2 分。

四、(40 分)

如图 4.1 所示, 水平光滑地面上放置有一质量为 M 的均质直角三角形大物块, 斜面倾角为 θ , 最高处放有一个质量为 m 的小滑块, 与斜面之间的摩擦系数为 μ , 其线度远小于大物块的线度, 因此可视作质点。斜面足够长, 在题目讨论的时间范畴内物块不会运动到斜面底端。斜面在底部通过一个劲度系数为 k 的轻弹簧与一固定的墙壁相连, 弹簧水平且长度足够长, 以保证运动过程中斜面不会与墙壁碰撞。

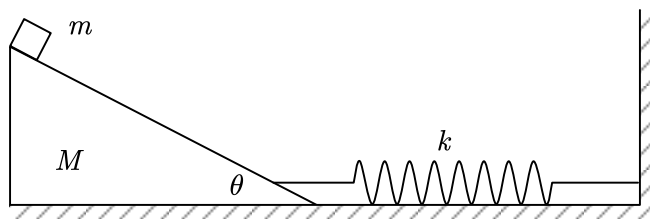


图4.1

初态弹簧长度为原长，系统在外力的作用下维持静止。记小滑块相对大物块沿斜面向下的位移为 x_1 ，弹簧的伸长量为 x_2 。

(1) 将弹簧拉长 x_0 后撤去外力，静止释放，记此时 $t = 0$ 。此后滑块始终相对斜面静止且大物块不翻倒（整个底面着地）。求 x_0 满足的条件（结果不含 μ ），以及 μ 的最小值 μ_{min} 。

(2) 将大物块的底面完全约束在地面上，使之不再存在翻倒或者脱离地面的可能。 $t = 0$ 时刻，静止释放体系，此时弹簧伸长量为零，小滑块位于大物块最高处。由于 μ 较小，滑块开始一刻不停地向下滑动。

(2.1) 求出 x_2 与 x_1 随时间 t 的变化关系，为简洁起见， x_1 的表达式中可包含 x_2 。

(2.2) 求出 $\frac{m}{M}$ 需满足的条件，并代入 $\theta = 36^\circ, \mu = 0.707$ 计算数值，结果保留三位有效数字。

解：(1) 对大物块和小滑块的整体分别在水平方向和竖直方向列牛顿第二定律：

$$\begin{aligned} -kx_2 &= (M + m)\ddot{x}_2 \\ N' - (M + m)g &= 0 \end{aligned}$$

其中 N' 为地面给大物块的支持力，等效作用点在底边上某处。代入初始条件，解得

$$x_2 = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M + m}}t\right) \quad (1.1)$$

$$N' = (M + m)g \quad (1.2)$$

在相对大物块静止的平动非惯性系中研究：小滑块受力平衡，则其对大物块的作用力等于其受到的重力与非惯性力的叠加。

以水平向左为正，大物块受惯性力为

$$F_M = -M\ddot{x}_2 = \frac{M}{M + m}kx_2 \quad (2.1)$$

同理小滑块受惯性力

$$F_m = \frac{m}{M + m}kx_2 \quad (2.2)$$

如图4.2，画出大物块的受力分析图，其中 F_M 和 Mg 的作用点在大物块质心上。若记大物块底边长 l ，则其质心的位置在底边上方 $\frac{l}{3}$ ，左直角边右侧 $\frac{l}{3}\tan\theta$ 处。记支持力 N' 的作用点在直角顶点右侧 d 处，对直角顶点列力矩平衡方程：

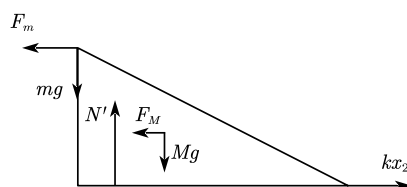


图4.2

$$F_m \cdot l \tan\theta + F_M \cdot \frac{l}{3} \tan\theta + N'gd - Mg \cdot \frac{l}{3} = 0 \quad (3)$$

