

第12届 CPHO-S 物理竞赛联考

理论试题参考答案及评分标准

考试时间：2022年10月8日 9:00—12:00

命题人：甄林睿 孟飞扬

陆金浩 罗民睿

审题人：王梓人 孙焯皓

一、(80分)

如图1.1所示，考虑一个由四段圆弧构成的均匀环，质量线密度为 λ 。其中两段圆弧半径为 r_1 ，对应的圆心角为 $2\theta_1$ ，另两段半径 $r_2 > r_1$ 。只需考虑纯滚，且不考虑二阶以上近似。

在第(1)(2)问中，各参数为 $r_2 = 2r_1 = 2r, \theta_1 = \pi/6$ ；

在第(4)(5)问中，为方便计算可以引入如下参数：

$$d_1 = (r_2 - r_1) \cos \theta_1, d_2 = (r_2 - r_1) \sin \theta_1, m = \lambda \left(4r_1\theta_1 + 4r_2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \right) \quad (1.1)$$

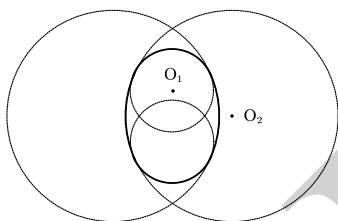


图1.1

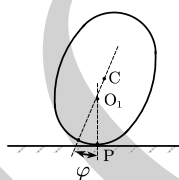


图1.2

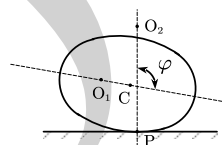


图1.3

(1) 求其绕中心的转动惯量 I 。(以下各小问答案可保留 I)

(2) 当其在水平面上放置时，试给出所有可能的平衡位置，并说明其稳定性。对于稳定平衡处，求其对应的小振动角频率。

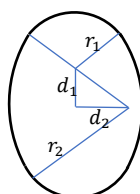
(3) 求其在平面上滚动时质心 C 的轨迹 $x(\varphi), y(\varphi)$ ，只需计算 $\varphi \in [0, 2\pi]$ 的情况。当在圆心为 O_1 、半径为 r_1 的圆弧上平衡时，环转过的角度 $\varphi = 0$ ；当 $\varphi \in (-\theta_1, \theta_1)$ 时，其含义如图1.2所示；而当 $\varphi \in (\theta_1, \pi - \theta_1)$ 时，其含义如图1.3所示。

(4) 若其并非在平面上运动，而是被放置于曲率半径为 ρ 的曲面上，试在曲面切线斜率为零处重新讨论第(2)问。设曲率圆圆心在曲面上方时 $\rho > 0$ 。

(5) 在第(4)问的基础上，该图形甚至可能在斜率非零处稳定平衡。设平衡时曲面切线与水平方向夹角为 θ ，且环的质心与曲率中心的连线和竖直方向的夹角为 φ 。试给出平衡时两角的关系，以及对于该处摩擦因数的要求。

附加题 (不计入总分)：在第(5)问的基础上，考虑若在平衡稳定时，求对于该处曲率半径 ρ 的要求及对应的振动角频率。答案可同时保留 $\theta, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，即不过早要把纯滚方程代入。

解：(1)



(r_1, θ_1) 圆弧的质心与圆心距离 c_1 有

$$2\pi c_1 \times 2r_1 \theta_1 = 2\pi r_1 \times 2r_1 \sin \theta_1 \quad (1)$$

即

$$c_1 = r_1 \frac{\sin \theta_1}{\theta_1} \quad (2)$$

类比得

$$c_2 = r_2 \frac{\sin \theta_2}{\theta_2} \quad (3)$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \quad (4)$$

d_1, d_2 有

$$d_1 = (r_2 - r_1) \sin \theta_2 \quad (5)$$

$$d_2 = (r_2 - r_1) \cos \theta_2 \quad (6)$$

那么, 我们所要求的转动惯量有

$$I = 2(I_1 + \lambda r_1 2\theta_1 \times (c_1 + d_1)^2) + 2(I_2 + \lambda r_2 2\theta_2 \times (d_2 - c_2)^2) \quad (7)$$

其中, I_1, I_2 为各弧对其质心的转动惯量, 有

$$I_1 + \lambda r_1 2\theta_1 c_1^2 = \lambda r_1 2\theta_1 r_1^2 \quad (8)$$

$$I_2 + \lambda r_2 2\theta_2 c_2^2 = \lambda r_2 2\theta_2 r_2^2 \quad (9)$$

综上

$$I = 4\lambda \left[r_1^3 \theta_1 \left(1 - \frac{\sin^2 \theta_1}{\theta_1^2} \right) + r_1 \theta_1 \left(\frac{r_1 \sin \theta_1}{\theta_1} + (r_2 - r_1) \cos \theta_1 \right)^2 + r_2^3 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \left(1 - \frac{\cos^2 \theta_1}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right)^2} \right) + r_2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \left(\frac{r_2 \cos \theta_1}{\frac{\pi}{2} - \theta_1} - (r_2 - r_1) \sin \theta_1 \right)^2 \right] = 28.88\lambda r^3 \quad (10)$$

(2) 平衡位置处要求重力势能的一阶导为零, 即质心与地面接触点连线垂直与地面。又由于边缘为圆弧, 有平面几何知, 平衡时地面接触点、质心、圆心三点一线, 所以平衡位置有且仅有四处 (两两全同), 如图所示:



取刚体在平衡位置附近转过小角度 $\varphi \ll 1$ 的一阶近似, 对于图一, 取平衡位置为势能零点

$$E_{p1} \approx -\frac{1}{2}mgd_1\varphi^2 < 0 \quad (11)$$

对图二类似有

$$E_{p2} \approx +\frac{1}{2}mgd_2\varphi^2 > 0 \quad (12)$$

显然图一平衡不稳定, 图二平衡稳定。

图二中小振动时动能可表示为

$$E_{k2} \approx \frac{1}{2}m(r_2 - d_2)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 \quad (13)$$

