

## 第 11 届 CPHO-S 物理竞赛联考暨 39th-CPhO 复赛模拟赛

### 理论试题

考试时间：2022 年 8 月 27 日 9:00—12:00

命题人：代佳乐 罗民睿 黄文杰 王梓人

陆金浩 李瀚奕 孙烨皓

审题人：王 驰 罗钰涵 向滢滢 龚俊安 陈浩楠

#### 考生必读

- 1、考生考试前请务必阅读本须知。
- 2、本试题共 5 页，答题卡共 8 页，总分 320 分。
- 3、如遇到试题印刷不清楚的情况，请务必向监考老师提出。
- 4、需要阅卷老师评阅的内容一定要写在答题纸相应题号后面的空白处；阅卷老师只评阅答题纸上的内容，写在试题纸和草稿纸上的内容一律不被评阅。

#### 一、(40 分)

如图1.1所示，一对间距为 $l$ 的刚性光滑平行细直导轨固定于空间中，过两导轨的平面与水平面的夹角为 $\theta$ ，同时垂直于两导轨的直线水平。两导轨通过串联的电容 $C$ 和二极管 $D$ 相连，电容的电容量为 $C$ ，理想二极管 $D$ 导通电压为 $U_D$ ，不会被击穿。空间中有竖直向下的重力加速度 $g$ 和垂直于过两导轨的平面向下的磁场 $B$ ，正方向如图所示。

现将一质量为 $m$ 、在其与两导轨交点之间的电阻为 $R$ 的刚性光滑细直杆垂直于两导轨静止放置于两导轨间，杆长大于 $l$ 以保证杆不会掉落。

除了 $R$ ，忽略其他所有电阻；除了 $C$ ，忽略其他所有电容；忽略所有电感；除了 $D$ ，忽略其他所有非线性效应。以初始时杆的位置为原点，沿导轨向下为 $+x$ 轴，建立一维坐标系。

已知 $m = CB^2 l^2$ ,  $RC = \frac{U_D}{Blg \sin \theta}$ ，本题答案均用参数 $t_0 = RC$ 和 $x_0 = \frac{1}{2} g R^2 C^2 \sin \theta$ 表示。

- (1) 当 $t \leq t_0$ 时，求杆的运动方程 $x = x(t)$ 。
- (2) 当 $t \geq t_0$ 时，求杆的运动方程 $x = x(t)$ 。
- (3) 当 $t = 2t_0$ 时，求 $\frac{x}{x_0}$ 的值，结果保留三位有效数字。

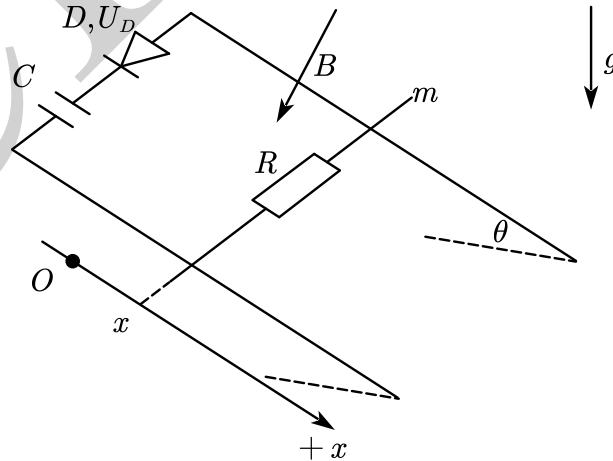


图1.1

## 二、(40 分)

(1) 如图2.1所示, 两块相同的均匀长方体板并排静止于光滑地面上, 板与板之间存在微小夹角。每块板质量为 $m$ , 长度为 $l$ , 宽度为 $d$ , 倾角为 $\theta$ 。已知重力加速度为 $g$ , 计算平衡时倾角 $\theta$ 和板间支持力 $N$ 的大小, 并求出板间摩擦系数 $\mu$ 需满足的条件, 以及 $d, l$ 间需满足的关系。

(2) 如图2.2所示, 两块相同的均匀长方体板放置在粗糙地面上, 假设只有接触棱有力的作用。长方体板长度为 $l$ , 宽度为 $d$ , 倾角分别为 $\theta_1, \theta_2$ , 其中 $d/l \rightarrow 0, \theta_1 = 2\theta_2 = \pi/3$ 。欲使体系能够平衡, 计算各接触点摩擦因数 $\mu, \mu_1, \mu_2$ 的最小值。