要求不翻倒，则

$$0 \leq d \leq l \quad (4)$$

对于所有时刻的 x_2 ，前述两式均成立。解得 x_0 满足的条件

$$x_0 \leq \frac{M+m}{M+3m} \frac{Mg \cot \theta}{k} \quad (5)$$

仍在该系中研究，画出小滑块的受力分析图：将支持力 N 和摩擦力 f 合成为全反力 Q ，其与支持力方向的夹角大小必在 $\arctan \mu$ 之内，而 Q 与重力、非惯性力平衡。将另两力合成，得到夹角满足的关系

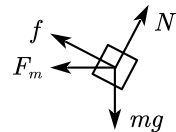


图 4.3

$$-\arctan \mu \leq \theta - \arctan \frac{\frac{m}{m+M} k x_2}{mg} \leq \arctan \mu \quad (6)$$

要求上式对所有时刻的 x_2 均成立，显然 $x_2 = -x_0$ 时条件最苛刻，解得

$$\mu \geq \frac{(M+m)g \tan \theta + k x_0}{(M+m)g - k x_0 \tan \theta} = \mu_{\min} \quad (7)$$

显然，前述 x_0 满足的条件能够使 μ_{\min} 存在。

(2) (2.1) 小滑块的受力分析图不变，在沿斜面和垂直斜面方向运用牛顿第二定律：

$$m \ddot{x}_1 = mg \sin \theta - f - F_m \quad (8.1)$$

$$N - mg \cos \theta - F_m \sin \theta = 0 \quad (8.2)$$

在地面参照系中，大物块的受力分析如图 4.4 所示：

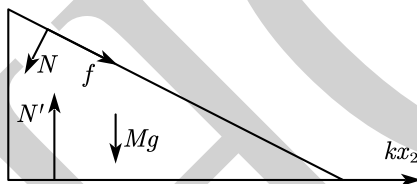


图 4.4

对大物块在水平方向上列牛顿第二定律：

$$M \ddot{x}_2 = -k x_2 + N \sin \theta - f \cos \theta \quad (9)$$

摩擦力与支持力关系

$$f = \mu N \quad (10)$$

消去 f 和 N ，得到

$$M \ddot{x}_2 = -k x_2 + (\sin \theta - \mu \cos \theta) mg \cos \theta - (\sin \theta - \mu \cos \theta) m \sin \theta \ddot{x}_2$$

$$m \ddot{x}_1 = (\sin \theta - \mu \cos \theta) mg \sin \theta + (\cos \theta + \mu \sin \theta) m \ddot{x}_2$$

代入初始条件，得到

$$x_2 = \frac{mg \cos \theta (\sin \theta - \mu \cos \theta)}{k} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{M + m \sin \theta (\sin \theta - \mu \cos \theta)}} t \right) \quad (11)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} g (\sin \theta - \mu \cos \theta) t^2 + (\cos \theta + \mu \sin \theta) x_2 \quad (12)$$

(2.2) 引入

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m \sin \theta (\sin \theta - \mu \cos \theta)}}$$

要求滑块开始一刻不停地向下滑动，即要求恒有 $\dot{x}_1 > 0$ ， x_1 对时间求导得到

$$\dot{x}_1 = (\sin \theta - \mu \cos \theta) g t + (\cos \theta + \mu \sin \theta) \cdot \frac{mg \cos \theta (\sin \theta - \mu \cos \theta)}{k} \cdot \omega \sin \omega t \quad (13)$$

参考 (1) 的结论容易判断, 能够下滑必有

$$\mu < \tan \theta \quad (14)$$

引入 $\phi = \omega t$, 整理得到 \dot{x}_1 恒大于零的条件等价于下面的不等式在 $\phi > 0$ 时始终成立:

$$\frac{\frac{M}{m} + \sin \theta (\sin \theta - \mu \cos \theta)}{\cos \theta (\cos \theta + \mu \sin \theta)} \cdot \phi > -\sin \phi \quad (15)$$