其中

$$m = \lambda \left(4r_1\theta_1 + 4r_2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \right) \quad (14)$$

能量守恒即

$$E_{p2} + E_{k2} = E = \text{Const.} \quad (15)$$

联立 (12) (13) (15) 可得

$$\omega^2 = g \frac{d_2}{(r_2 - d_2)^2 + \frac{I}{m}} = g \frac{(r_2 - r_1) \sin \theta_1}{(r_2 - (r_2 - r_1) \sin \theta_1)^2 + \frac{I}{\lambda \left(4r_1\theta_1 + 4r_2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \right)}}$$

$$\omega = 0.3160 \sqrt{\frac{g}{r}} \quad (16)$$

(3) 考虑接触地面的点位于半径为 r_1 的圆弧上

$$v_x = d_1 \cos \varphi \dot{\varphi} + r_1 \dot{\varphi} \quad (17)$$

$$v_y = -d_1 \sin \varphi \dot{\varphi} \quad (18)$$

φ 如前, 为偏离平衡位置的角度, 积分得

$$x = d_1 \sin \varphi + r_1 \varphi + C_1 \quad (19)$$

$$y = d_1 \cos \varphi + C_2 \quad (20)$$

选取弧 r_1 上平衡时地面接触点为零点后

$$x = d_1 \sin \varphi + r_1 \varphi \quad (21)$$

$$y = d_1 \cos \varphi + r_1 \quad (22)$$

类似可得

$$x = -d_2 \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + r_2 \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + C'_1 \quad (23)$$

$$y = -d_2 \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + C'_2 \quad (24)$$

代入 $\varphi = \theta_1$

$$x = d_2 \cos \varphi + r_2 \varphi + (r_1 - r_2) \theta_1 \quad (25)$$

$$y = -d_2 \sin \varphi + r_2 \quad (26)$$

综上所述

$$x(\varphi) = \begin{cases} (r_2 - r_1) \cos \theta_1 \sin \varphi + r_1 \varphi & -\theta_1 < \varphi \leq \theta_1 \\ (r_2 - r_1) \sin \theta_1 \cos \varphi + r_2 \varphi + (r_1 - r_2) \theta_1 & \theta_1 < \varphi \leq \pi - \theta_1 \\ x(\varphi \pm \pi) \mp (2r_1\theta_1 + r_2(\pi - 2\theta_1)) & \text{else} \end{cases} \quad (27)$$

$$y(\varphi) = \begin{cases} (r_2 - r_1) \cos \theta_1 \cos \varphi + r_1 & -\theta_1 < \varphi \leq \theta_1 \\ -(r_2 - r_1) \sin \theta_1 \sin \varphi + r_2 & \theta_1 < \varphi \leq \pi - \theta_1 \\ y(\varphi \pm \pi) & \text{else} \end{cases} \quad (28)$$

(4) (i) 先讨论平衡点在弧 r_1 上时

假设曲面向上弯曲时 $\rho > 0$, 纯滚有

$$(\rho - r_1)\theta = r_1\varphi \quad (29)$$

小角近似下, 质心上升

$$\Delta h = \frac{1}{2}(\rho - r_1)\theta^2 - \frac{1}{2}d_1\varphi^2 \quad (30)$$

稳定平衡要求其大于 0, 即

$$r_1 < \rho < r_1 + \frac{r_1^2}{d_1} = r_1 + \frac{r_1^2}{(r_2 - r_1) \cos \theta_1} \quad (31)$$

已考虑到 $d_1 > 0$ 的自带条件, 则角频率

$$\omega^2 = g \frac{\left(\frac{r_1^2}{\rho - r_1} - d_1\right)}{(r_1 + d_1)^2 + \frac{I}{m}} = g \frac{\left(\frac{r_1^2}{\rho - r_1} - (r_2 - r_1) \cos \theta_1\right)}{(r_1 + (r_2 - r_1) \cos \theta_1)^2 + \frac{I}{\lambda \left(4r_1 \theta_1 + 4r_2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right)}} \quad (32)$$

(ii) 若平衡点在弧 r_2 上, 同理可得

$$(\rho - r_2)\theta = r_2\varphi \quad (33)$$

$$\Delta h = \frac{1}{2}(\rho - r_2)\theta^2 + \frac{1}{2}d_2\varphi^2 \quad (34)$$

稳定平衡即

$$\rho < r_2 - \frac{r_2^2}{d_2} = r_2 - \frac{r_2^2}{(r_2 - r_1) \sin \theta_1} \text{ 或 } \rho > r_2 \quad (35)$$

角频率

$$\omega^2 = g \frac{\frac{r_2^2}{\rho - r_2} + d_2}{(r_2 - d_2)^2 + \frac{I}{m}} = g \frac{\frac{r_2^2}{\rho - r_2} + (r_2 - r_1) \sin \theta_1}{(r_2 - (r_2 - r_1) \sin \theta_1)^2 + \frac{I}{\lambda \left(4r_1 \theta_1 + 4r_2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right)}} \quad (36)$$

(5) (i) 对于半径为 r_1 的圆弧, 考虑一个小位移

$$\rho d\theta = r_1(d\theta - d\varphi) \quad (37)$$

那么

$$dh = (\rho - r_1) \sin \theta d\theta - d_1 \sin \varphi d\varphi \quad (38)$$

由 (37) (38) 联立可得

$$dh = -r_1 \sin \theta d\varphi - d_1 \sin \varphi d\varphi = 0 \quad (39)$$

即

$$\sin \varphi = -\frac{r_1}{d_1} \sin \theta \quad (40)$$

由摩擦角

$$\arctan \mu = \frac{d_1 \sin(\theta - \varphi)}{r_1 + d_1 \cos(\theta - \varphi)} \quad (41)$$

由 (40) (41) 联立可得

$$\mu_{\min} = \tan \left| \frac{(r_2 - r_1) \cos \theta_1 \sin(\theta - \varphi)}{r_1 + (r_2 - r_1) \cos \theta_1 \cos(\theta - \varphi)} \right| \quad (42)$$