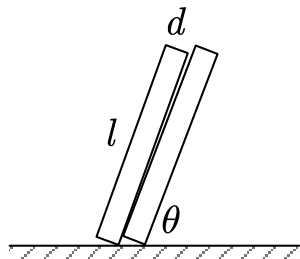


图2.1

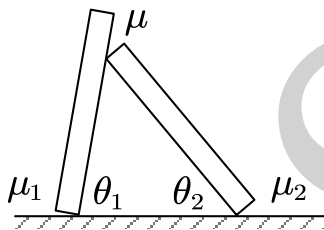


图2.2

## 三、(40 分)

霍尔效应在地磁场测定以及各类精密电路中均有广泛的应用, 该效应是由于载流子受磁场影响导致内部电荷重新分布引起的附加电压。大部分时候, 我们使用的霍尔片较薄, 一般无需考虑其自身电流产生的磁场, 而对于在交流电实验中常见的同轴电缆, 当有电流流过时, 内外表面间可能出现霍尔电压。

如图3.1所示, 在内外半径分别为 $R_1, R_2$ 的圆柱形导体壳中心放置了一根载有电流 $I_0$ 的导线。圆柱形导体壳中分布有大小为 $I$ 的均匀电流, 载流子电量为 $q$ , 数密度为 $n$ 。

(1) 计算霍尔电势差 $U_H$ 的值。

(2) 对于同轴电缆, 此时有 $I = -I_0$ , 计算霍尔电压的表达式, 用 $I_0$ 表示。

(3) 对于普通薄圆柱壳, 不存在中心导线, 即 $I_0 = 0$ 。引入无量纲参数 $x = R_2/R_1$ , 用 $x, R_1$ 表示霍尔电压的大小, 并考虑欲使霍尔电压尽可能大,  $x, R_1$ 应分别如何取值。

(4) 基于以上结论, 判断在薄导体圆柱壳的情形下能否观测到霍尔效应。

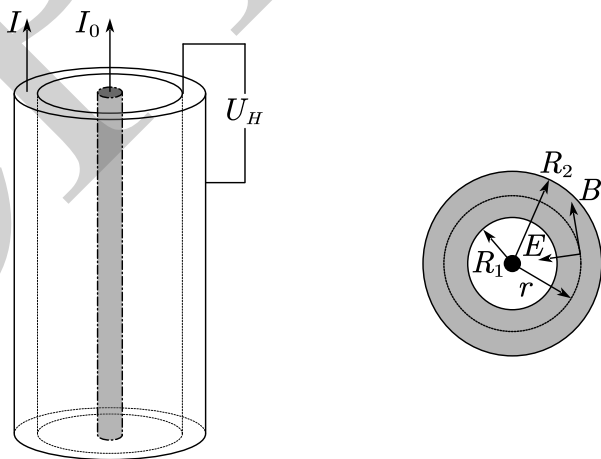


图3.1

#### 四、(40 分)

如图4.1所示，水平光滑地面上放置有一质量为 $M$ 的均质直角三角形大物块，斜面倾角为 $\theta$ ，最高处放有一个质量为 $m$ 的小滑块，与斜面之间的摩擦系数为 $\mu$ ，其线度远小于大物块的线度，因此可视作质点。斜面足够长，在题目讨论的时间范畴内物块不会运动到斜面底端。斜面在底部通过一个劲度系数为 $k$ 的轻弹簧与一固定的墙壁相连，弹簧水平且长度足够长，以保证运动过程中斜面不会与墙壁碰撞。