记等号左边分式的值为 α , 根据一次函数和三角函数的性质, 结合图 4.5 知道左右两函数在此处 (D 点) 相切时 α 最小 (记为 α_0)

$$\alpha_0 \phi = -\sin \phi \quad (16.1)$$

$$\alpha_0 = -\cos \phi \quad (16.2)$$

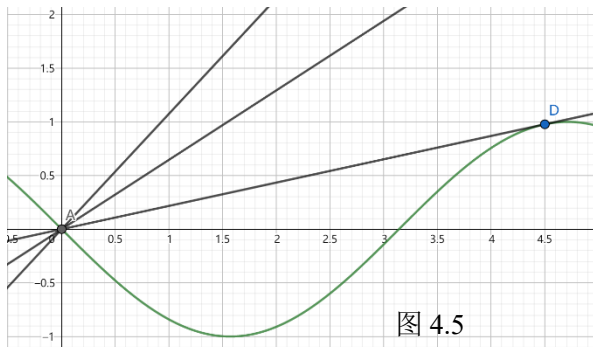


图 4.5

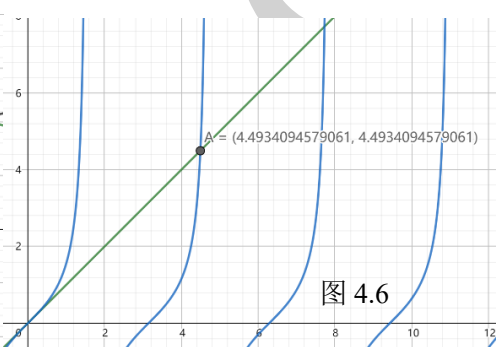


图 4.6

消去 α_0 , 得到超越方程 $\phi = \tan \phi$, 取如图 4.6 所示的解, 得到

$$\phi = 4.493, \alpha_0 = 0.217 \quad (17)$$

反解得到

$$\frac{m}{M} < \frac{1}{\alpha_0 \cos \theta (\cos \theta + \mu \sin \theta) - \sin \theta (\sin \theta - \mu \cos \theta)} = 4.86 \quad (18)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 16 分: (1.1) (1.2) (2.1) (2.2) 式各 1 分, (3) 式 3 分, (4) 式 1 分, 两个受力分析图各 1 分, (5) (6) (7) 式各 2 分;

第 (2) 问 24 分:

第 (2.1) 小问 12 分: (8.1) (8.2) 式 1 分, 受力分析图 1 分, (9) 式 2 分, (10) 式 1 分, (11) (12) 式各 3 分;

第 (2.2) 小问 12 分: (13) 式 2 分, (14) 式 1 分, (15) 式 2 分, (16.1) (16.2) 式 1 分, (17) 式 2 分, (18) 式 3 分。

五、(40 分)

斐索流水实验是阿曼德·斐索在 1851 年进行的一项实验, 其测定了光在流动水中的传播速率。基于当时盛行的理论, 在运动介质中传播的光会被介质拖动, 导致最终测到的光速是光和介质的相对速度与介质运动速度的和。斐索在实验中探测到了拖拽效应, 并在当时被看作是奥古斯丁·菲涅耳的“以太部分拖拽假说”的证据 (也就是在经典力学框架下讨论光的传播)。但是, 该效应却比预期弱很多, 直到半个多世纪后, 该效应才通过阿尔伯特·爱因斯坦发展的狭义相对论得到完满的解释。

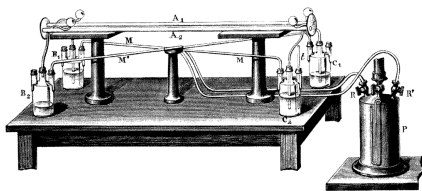


图5.1

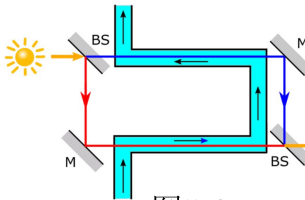


图5.2

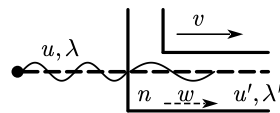


图5.3

图5.1及图5.2分别展示了该实验的实验装置图与原理简图，光源发出的光通过半透半反镜后分别通过正向/逆向的水流，之后汇聚相干产生干涉条纹。记真空中光速为 c ，以及，为简化模型，忽略介质色散可能造成的影响。

(1) 考虑以下模型：如图5.3所示，实验室参考系 S 中，一静止于真空中的波源向右发出一束准直的波，波在真空中传播的速度为 u ，波长为 λ 。一玻璃管以速率 v 向右运动，玻璃管轴线与波的传播路径一致，其内部介质相对玻璃管以速率 w 向右运动，在静止介质中，波的传播速率与其在真空中的速率比为 n^{-1} ， n 为常数。