再求导

$$d^2h = \left(r_1 \cos \theta \frac{r_1}{\rho - r_1} - d_1 \cos \varphi \right) (d\varphi)^2 \quad (43)$$

稳定平衡要求

$$r_1 < \rho < r_1 + \frac{r_1^2 \cos \theta}{d_1 \cos \varphi} = r_1 + \frac{r_1^2 \cos \theta}{(r_2 - r_1) \cos \theta_1 \cos \varphi} \quad (44)$$

则

$$E = \left[\frac{1}{2} I (\dot{d}\varphi)^2 + \frac{1}{2} m (r_1^2 + d_1^2 + 2r_1 d_1 \cos(\theta - \varphi)) (\dot{d}\varphi)^2 \right] + \frac{1}{2} mg \left(\frac{d^2h}{d\varphi^2} \right) (d\varphi)^2 \quad (45)$$

故

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{g \left(r_1 \cos \theta \frac{r_1}{\rho - r_1} - d_1 \cos \varphi \right)}{I + m(r_1^2 + d_1^2 + 2r_1 d_1 \cos(\theta - \varphi))} \\ &= \frac{g \left(r_1 \cos \theta \frac{r_1}{\rho - r_1} - (r_2 - r_1) \cos \theta_1 \cos \varphi \right)}{I + \lambda \left(4r_1 \theta_1 + 4r_2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \right) \left(r_1^2 + ((r_2 - r_1) \cos \theta_1)^2 + 2r_1(r_2 - r_1) \cos \theta_1 \cos(\theta - \varphi) \right)}\end{aligned}\quad (46)$$

同理，将 $1 \rightarrow 2, d_1 \rightarrow -d_2$

(ii) 平衡条件

$$\sin \varphi = \frac{r_2}{d_2} \sin \theta \quad (47)$$

摩擦因数

$$\mu_{\min} = \tan \left| \frac{-(r_2 - r_1) \sin \theta_1 \sin(\theta - \varphi)}{r_2 - (r_2 - r_1) \sin \theta_1 \cos(\theta - \varphi)} \right| \quad (48)$$

稳定要求

$$\rho > r_2 \text{ 或 } \rho < r_2 - \frac{r_2^2 \cos \theta}{d_2 \cos \varphi} = r_2 - \frac{r_2^2 \cos \theta}{(r_2 - r_1) \sin \theta_1 \cos \varphi} \quad (49)$$

其中 $r_2 - \frac{r_2^2 \cos \theta}{d_2 \cos \varphi} < 0$ 自动成立

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{g \left(r_2 \cos \theta \frac{r_2}{\rho - r_2} + d_2 \cos \varphi \right)}{I + m(r_2^2 + d_2^2 - 2r_2 d_2 \cos(\theta - \varphi))} \\ &= \frac{g \left(r_2 \cos \theta \frac{r_2}{\rho - r_2} + (r_2 - r_1) \sin \theta_1 \cos \varphi \right)}{I + \lambda \left(4r_1 \theta_1 + 4r_2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \right) \left(r_2^2 + ((r_2 - r_1) \sin \theta_1)^2 - 2r_2(r_2 - r_1) \sin \theta_1 \cos(\theta - \varphi) \right)}\end{aligned}\quad (50)$$

评分标准：本题满分 80 分。

第 (1) 问 12 分：(2) (3) (5) (6) (8) (9) 式各 1 分，(10) 式 6 分；

第 (2) 问 18 分：图 2 平衡稳定 4 分，(12) (13) 式各 4 分，(16) 式 6 分；

第 (3) 问 16 分：(21) (22) (25) (26) 式各 2 分，(27) (28) 式各 4 分；

第 (4) 问 20 分：(31) (32) (35) (36) 式各 5 分；

第 (5) 问 14 分：(37) (38) (40) (41) (42) (47) (48) 式各 2 分。

二、(40 分)

由麦克斯韦方程组可知，随时间变化的磁场会激发涡旋电场。我们平时仅对对称性较高的情形做过一些讨论，然而对于一般情况的计算较少。因此，本题考虑无限空间中分布的时变磁场 $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ ，其中 \vec{r} 为位矢。作为简化，本题中磁场的时间变化率为常矢量，激发的涡旋电场为稳恒场。所有的计算结果均用柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 表示。

(1) (1.1) 先计算对称性较高的情形：令

$$\vec{B} = \begin{cases} -k_0 t \hat{z}, & 0 \leq \rho < R \\ \vec{0}, & \rho > R \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 k_0 为正常量。已知涡旋电场只有 $\hat{\phi}$ 分量，试计算其激发的涡旋电场 $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ 。

(1.2) 去掉磁场，在空间中加入稳恒的电流密度分布

$$\vec{j} = \begin{cases} j_0 \hat{z}, & 0 \leq \rho < R \\ \vec{0}, & \rho > R \end{cases} \quad (2.2)$$

计算其在空间中激发的静磁场 $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ ，与第 (1.1) 小问中的结果比较。

(2) 实际上, 研究感生电场时, 考虑空间中无静电荷:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = 0, \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\sigma} \quad (2.3.1)$$

而研究静磁场时, 考虑空间中无时变电场:

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0, \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} \quad (2.3.2)$$

可以观察到 (2.3.1) 式与 (2.3.2) 式在形式上同构, 而在相同的边界条件下 (本题中为无限空间), 令 $\mu_0 \vec{j} \rightarrow -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 后, 对应电流分布的静磁场的解便可直接套用至涡旋电场中。由于我们更熟悉静磁场的计算, 这样能问题简化。

研究以下时变磁场分布:

$$\vec{B} = -\frac{kt}{\rho^2} \frac{\epsilon(\epsilon + \cos \phi)}{(1 + \epsilon \cos \phi)^2} \hat{z} = -\frac{kt}{\rho^2} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\epsilon \sin \phi}{1 + \epsilon \cos \phi} \right) \hat{z} \quad (2.4)$$