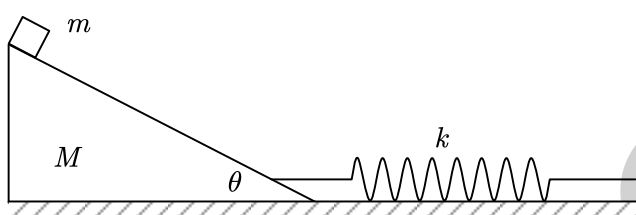


图4.1

初态弹簧长度为原长，系统在外力的作用下维持静止。记小滑块相对大物块沿斜面向下的位移为 $x_1$ ，弹簧的伸长量为 $x_2$ 。

(1) 将弹簧拉长 $x_0$ 后撤去外力，静止释放，记此时 $t = 0$ 。此后滑块始终相对斜面静止且大物块不翻倒（整个底面着地）。求 $x_0$ 满足的条件（结果不含 $\mu$ ），以及 $\mu$ 的最小值 $\mu_{min}$ 。

(2) 将大物块的底面完全约束在地面上，使之不再存在翻倒或者脱离地面的可能。 $t = 0$ 时刻，静止释放体系，此时弹簧伸长量为零，小滑块位于大物块最高处。由于 $\mu$ 较小，滑块开始一刻不停地向下滑动。

(2.1) 求出 $x_2$ 与 $x_1$ 随时间 $t$ 的变化关系，为简洁起见， $x_1$ 的表达式中可包含 $x_2$ 。

(2.2) 求出 $\frac{m}{M}$ 需满足的条件，并代入 $\theta = 36^\circ, \mu = 0.707$ 计算数值，结果保留三位有效数字。

#### 五、(40 分)

斐索流水实验是阿曼德·斐索在 1851 年进行的一项实验，其测定了光在流动水中的传播速率。基于当时盛行的理论，在运动介质中传播的光会被介质拖动，导致最终测到的光速是光和介质的相对速度与介质运动速度的和。斐索在实验中探测到了拖拽效应，并在当时被看作是奥古斯丁·菲涅耳的“以太部分拖拽假说”的证据（也就是在经典力学框架下讨论光的传播）。但是，该效应却比预期弱很多，直到半个多世纪后，该效应才通过阿尔伯特·爱因斯坦发展的狭义相对论得到完满的解释。

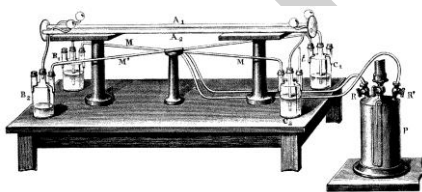


图5.1

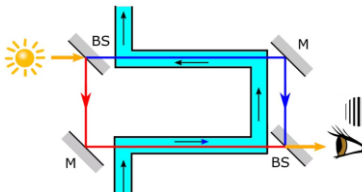


图5.2

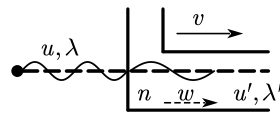


图5.3

图5.1及图5.2分别展示了该实验的实验装置图与原理简图，光源发出的光通过半透半反镜后分别通过正向/反向的水流，之后汇聚相干产生干涉条纹。记真空中光速为 $c$ ，以及，为简化模型，忽略介质色散可能造成的影响。

(1) 考虑以下模型：如图5.3所示，实验室参考系 $S$ 中，一静止于真空中的波源向右发出一束准直的波，波在真空中传播的速度为 $u$ ，波长为 $\lambda$ 。一玻璃管以速率 $v$ 向右运动，玻璃管轴线与波的传播路径一致，其内部介质相对玻璃管以速率 $w$ 向右运动，在静止介质中，波的传播速率与其在真空中的速率比为 $n^{-1}$ ， $n$ 为常数。

注意到，波在传播过程中，始终有“波数守恒”，即单位时间进入某界面的“波数”与

离开该界面的“波数”相等；换言之，每有一个波峰（波谷）进入某界面，则同时有一个波峰（波谷）离开该界面。

分别在经典力学框架和相对论力学的框架下，计算参考系 $S$ 中波在玻璃管介质中的速率 $u'$ ，然后利用波数守恒，计算波在玻璃管介质中的波长 $\lambda'$ 。

(2) 在(1)的基础上，考虑斐索流水实验中的情形，此时 $u = c, v = 0, w = \pm w_0, w_0 \ll c$ ， $n$ 为水的折射率。

试分别在经典力学框架和相对论力学的框架下，计算参考系 $S$ 中波在水中的速率 $u'$ ，保留到 $w_0$ 的一阶项。

(3) 在斐索的实验中，玻璃管中水柱长度为 $l = 1.49 \text{ m}$ ，流水速率 $w_0 = 7.06 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，所用光的波长 $\lambda = 0.526 \mu\text{m}$ ，水的折射率 $n = 1.33$ ，真空中光速 $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