注意到，波在传播过程中，始终有“波数守恒”，即单位时间进入某界面的“波数”与离开该界面的“波数”相等；换言之，每有一个波峰（波谷）进入某界面，则同时有一个波峰（波谷）离开该界面。

分别在经典力学框架和相对论力学的框架下，计算参考系 S 中波在玻璃管介质中的速率 u' ，然后利用波数守恒，计算波在玻璃管介质中的波长 λ' 。

(2) 在(1)的基础上，考虑斐索流水实验中的情形，此时 $u = c, v = 0, w = \pm w_0, w_0 \ll c$ ， n 为水的折射率。

试分别在经典力学框架和相对论力学的框架下，计算参考系 S 中波在水中的速率 u' ，保留到 w_0 的一阶项。

(3) 在斐索的实验中，玻璃管中水柱长度为 $l = 1.49 \text{ m}$ ，流水速率 $w_0 = 7.06 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，所用光的波长 $\lambda = 0.526 \text{ } \mu\text{m}$ ，水的折射率 $n = 1.33$ ，真空中光速 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

试分别在经典力学框架和相对论力学的框架下，计算水沿玻璃管正向流动与反向流动时相比，条纹移动数 ΔN 的表达式，计算相应的值，保留三位有效数字，并与实验值 $\Delta N_0 = 0.23$ 比对，验证相对论的相对正确性。

解：(1) 对于经典力学构架，符合速度叠加原理

$$u' = v + w + \frac{u}{n} \quad (1)$$

考虑波数守恒

$$\frac{\lambda}{u - v} = \frac{\lambda'}{u' - v} \quad (2)$$

即

$$\lambda' = \lambda \frac{w + \frac{u}{n}}{u - v} \quad (3)$$

对于相对论力学而言，考虑速度变换

$$u' = \frac{v + \frac{w + \frac{u}{n}}{1 + \frac{vw}{nc^2}}}{1 + \frac{v(w + \frac{u}{n})}{(1 + \frac{wu}{nc^2})c^2}} = \frac{v + \frac{uvw}{nc^2} + w + \frac{u}{n}}{1 + \frac{uw}{nc^2} + \frac{vw}{c^2} + \frac{vu}{nc^2}} \quad (4)$$

联立式(2)(4)得

$$\lambda' = \frac{\lambda}{u-v} \frac{\left(\frac{w+\frac{u}{n}}{1+\frac{wu}{nc^2}} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{1 + \frac{v \left(w + \frac{u}{n} \right)}{\left(1 + \frac{wu}{nc^2} \right) c^2}} = \lambda \frac{\left(w + \frac{u}{n} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{(u-v) \left(1 + \frac{uw}{nc^2} + \frac{vw}{c^2} + \frac{vu}{nc^2} \right)} \quad (5)$$

(2) 容易得到：
经典力学构架：

$$u' = \pm w_0 + \frac{c}{n} \quad (6)$$

相对论力学：

$$u' = \pm w_0 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{c}{n} \quad (7)$$

(3) 经典力学构架：
光通过水柱的时间差

$$\Delta t = \left| \frac{l}{u'_+} - \frac{l}{u'_-} \right| = \frac{2n^2 l}{c^2} w_0 \quad (8)$$

条纹移动

$$\Delta N \cdot \lambda = 2c \cdot \Delta t \quad (9)$$

联立式 (8) (9) 得到：

$$\Delta N = \frac{4lw_0}{\lambda c} \cdot n^2 \quad (10)$$

代入数值

$$\Delta N = 0.474 \quad (11)$$

相对论力学：
光通过水柱的时间差

$$\Delta t = \left| \frac{l}{u'_+} - \frac{l}{u'_-} \right| = \frac{2n^2 l}{c^2} w_0 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad (12)$$

联立式 (9) (12) 得到：

$$\Delta N = \frac{4lw_0}{\lambda c} \cdot (n^2 - 1) \quad (13)$$

代入数值

$$\Delta N = \frac{4lw_0}{\lambda c} (n^2 - 1) = 0.207 \quad (14)$$

显然，相对论给出的理论预测更符合实验结果。

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 20 分：(2) 式 8 分，(1) (3) (4) (5) 式各 3 分；