其中 k 为正常量, ϵ 为无量纲实数, $0 < \epsilon < 1$ 。

(2.1) 为计算其激发的涡旋电场, 先将其转化为已知稳恒电流分布求解静磁场问题。试给出对应的稳恒电流分布。记新引入的一个电流量纲的物理量为 I_0 。

(2.2) 承第 (2.1) 小问, 考虑 (ρ', ϕ') 处无穷长直电流在 (ρ, ϕ) 处产生的磁场, 再对全平面积分, 以计算上一问新的体系中 (ρ, ϕ) 处总磁场 \vec{B} 的径向分量 B_ρ 。

提示 1: 计算二重积分时, 先对 ρ' 积分可以减小计算量。

提示 2: $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} - \arctan a$, 注意反正切函数的值域。当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时 $\arctan \tan x = x$ 。

(2.3) 回到原来的体系, 显然有 $E_z = 0$ 。求解 E_ϕ 时会遇到发散困难, 但若稍微修改一下前述磁场分布的定义, 即先令 $0 \leq \rho < \rho_0$ 内为零, 再令 $\rho_0 \rightarrow 0$, 可以计算得到 $E_\phi = 0$ 。再叠加下述磁场

$$\vec{B} = \begin{cases} -\frac{2kt}{R^2} \hat{z}, & 0 \leq \rho < R \\ \vec{0}, & \rho > R \end{cases}, R \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

试求出涡旋电场线的形状方程, 用 $\rho = \rho(\phi)$ 表示。若令 $\epsilon \rightarrow 1$, 会得到什么结果?

解: (1) (1.1) 由法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (1)$$

结合

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2\pi\rho E_\phi \\ \Phi_m &= \begin{cases} -\pi\rho^2 k_0, & 0 \leq \rho \leq R \\ -\pi R^2 k_0, & \rho > R \end{cases} \end{aligned}$$

得到

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{k_0\rho}{2} \hat{\phi}, & 0 < \rho \leq R \\ \frac{k_0 R^2}{2\rho} \hat{\phi}, & \rho > R \end{cases} \quad (2)$$

(1.2) 由对称性, 磁场仅有 $\hat{\phi}$ 方向分量。由安培环路定律

$$2\pi\rho B = \mu_0 I \quad (3)$$

结合

$$I = \begin{cases} \pi \rho^2 j_0, 0 \leq \rho \leq R \\ \pi R^2 j_0, \rho > R \end{cases}$$

得到

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 j_0 \rho}{2} \hat{\phi}, 0 < \rho \leq R \\ \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2\rho} \hat{\phi}, \rho > R \end{cases} \quad (4)$$

(2) (2.1) 逆向使用题目所述规律, 得到

$$\vec{j}(\rho, \phi) = \frac{I_0}{\rho^2} \cdot \frac{\epsilon(\epsilon + \cos \phi)}{(1 + \epsilon \cos \phi)^2} \hat{z} \quad (5)$$

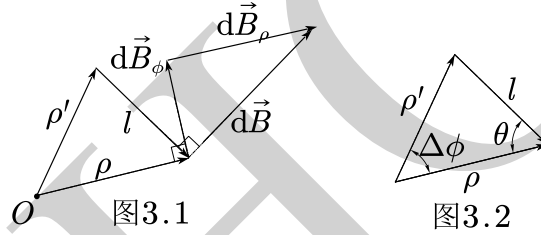
(2.2) 考虑 $\rho' \rightarrow \rho' + d\rho'$, $\phi' \rightarrow \phi' + d\phi'$ 处无穷长直电流

$$dI = j(\rho', \phi') \cdot \rho' d\rho' d\phi' = \frac{I_0}{\rho'} \cdot \frac{\epsilon(\epsilon + \cos \phi)}{(1 + \epsilon \cos \phi)^2} \cdot d\rho' d\phi'$$

在 (ρ, ϕ, z) 处产生的磁场。大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{dI}{l} \quad (6)$$

l 与磁场的方向如图 3.1 所示。



径向分量

$$dB_\rho = dB \cdot \sin \theta \quad (7)$$

θ 已经在图 3.2 中给出。

记 $\Delta\phi = \phi' - \phi$, 在如图 3.2 所示的矢量三角形中, 由正弦定理

$$\frac{\rho'}{\sin \theta} = \frac{l}{\sin \Delta\phi} \quad (8)$$

余弦定理

$$l^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \Delta\phi \quad (9)$$

消去 l 与 θ , 得到

$$dB_\rho = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon(\epsilon + \cos \phi')}{(1 + \epsilon \cos \phi')^2} \cdot \frac{\sin(\phi' - \phi)}{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi' - \phi)} \cdot d\rho' d\phi' \quad (10.1)$$

对全平面积分, 得到

$$B_\rho = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi' - \phi)} \cdot d\rho' \right] \cdot \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon(\epsilon + \cos \phi') \cdot \sin(\phi' - \phi)}{(1 + \epsilon \cos \phi')^2} \cdot d\phi' \quad (10.2)$$

先积中括号内。利用提示 2, 注意加绝对值, 计算得到

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi' - \phi)} \cdot d\rho' \\
&= \int_{-\cot|\phi' - \phi|}^{+\infty} \frac{1}{\rho \sin|\phi' - \phi|} \cdot \frac{d\left(\frac{\rho'}{\rho \sin|\phi' - \phi|} - \cot|\phi' - \phi|\right)}{\left(\frac{\rho'}{\rho \sin|\phi' - \phi|} - \cot|\phi' - \phi|\right)^2 + 1} \\
&= \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(-\cot|\phi' - \phi|)}{\rho \sin|\phi' - \phi|}
\end{aligned} \tag{11}$$

注意余切函数的定义域和反正切函数的值域, 对于 $-\pi + \phi < \phi' < \pi + \phi$ 的情形, 化简为

$$\frac{\pi - |\phi' - \phi|}{\rho \sin|\phi' - \phi|} \tag{12}$$

代入 (10.2) 式, 调整积分的上下限, 得到

$$B_\rho = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\rho} \cdot \int_{-\pi+\phi}^{\pi+\phi} \frac{\epsilon(\epsilon + \cos\phi')}{(1 + \epsilon \cos\phi')^2} \cdot \frac{(\pi - |\phi' - \phi|) \sin|\phi' - \phi|}{\sin(\phi' - \phi)} d\phi' \tag{13}$$