试分别在经典力学框架和相对论力学的框架下，计算水沿玻璃管正向流动与反向流动时相比，条纹移动数 $\Delta N$ 的表达式，计算相应的值，保留三位有效数字，并与实验值 $\Delta N_0 = 0.23$ 比对，验证相对论的相对正确性。

## 六、(40 分)

渗透压最初是根据溶液吸水能力而定义的。在 1886 年，荷兰理论化学家 Van't Hoff 从热力学理论推导出难挥发非电解质稀溶液的渗透压力与溶液浓度和热力学温度的关系，即 Van't Hoff 公式。目前  $^3\text{He} - ^4\text{He}$  稀释制冷机中即存在渗透压的应用。

(1) 本题中，渗透压的定义为由溶质引起的压强，下面仅研究稀溶液，即溶质粒子之间、溶质与溶剂间无相互作用的溶液。溶液中溶剂的摩尔数为 $n_0$ ，摩尔体积 $v_0$ ；溶质的摩尔数为 $n_1$ ，摩尔体积 $v_1$ 。无需考虑溶质引起的溶剂体积变化以及溶剂本身带来的压强。

根据上面的定义，结合所学知识，给出非相对论下渗透压的表达式，用溶质粒子的平均动能为 $\varepsilon_1$ 表示。

(2) 低温下，粒子趋向占据最低的能级，表现出强简并性。已知对于本题研究的粒子，对于有粒子占据的能级，能量 $\varepsilon \sim \varepsilon + d\varepsilon$ 区间内的粒子数目为

$$dN = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \quad (6.1)$$

式中 $V$ 为粒子总体积， $m$ 为单个粒子质量， $h$ 为普朗克常数。已知粒子总数为 $N$ ，推导粒子占据的最高能级 $E_F$ ，及其对应的压强 $p_2$ 。

(3) 当前比较成熟而且大规模应用的制冷设备是一种被称为  $^3\text{He} - ^4\text{He}$  稀释制冷机。在某些温度下， $^3\text{He}$ 和 $^4\text{He}$ 的混合流体会自发地产生相的分离，混合流体中将 $^3\text{He}$ 视为溶质， $^4\text{He}$ 视为溶剂。

如图6.1所示，蒸馏室与混合室连通。混合室上部几乎为纯 $^3\text{He}$ ；下部为 $^3\text{He}$ 丰度（丰度即为量分数，即某种组分量占总物质质量的比）为 $X_3$ 的混合液体，其中 $^3\text{He}$ 类似于真空中的强简并性气体，具有等效质量 $m_3^*$ 。对蒸馏室气体其与下方类似，但蒸馏室中一般温度为 $T$ ，表现为经典效应。忽略液体流动产生的动力学效应和重力影响。

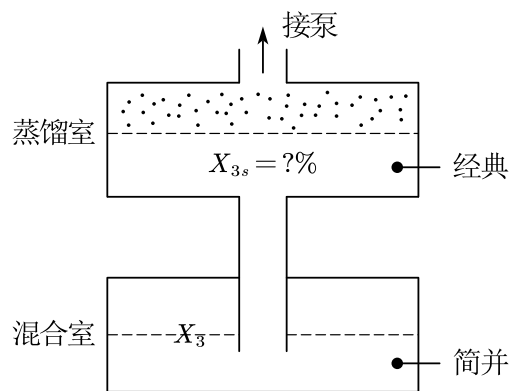


图6.1

已知 $^3\text{He}$ 粒子质量为 $m_3$ ， $^4\text{He}$ 粒子质量为 $m_4$ ， $^4\text{He}$ 的密度为 $\rho$ ，混合室中丰度 $X_3$ 。在 $X_3 \ll 1$ 的情况下，求上方蒸馏室中同样很小的 $^3\text{He}$ 丰度 $X_{3s}$ 的表达式，然后代入 $m_3 = 5.02 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ， $m_4 = 6.70 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ， $\rho = 0.125 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ ， $X_3 = 0.01$ ， $m_3^* = 2.4m_3$ ， $T = 0.7 \text{ K}$ ，计算 $X_{3s}$ 的数值，保留一位有效数字。