第 (2) 问 5 分：(7) 式 3 分，(6) 式 2 分；

第 (3) 问 15 分：(8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) 式各 2 分，最终结论 1 分。

注：第一问未利用波数守恒 (2) 式求解，即使答案正确也需扣除 (2) 式的 8 分。

六、(40 分)

渗透压最初是根据溶液吸水能力而定义的。在 1886 年，荷兰理论化学家 Van't Hoff 从热力学理论推导出难挥发非电解质稀溶液的渗透压力与溶液浓度和热力学温度的关系，即

Van't Hoff 公式。目前 $^3\text{He} - ^4\text{He}$ 稀释制冷机中即存在渗透压的应用。

(1) 本题中, 渗透压的定义为由溶质引起的压强, 下面仅研究稀溶液, 即溶质粒子之间、溶质与溶剂间无相互作用的溶液。溶液中溶剂的摩尔数为 n_0 , 摩尔体积 v_0 ; 溶质的摩尔数为 n_1 , 摩尔体积 v_1 。无需考虑溶质引起的溶剂体积变化以及溶剂本身带来的压强。

根据上面的定义, 结合所学知识, 给出非相对论下渗透压的表达式, 用溶质粒子的平均动能为 ε_1 表示。

(2) 低温下, 粒子趋向占据最低的能级, 表现出强简并性。已知对于本题研究的粒子, 对于有粒子占据的能级, 能量 $\varepsilon \sim \varepsilon + d\varepsilon$ 区间内的粒子数目为

$$dN = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \quad (6.1)$$

式中 V 为粒子总体积, m 为单个粒子质量, h 为普朗克常数。已知粒子总数为 N , 推导粒子占据的最高能级 E_F , 及其对应的压强 p_2 。

(3) 当前比较成熟而且大规模应用的制冷设备是一种被称为 $^3\text{He} - ^4\text{He}$ 稀释制冷机。在某些温度下, ^3He 和 ^4He 的混合流体会自发地产生相的分离, 混合流体中将 ^3He 视为溶质, ^4He 视为溶剂。

如图6.1所示, 蒸馏室与混合室连通。混合室上部几乎为纯 ^3He ; 下部为 ^3He 丰度 (丰度即为量分数, 即某种组分量占总物质量的比) 为 X_3 的混合液体, 其中 ^3He 类似于真空中的强简并性气体, 具有等效质量 m_3^* 。对蒸馏室气体其与下方类似, 但蒸馏室中一般温度为 T , 表现为经典效应。忽略液体流动产生的动力学效应和重力影响。

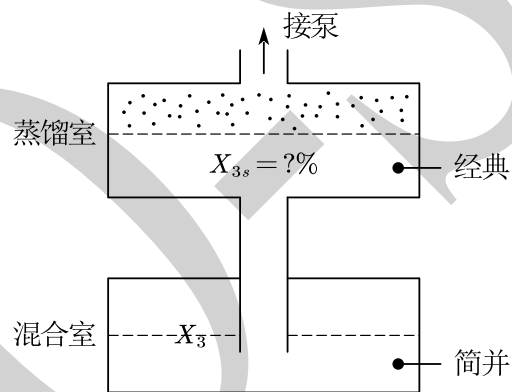


图6.1

已知 ^3He 粒子质量为 m_3 , ^4He 粒子质量为 m_4 , ^4He 的密度为 ρ , 混合室中丰度 X_3 。在 $X_3 \ll 1$ 的情况下, 求上方蒸馏室中同样很小的 ^3He 丰度 X_{3s} 的表达式, 然后代入 $m_3 = 5.02 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $m_4 = 6.70 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $\rho = 0.125 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$, $X_3 = 0.01$, $m_3^* = 2.4m_3$, $T = 0.7 \text{ K}$, 计算 X_{3s} 的数值, 保留一位有效数字。

解: (1) 溶质的性质跟理想气体十分相似, 而对于某一个横截面, 故可由压强定义直接给出

$$p = n \int_{-\infty}^{+\infty} p_x v_x f(v_x) dv_x \quad (1)$$

由于溶液很稀

$$n = \frac{n_1}{n_0 v_0} \quad (2)$$

而又有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_x v_x f(v_x) dv_x = \overline{p_x v_x} = \frac{1}{3} \overline{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}} \quad (3)$$