将积分拆成 $(-\pi + \phi, \phi)$ 与 $(\phi, \pi + \phi)$ 两段, 再处理得

$$B_\rho = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\rho} \cdot \left[\int_\phi^{\pi+\phi} \frac{\pi\epsilon(\epsilon + \cos\phi')}{(1 + \epsilon \cos\phi')^2} d\phi' - \int_{-\pi+\phi}^\phi \frac{\pi\epsilon(\epsilon + \cos\phi')}{(1 + \epsilon \cos\phi')^2} d\phi' - \int_{-\pi+\phi}^{\pi+\phi} \frac{(\phi' - \phi)\epsilon(\epsilon + \cos\phi')}{(1 + \epsilon \cos\phi')^2} d\phi' \right] \tag{14}$$

其中括号中第一、二项同构, 由题目可知

$$\begin{aligned}
& \int_\phi^{\pi+\phi} \frac{\pi\epsilon(\epsilon + \cos\phi')}{(1 + \epsilon \cos\phi')^2} d\phi' - \int_{-\pi+\phi}^\phi \frac{\pi\epsilon(\epsilon + \cos\phi')}{(1 + \epsilon \cos\phi')^2} d\phi' \\
&= \left(\frac{\pi\epsilon \sin\phi'}{1 + \epsilon \cos\phi'} \right) \Big|_\phi^{\pi+\phi} - \left(\frac{\pi\epsilon \sin\phi'}{1 + \epsilon \cos\phi'} \right) \Big|_{-\pi+\phi}^\phi \\
&= -2\pi\epsilon \sin\phi \cdot \left(\frac{1}{1 + \epsilon \cos\phi} + \frac{1}{1 - \epsilon \cos\phi} \right)
\end{aligned} \tag{15.1}$$

第三项, 分部积分

$$- \int_{-\pi+\phi}^{\pi+\phi} \frac{(\phi' - \phi)\epsilon(\epsilon + \cos\phi')}{(1 + \epsilon \cos\phi')^2} d\phi' = - \left[\frac{(\phi' - \phi)\epsilon \sin\phi'}{1 + \epsilon \cos\phi'} \right] \Big|_{-\pi+\phi}^{\pi+\phi} + \int_{-\pi+\phi}^{\pi+\phi} \frac{\epsilon \sin\phi'}{1 + \epsilon \cos\phi'} d\phi' = \frac{2\pi\epsilon \sin\phi}{1 - \epsilon \cos\phi} \tag{15.2}$$

代回化简得到最终结果

$$B_\rho = -\frac{\mu_0 I_0}{\rho} \cdot \frac{\epsilon \sin\phi}{1 + \epsilon \cos\phi} \tag{16}$$

(2.3) 回到原来的体系, 感生电场分布为

$$\vec{E}_1 = -\frac{k}{\rho} \cdot \frac{\epsilon \sin\phi}{1 + \epsilon \cos\phi} \hat{\rho}$$

再叠加上题干中的时变磁场产生的涡旋电场 (套用 (1) 中结论)

$$\vec{E}_2 = \frac{k}{\rho} \hat{\phi}$$

得到

$$\vec{E} = -\frac{k}{\rho} \cdot \frac{\epsilon \sin\phi}{1 + \epsilon \cos\phi} \hat{\rho} + \frac{k}{\rho} \hat{\phi} \tag{17}$$

电场强度矢量在 $z = \text{Const.}$ 的平面内, 相应地所有电场线也在这样的平面内。

电场强度矢量的方向即为电场线切线方向

$$\frac{d\rho}{\rho d\phi} = \frac{E_\rho}{E_\phi} \quad (18)$$

代入 \vec{E} 表达式，化简得到

$$\frac{d\rho}{\rho d\phi} = -\frac{\epsilon \sin \phi}{1 + \epsilon \cos \phi} \quad (19)$$

分离变量积分得到

$$\rho = \rho_0(1 + \epsilon \cos \phi) \quad (20)$$

ρ_0 为积分常数。 $(\rho_0 > 0)$

令 $\epsilon \rightarrow 1$ ，得到

$$\rho = \rho_0(1 + \cos \phi) \quad (21)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 10 分：

第 (1.1) 问 5 分：(1) 式 2 分，(2) 式 3 分；

第 (1.2) 问 5 分：(3) 式 2 分，(4) 式 3 分；

第 (2) 问 30 分：

第 (2.1) 问 3 分：(5) 式 3 分；

第 (2.2) 问 17 分：(6) (7) (8) (9) 式各 2 分，(10.1) (10.2) (11) (12) (13) (14) (15.1)

(15.2) (16) 式各 1 分；

第 (2.3) 问 10 分：(17) (18) (19) (20) (21) 式各 2 分。

三、(40 分)

小H有一个 N 缝光栅，光栅常数为 $2L$ ，每个衍射单元的透射率如图3.1所示。小H用波长为 λ 的单色光垂直照射光栅，并在光栅后放置了一个焦距为 f 的透镜 L_1 。本题仅考虑夫琅禾费衍射。

(1) 求出每个衍射单元的衍射因子。

(2) 求出光强随角度变化规律，用单缝主极大光强 I_0 表示，并分析主极大的位置。

(3) 假设 N 很大，可以看作有无穷多的缝。小H将透镜 L_1 放在光栅后距离光栅 f 处，并又找了一个焦距相同的透镜 L_2 放置在 L_1 后 $2f$ 处，在 L_2 后 f 处放置了一个像屏。小H还在 L_1 后 f 处放置了一个光阑，将衍射角 $\sin \theta > \lambda/L$ 的光全部挡住了。求出像屏上的相对亮度分布。