### 七、(40 分)

由于在实际情况中希望限制光照射的范围，我们会使用光阑对光线的张角进行限制。孔径光阑是对光线起决定限制作用的光阑，而其余光阑的限制条件则没有孔径光阑强。

如图7.1所示，有一点光源 $S$ 在凸透镜 $L_0$ 的光轴上，到其光心 $O_0$ 的距离为 $u$ ，这一点光源经凸透镜 $L_0$ 折射、平面反射镜 $M$ 反射、光阑 $D_1$ 作用、凸透镜 $L_1$ 折射、光阑 $D_2$ 作用、凸透镜 $L_2$ 折射后，成像于 $S'$ 。已知所有透镜均为理想透镜，所有光线均可认为是傍轴光线，凸透镜 $L_0, L_1, L_2$ 的焦距均为 $f_0$ ，两光阑 $D_1, D_2$ 半径均为 $r_1 = r_2 = r$ ，各元件按如图所示位置共轴放置， $l_0 = f_0, l_1 = 3f_0, l_2 = 2f_0, x_1 = f_0, x_2 = f_0$ ，且平面镜与各凸透镜的尺寸足够大。

试计算当光阑 $D_1$ 为该光学系统的孔径光阑时， $u$ 的取值范围。

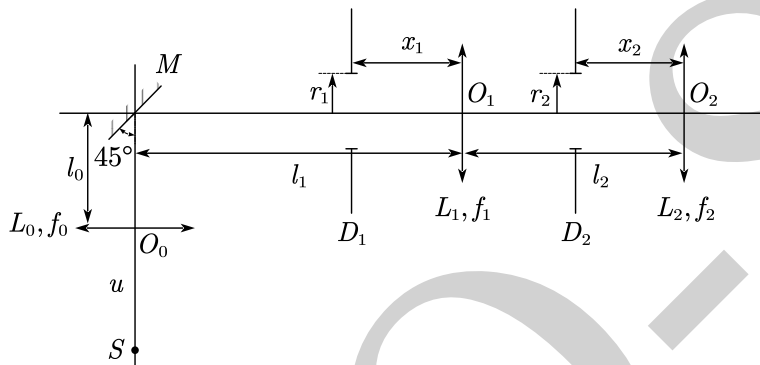


图7.1

### 八、(40 分)

众所周知，一些不稳定的大质量原子容易发生衰变，由此向更稳定的粒子转化，我们考虑铀原子 ${}^{238}_{92}\text{U}$ 向铅原子 ${}^{206}_{82}\text{Pb}$ 的衰变过程。

(1) 一般地，衰变都是逐级发生的，亦即每一次衰变均为 $\alpha$ 或者 $\beta$ 衰变



试计算 ${}^{238}_{92}\text{U}$ 至 ${}^{206}_{82}\text{Pb}$ 的衰变过程中的衰变次数。

(2) 考虑前两次衰变过程，铀原子 ${}^{238}_{92}\text{U}$ 先转化为镤原子 ${}^{234}_{90}\text{Pa}$ ，然后转化为钍原子 ${}^{234}_{91}\text{Th}$ 。

(2.1) 分别写出 ${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Pa}$ ,  ${}^{234}_{90}\text{Pa} \rightarrow {}^{234}_{91}\text{Th}$ ,  ${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{91}\text{Th}$ 的衰变方程式。

(2.2) 实际上，虽然衰变过程 ${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Pa} \rightarrow {}^{234}_{91}\text{Th}$ 与 ${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{91}\text{Th}$ 最终产物相同，但产物的能量范围不同。

试分别计算上述两种衰变过程最终产物中氦原子与电子的动能范围，用MeV表示。

已知原子量 $m_{\text{U}} = 238.029\text{u}$ ,  $m_{\text{Th}} = 232.038\text{u}$ ,  $m_{\text{Pa}} = 231.036\text{u}$ ,  $m_{\text{He}} = 4.003\text{u}$ ,  $1\text{u} = 931.5\text{ MeV}/c^2$ ，电子质量 $m_e = 9.109 \times 10^{-31}\text{ kg}$ ，中微子 $\nu_e$ 静质量可略。