对于非相对论情形

$$\overline{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}} = 2\varepsilon_1 \quad (4)$$

则得到渗透压

$$p = \frac{2}{3} \frac{n_1 \varepsilon_1 N_A}{n_0 v_0} \quad (5)$$

(2) 由题意, 处在 $d\varepsilon$ 区间内的量子态数目

$$D(\varepsilon) = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

那么粒子依次排满最低能级, 总粒子数恒定

$$N = \int_0^{E_f} D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (7)$$

其中 E_f 为最高能级。

解得

$$E_f = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (8)$$

而粒子的平均动能

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^{E_f} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (9)$$

那么粒子的平均动能为

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\frac{2}{3} h^2}{20\pi^{\frac{2}{3}} m} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (10)$$

故渗透压由 (1) 问给出

$$p_2 = \frac{\frac{2}{3} h^2}{20\pi^{\frac{2}{3}} m} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (11)$$

(3) 对于上方蒸馏室中气体，其温度高于 ^3He 的简并温度，近似为理想气体，渗透压

$$p_1 = \frac{N_{3s} kT}{V} \quad (12)$$

由给出的丰度

$$N_{3s} = NX_{3s} \quad (13)$$

同样，对于下方强简并性气体，渗透压

$$p_2 = \frac{\frac{2}{3} h^2}{20\pi^{\frac{2}{3}} m_3^*} \left(\frac{N'_3}{V'} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (14)$$

同样的

$$N'_3 = N'X_3 \quad (15)$$

则渗透压

$$p_2 = \frac{\frac{2}{3} h^2}{20\pi^{\frac{2}{3}} m_3^*} \left(\frac{N'X_3}{V'} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (16)$$

两室由长管连通，由力学平衡条件

$$p_1 = p_2 \quad (17)$$

对于较稀的溶液

$$V = Nv_0 \quad V' = N'v'_0 \quad (18)$$

式中 v_0 为平均单个粒子占据的体积

$$v_0 = \frac{m_4}{\rho} \quad (19)$$

得到

$$X_{3s} = \frac{\frac{2}{3} h^2 X_3^{\frac{5}{3}}}{20\pi^{\frac{2}{3}} k m_3^* T} \left(\frac{\rho}{m_4} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (20)$$

带入数据

$$X_{3s} = 0.06\% \quad (21)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 8 分：(1) (3) (4) (5) 式各 2 分；

第 (2) 问 10 分：(7) (8) (9) (10) (11) 式各 2 分；

第 (3) 问 22 分：(12) (14) (16) (17) (18) (19) 式各 2 分，(20) 式 4 分，(21) 式 6 分。

七、(40 分)

由于在实际情况中希望限制光照射的范围，我们会使用光阑对光线的张角进行限制。孔径光阑是对光线起决定限制作用的光阑，而其余光阑的限制条件则没有孔径光阑强。

如图 7.1 所示，有一点光源 S 在凸透镜 L_0 的光轴上，到其光心 O_0 的距离为 u ，这一点光源经凸透镜 L_0 折射、平面反射镜 M 反射、光阑 D_1 作用、凸透镜 L_1 折射、光阑 D_2 作用、凸透镜 L_2 折射后，成像于 S' 。已知所有透镜均为理想透镜，所有光线均可认为是傍轴光线，凸透镜 L_0, L_1, L_2 的焦距均为 f_0 ，两光阑 D_1, D_2 半径均为 $r_1 = r_2 = r$ ，各元件按如图所示位置共轴放置， $l_0 = f_0, l_1 = 3f_0, l_2 = 2f_0, x_1 = f_0, x_2 = f_0$ ，且平面镜与各凸透镜的尺寸足够大。