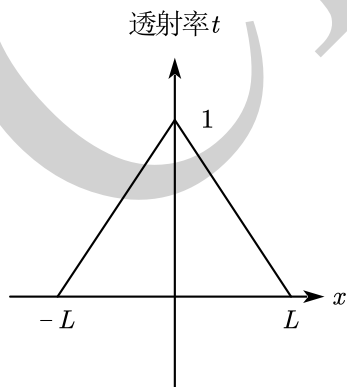


图3.1

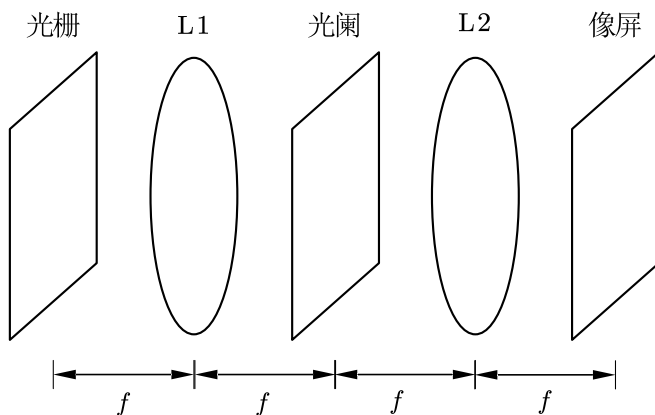


图3.2

解：(1) 对单缝进行振幅的衍射积分，将振幅记为 U 。

$$U \propto \int_{-L}^L t(x) e^{-ikx \sin \theta} dx \quad (1)$$

透射率函数为

$$t(x) = 1 - \frac{|x|}{L}, |x| < L \quad (2)$$

$$\begin{aligned} U &\propto \int_{-L}^L (1 - \frac{|x|}{L}) e^{-ikx \sin \theta} dx = 2 \int_0^L (1 - \frac{x}{L}) \cos(kx \sin \theta) dx \\ &= 2 \left[\frac{\sin(kx \sin \theta)}{k \sin \theta} - \frac{1}{L} \left(\frac{\cos(kx \sin \theta)}{k^2 \sin^2 \theta} + \frac{x \sin(kx \sin \theta)}{k \sin \theta} \right) \right]_0^L \\ &= 2L \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} - \frac{\cos \alpha - 1}{\alpha^2} - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) = 4L \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha^2} \propto \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right)^2 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\alpha = kL \sin \theta = \frac{2\pi L \sin \theta}{\lambda} \quad (4)$$

$$I' \propto U^2 \propto \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right)^4 \quad (5)$$

即单缝衍射因子为

$$\left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right)^4 \quad (6)$$

光栅的干涉因子为

$$\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \quad (7)$$

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right)^4 \left(\frac{\sin N\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \quad (8)$$

(2) 衍射极小 (缺级) 发生在

$$\alpha = 2\pi m \quad (m \in \mathbb{Z}, m \neq 0) \quad (9)$$

可以看出非 0 级的偶数级主极大均缺失。主极大位置为

$$\alpha = 0, \pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \dots \quad (10)$$

(3) 光栅通过两个透镜在像屏上成等大的像。光阑所在平面为频谱面，频谱面上的每个主极大对应一个频率信息。像的高频部分被光阑挡住了，只留下低频部分通过。不难得到只有 0 级和 ± 1 级主极大的光通过了光阑。

方法 1：分析各主极大处的振幅分布。

因为各主极大处干涉因子相同，所以我们只分析衍射因子。第 m 级主极大处的振幅正比于

$$A_m = \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right)^2 \Big|_{\alpha=m\pi} = \begin{cases} 1, (m=0) \\ 0, (m=\pm 2m', m' \in \mathbb{N}_+) \\ \frac{4}{m^2\pi^2}, (m=2m'+1, m' \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad (11)$$

$$A_1 = A_{-1} = \frac{4}{\pi^2} \quad (12)$$

$$U' \propto A_0 + A_1 e^{-i\frac{\pi x}{L}} + A_{-1} e^{i\frac{\pi x}{L}} = 1 + \frac{8}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{L} \quad (13)$$

$$I' \propto U'^2 \propto \left(1 + \frac{8}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{L}\right)^2 \quad (14)$$

方法2：通过傅里叶展开求出系数。

A_0 是直流分量的大小，即是 $t(x)$ 平均值。

$$A_0 = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$t(x)$ 是偶函数，应该将其展开成余弦级数。

$$A_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L t(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \frac{\sin^2 \left(\frac{m\pi x}{2L}\right)}{\left(\frac{m\pi x}{2L}\right)^2} \Big|_{x=L} = \frac{4 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{2}\right)}{m^2 \pi^2} \quad (16)$$

从这里可以很清楚地看到 m 为非0的偶数时 $A_m = 0$ ，即非0的偶数级全部缺级。

$$A_1 = \frac{4}{\pi^2} \quad (17)$$

像平面上的振幅分布

$$U' \propto A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{L} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{L} \quad (18)$$

$$I' \propto U'^2 \propto \left(1 + \frac{8}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{L}\right)^2 \quad (19)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 11 分：（1）式 3 分，（3）（5）式各 4 分；

第（2）问 9 分：（8）（9）（10）式各 3 分；

第（3）问 20 分：方法 1：（11）（12）（13）（14）式各 5 分；方法 2：（16）（17）（18）（19）式各 5 分。

四、（100 分）

转子发动机（Wankel Engine）是由德国人菲加士·汪克尔（Felix Wankel）所发明。他在总结前人工作的基础上，解决了一些关键技术问题，成功研制了第一台转子发动机。转子发动机采用三角转子旋转来控制压缩和排放，如图4.1所示，与传统的往复式发动机的直线运动迥然不同。

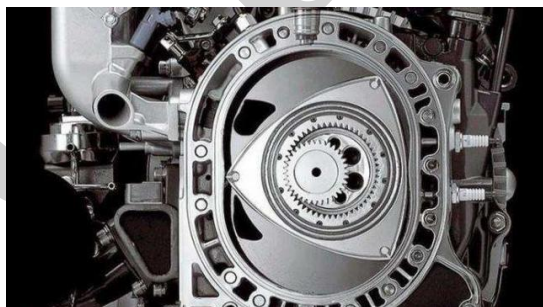


图4.1

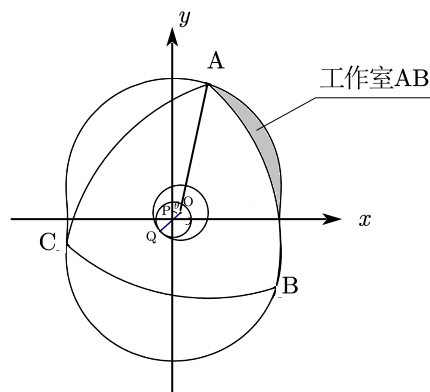


图4.2

转子发动机的运动特点是：三角转子的中心绕输出轴中心公转的同时，三角转子本身又绕其中心自转。这样使得三角转子顶点的运动轨迹（即汽缸壁的形状）似“8”字形。三角转子把汽缸分成三个独立空间，三个空间各自先后完成进气、压缩、做功和排气，三角转子自转一周，发动机点火做功三次。

(1) 转子发动机的简化几何结构如图4.2所示。中心齿轮固定在缸体上，其中心为P；正三角形ABC中心为O，同样也是内齿圈的中心。内齿圈与中心齿轮啮合于Q，转子中心半径 $3r$ 圆柱体内壁只有与中心齿轮接触部分为内齿圈，其余部分光滑。圆弧AB圆心为C；圆弧BC圆心为A；圆弧AC圆心为B；ABC三点与缸体外壳接触点密封良好且无相互作用力。传动轴顶部圆柱体半径略小于 $3r$ ，与转子接触点保持光滑，中心齿轮与传动轴不接触。设 $AO = a$ ， $PQ = 2OP = 2r$ 。

(1.1) 设 θ 为OP相对y轴转过的角度， $\theta = 0$ 时A, O, P, Q均在y轴上。以 θ 为参数，在直角坐标系下，写出A点运动轨迹的参数方程 $x(\theta), y(\theta)$ ，此即缸体内壁的方程。

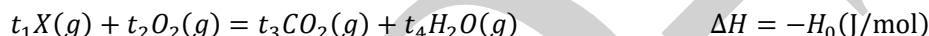
(1.2) 设缸体内壁深（即转子的高）为 d ，工作室AB容积 $V(\theta)$ 与角度 θ 的关系为

$$V(\theta) = \pi r^2 d - \frac{\pi a^2 d}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 d - \frac{9rad}{4} \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) - \frac{3\sqrt{3}rad}{4} \cos\left(\frac{2\theta}{3}\right) \quad (4.1)$$

根据上述表达式，给出 V 的极大值 V_+ 、极小值 V_- ，以及对应的 θ 的值。

(1.3) 设工作室AB内气体压强 $P = P(\theta)$ 。在转子匀速转动时，求出传动轴上的外力矩 $M = M(\theta)$ 。答案可含 $P(\theta + \varphi)$ ，其中 φ 为任意常数。注意一共有三个工作室。

(2) 气缸中燃料X燃烧的热化学方程式为



其中焓 $H = U + PV$ ， U 为内能，负号表示反应放热。本题中 $H_0 > 0$ 可近似视为常数。设

参数 $\mu = \frac{t_3+t_4}{t_1+t_2}$ ， $h = \frac{H_0}{t_1+t_2}$ 。进气口、排气口、点火器坐标分别为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a - r\right)$ ， $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, -\frac{1}{2}a + r\right)$ ， $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a, \frac{1}{2}a - r\right)$ 。

已知进气口处气体压强为 P_1 ，出气口处气体压强为 P_0 。进入气缸的气体均为 $t_1:t_2$ 的温度为 T_0 的 $X - O_2$ 混合气体，等压摩尔热容 $C_{v,m} = \alpha R$ 。排出的气体均为 $t_3:t_4$ 的 $CO_2 - H_2O(g)$ 混合气体，等压摩尔热容 $C_{v,m} = \beta R$ 。全过程中水保持气态，所有气体均为理想气体。

对于AB工作室，循环分为如下几个部分：

步骤 1: $\theta = -5\pi/2$ ，关闭排气口，打开进气口，工作室气压瞬间变为 P_1 ，此时温度分布不均匀；

步骤 2: $\theta = -\pi$ ，关闭进气口，工作室气体已达热力学平衡，此时温度已均匀分布，然后气体绝热压缩；

步骤 3: $\theta = \pi/2$ ，点火，发生反应可视为瞬时完成，反应前后焓不变，然后气体绝热膨胀；

步骤 4: $\theta = 2\pi$ ，打开排气口，工作室气压瞬间变为 P_0 ，可视作气体瞬间绝热膨胀；

步骤 5: $\theta = 7\pi/2$ ，关闭排气口，打开进气口，即回到步骤 1。

参数: $\mu = 0.937500$, $h = 284.3750 \text{ kJ/mol}$, $P_0 = 101325.0 \text{ Pa}$, $P_1 = 70000 \text{ Pa}$, $\alpha = 2.53125$, $\beta = 2.76667$, $V_+ = 900.000 \text{ mL}$, $V_- = 200.000 \text{ mL}$, $T_0 = 320.000 \text{ K}$ 。

本问答案均保留 6 位有效数字。

(2.1) 设 $\theta = -5\pi/2$ 时工作室AB内有摩尔数为 n_f （未知）、温度为 T_f （未知）的 $t_3:t_4$ 的 $CO_2 - H_2O(g)$ 混合气体， $\theta = -5\pi/2$ 到 $\theta = -\pi$ 过程中共有 $n_1 = 0.0163735 \text{ mol}$ 混合燃气进入工作室AB，且 $\theta = -\pi$ 时工作室气体温度 T_1 。