试计算当光阑 D_1 为该光学系统的孔径光阑时， u 的取值范围。

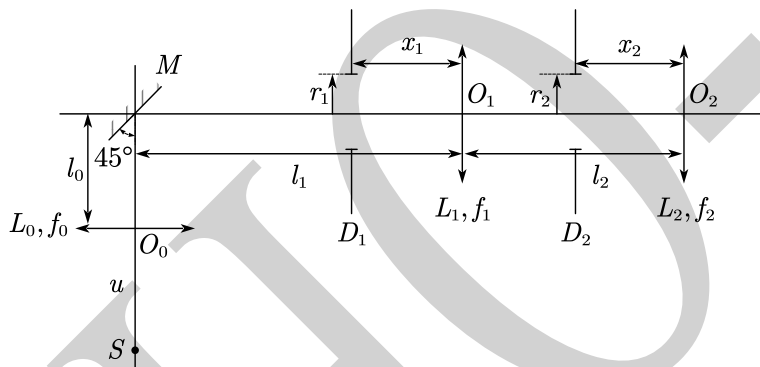


图 7.1

解：薄透镜成像公式

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \quad (1)$$

经过第一个透镜成像得到

$$v_1 = \frac{uf_0}{u - f_0} \quad (2)$$

经过平面镜反射后，对第二个透镜的物距为

$$s = l_1 + l_0 - v_1 \quad (3)$$

显然透镜 L_2 对前方的光线以及孔径光阑的判断是没有意义的，因此可以无视透镜 L_2 。

一个常用的技巧，做出光阑的共轭像，光线在经过共轭像时折射后也会经过真实的光阑。

像方光阑对第二个透镜成像

$$\frac{1}{l_2 - x_2} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_1} \quad (4)$$

$$v_2 = \frac{(l_2 - x_2)f_1}{l_2 - x_2 + f_1} \quad (5)$$

$$r'_2 = r_2 \left| \frac{v_2}{l_2 - x_2} \right| \quad (6)$$

我们只需要比较物点对于物方两个光阑的张角大小即可，张角小的就是孔径光阑。

光阑 1 为孔径光阑的条件：物点对光阑 1 的张角小于对 2 光阑的张角

$$\left| \frac{r_1}{s - x_1} \right| < \left| \frac{r'_2}{s - v_2} \right| \quad (7)$$

化简得

$$r_1 \left| s - (l_2 - x_2) \left(\frac{s}{f_1} - 1 \right) \right| < r_2 |s - x_1|, \text{ 其中 } s = l_1 + l_0 - v_1 \quad (8)$$

代入数据, 最终得到答案:

1 为孔径光阑:

$$0 < u < \frac{4}{3}f_0 \text{ 或 } u > 2f_0 \quad (9)$$

2 为孔径光阑:

$$\frac{4}{3}f_0 < u < 2f_0 \quad (10)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

(1) 式 3 分, (2) 式 2 分, (3) 式 5 分, (4) (5) (6) 式各 5 分, (7) (8) 式各 5 分, (9) 式 3 分, (10) 式 2 分。

八、(40 分)

众所周知, 一些不稳定的大质量原子容易发生衰变, 由此向更稳定的粒子转化, 我们考虑铀原子 $^{238}_{92}\text{U}$ 向铅原子 $^{206}_{82}\text{Pb}$ 的衰变过程。

(1) 一般地, 衰变都是逐级发生的, 亦即每一次衰变均为 α 或者 β 衰变

$$^m_n\text{X} \xrightarrow{\alpha} ^{m-4}_{n-2}\text{Y} + ^4_2\text{He} \quad (8.2)$$

$$^m_n\text{X} \xrightarrow{\beta} ^m_{n+1}\text{Y} + ^0_{-1}e^- + \nu_e \quad (8.1)$$

试计算 $^{238}_{92}\text{U}$ 至 $^{206}_{82}\text{Pb}$ 的衰变过程中的衰变次数。

(2) 考虑前两次衰变过程, 铀原子 $^{238}_{92}\text{U}$ 先转化为钍原子 $^{234}_{90}\text{Th}$, 然后转化为镤原子 $^{234}_{91}\text{Pa}$ 。

(2.1) 分别写出 $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{234}_{90}\text{Th}$, $^{234}_{90}\text{Th} \rightarrow ^{234}_{91}\text{Pa}$, $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{234}_{91}\text{Pa}$ 的衰变方程式。

(2.2) 实际上, 虽然衰变过程 $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{234}_{90}\text{Th} \rightarrow ^{234}_{91}\text{Pa}$ 与 $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{234}_{91}\text{Pa}$ 最终产物相同, 但产物的能量范围不同。

试分别计算上述两种衰变过程最终产物中氦原子与电子的动能范围, 用 MeV 表示。

已知原子量 $m_{\text{U}} = 238.029\text{u}$, $m_{\text{Th}} = 232.038\text{u}$, $m_{\text{Pa}} = 231.036\text{u}$, $m_{\text{He}} = 4.003\text{u}$, $1\text{u} = 931.5\text{ MeV}/c^2$, 电子质量 $m_e = 9.109 \times 10^{-31}\text{ kg}$, 中微子 ν_e 静质量可略。

解: (1) 设衰变过程产生 x 次 α 衰变, y 次 β 衰变, 由此可得

$$238 - 4x = 206 \quad (1)$$

$$92 - 2x + y = 82 \quad (2)$$

解得

$$x = 8, y = 6 \quad (3)$$

总衰变次数

$$n = x + y = 14 \quad (4)$$

(2) 衰变方程式

$$^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{234}_{90}\text{Th} + ^4_2\text{He} \quad (5)$$

$$^{234}_{90}\text{Th} \rightarrow ^{234}_{91}\text{Pa} + ^0_{-1}e^- + \nu_e \quad (6)$$

$$^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{234}_{91}\text{Pa} + ^4_2\text{He} + ^0_{-1}e^- + \nu_e \quad (7)$$

(3) 对于 $^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{234}_{90}\text{Th}$ 过程, 设 He 核动量为 p_1 , 由能量守恒

$$m_{\text{U}}c^2 = \sqrt{(m_{\text{He}}c^2)^2 + (p_1c)^2} + \sqrt{(m_{\text{Th}}c^2)^2 + (p_1c)^2} \quad (8)$$

得到

$$T_{\text{He}} = \sqrt{(m_{\text{He}}c^2)^2 + (p_1c)^2} - m_{\text{He}}c^2 = 1813 \text{ MeV} \quad (9)$$

对于 ${}^{234}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa}$ 过程, 显然, 当电子能量最小值为零, 当中微子动量为零且电子动量 p_2 方向与 ${}^{234}_{90}\text{Th}$ 一致时, 电子具有能量最大值, 由能量守恒

$$\sqrt{(m_{\text{Th}}c^2)^2 + (p_1c)^2} = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_2c)^2} + \sqrt{(m_{\text{Pa}}c^2)^2 + ((p_2 - p_1)c)^2} \quad (10)$$

得到

$$T_{e,\text{max}} = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_2c)^2} - m_e c^2 = 949 \text{ MeV} \quad (11)$$

对于 ${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa}$ 过程, 显然, He 核和电子能量最小值均为零, 当中微子能量为零且 He 核 (电子) 与 ${}^{234}_{91}\text{Pa}$ 共速时, (电子) He 核具有能量最大值, 设粒子动量分别为 p'_1, p'_2 , 由能量守恒

$$m_{\text{U}}c^2 = \sqrt{(m_{\text{He}}c^2)^2 + (p'_1c)^2} + \sqrt{(m_{\text{Pa}}c^2 + m_e c^2)^2 + (p'_1c)^2} \quad (12)$$

$$m_{\text{U}}c^2 = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p'_2c)^2} + \sqrt{(m_{\text{Pa}}c^2 + m_{\text{He}}c^2)^2 + (p'_2c)^2} \quad (13)$$

联立上式

$$T'_{\text{He},\text{max}} = \sqrt{(m_{\text{He}}c^2)^2 + (p'_1c)^2} - m_{\text{He}}c^2 = 2721 \text{ MeV} \quad (14)$$

$$T'_{e,\text{max}} = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p'_2c)^2} - m_e c^2 = 2768 \text{ MeV} \quad (15)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 10 分: (4) 式 4 分, (1) (2) (3) 式各 2 分;

第 (2) 问 6 分: (5) (6) (7) 式各 2 分;

第 (3) 问 24 分: 计算过程共 8 分, 四个范围的最小值各 2 分, 四个范围的最大值各 2 分。

注: 考虑到本题在考试过程较晚被修正, 评分时应适当放宽, 详见阅卷指南。