请利用热力学第一定律求出 n_f 和 T_1 。设 $\theta = -\pi$ 时，混合气体满足 $C_{v,m} = \gamma R$ ，求 γ 的表达式，用 $\alpha, \beta, \mu, h, V_+, V_-, P_0, P_1, n_1, T_0$ 表示，并代入数值计算 γ 的值。

(2.2) 请求出 $\theta = \pi/2$ 点火后气体的温度 T_2 ，压强 P_2 表达式，用 $\alpha, \beta, \mu, h, V_+, V_-, P_0, P_1, n_1, T_0$ 表示，并代入数值计算 P_2 的值。

(2.3) 设 $\theta = 7\pi/2$ 循环结束时，工作室气体温度仍为 T_f ，求 n_1 满足的方程。此时由于

T_2, P_2, n_f 与 n_1 关系已知, 因此可直接用 $T_2, P_0, P_1, P_2, n_f, \alpha, \beta$ 表示。

(2.4) 求工作室 AB 内气体压强 $P = P(\theta)$, 用 $\alpha, \beta, \gamma, \theta, V_+, V_-, P_0, P_1, P_2$ 表示。

解: (1) (1.1) 根据几何关系, 可以直接写出:

$$x = a \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) + r \sin \theta \quad (1)$$

$$y = a \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + r \cos \theta \quad (2)$$

(1.2)

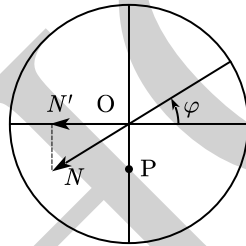
$$V = \pi r^2 d - \frac{\pi a^2 d}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 d - \frac{3\sqrt{3}rad}{2} \cos\left(\frac{2\theta - \pi}{3}\right) \quad (3)$$

$$V_+ = \pi r^2 d - \frac{\pi a^2 d}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 d + \frac{3\sqrt{3}rad}{2}, \theta = -\pi, 2\pi(+6k\pi) \quad (4)$$

$$V_- = \pi r^2 d - \frac{\pi a^2 d}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 d - \frac{3\sqrt{3}rad}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}(+6k\pi) \quad (5)$$

k 为整数。

(1.3) 由于转子匀速转动, 分析转子绕质心的转动力矩可知 Q 点无切向作用力。则考虑传动轴受转子的压力



$$M(\theta) = Nr \cos \varphi = N'r \quad (6)$$

可以只分析垂直 OP 方向转子受力。

根据对称性得

$$N' = \sqrt{3}ad \left(P(\theta) \sin\left(\frac{2\theta - \pi}{3}\right) + P(\theta + 2\pi) \sin\left(\frac{2\theta + 3\pi}{3}\right) + P(\theta + 4\pi) \sin\left(\frac{2\theta + 7\pi}{3}\right) \right)$$

$$M = \sqrt{3}adr \left(P(\theta) \sin\left(\frac{2\theta - \pi}{3}\right) + P(\theta + 2\pi) \sin\left(\frac{2\theta + 3\pi}{3}\right) + P(\theta + 4\pi) \sin\left(\frac{2\theta + 7\pi}{3}\right) \right) \quad (7)$$

[解法 (二)]

使用功能原理,

$$Md\theta = -dW = -[P(\theta)V'(\theta) + P(\theta + 2\pi)V'(\theta + 2\pi) + P(\theta + 4\pi)V'(\theta + 4\pi)]d\theta \quad (6)$$

结合

$$V'(\theta) = \sqrt{3}adr \sin\left(\frac{2\theta - \pi}{3}\right)$$

得到

$$M = \sqrt{3}adr \left(P(\theta) \sin\left(\frac{2\theta - \pi}{3}\right) + P(\theta + 2\pi) \sin\left(\frac{2\theta + 3\pi}{3}\right) + P(\theta + 4\pi) \sin\left(\frac{2\theta + 7\pi}{3}\right) \right) \quad (7)$$

]

(2) (2.1) 对于理想气体

$$P_0 V_- = n_f R T_f \quad (8)$$

$$P_1 V_+ = n_f R T_1 + n_1 R T_1 \quad (9)$$

进气口对工作室AB做功 $W_1 = P_1 \Delta V_1 = n_1 RT_0$ ，工作室AB对外做功 $W_2 = P_1(V_+ - V_-)$ ，热力学第一定律得

$$(1 + \alpha)n_1 RT_0 + \beta n_f RT_f - P_1(V_+ - V_-) = \beta n_f RT_1 + \alpha n_1 RT_1 \quad (10)$$

由定义易得

$$\frac{\beta n_f + \alpha n_1}{n_f + n_1} = \gamma \quad (11)$$

解得

$$\gamma = \frac{(1 + \alpha)n_1 RT_0 + \beta P_0 V_- - P_1(V_+ - V_-)}{P_1 V_+} \quad (12)$$

$$n_f = \frac{\beta P_0 V_- - P_1(V_+ - V_-) - \alpha P_1 V_+ + (1 + \alpha)n_1 RT_0}{\beta P_1 V_+ - \beta P_0 V_- + P_1(V_+ - V_-) - (1 + \alpha)n_1 RT_0} n_1 \quad (13)$$

$$T_1 = \frac{\beta P_1 V_+ - \beta P_0 V_- + P_1(V_+ - V_-) - (1 + \alpha)n_1 RT_0}{(\beta - \alpha)n_1 R} \quad (14)$$

$$\gamma = 2.55399 \quad (15)$$

$$n_f = 1.75045 \times 10^{-3} \text{ mol} \quad (16)$$

$$T_1 = 418.074 \text{ K} \quad (17)$$

(2.2) 考虑绝热压缩

$$P = \frac{P_1 V_+^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}{V^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}$$

得点燃前温度

$$T_1' = T_1 \left(\frac{V_+}{V_-} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (18)$$

焓不变，得

$$H = (\gamma + 1)(n_f + n_1)RT_1' + n_1 h = (\beta + 1)(n_f + \mu n_1)RT_2 \quad (19)$$

$$T_2 = \frac{h + \left(\frac{P_1 V_+}{n_1} \right) \left(1 + \frac{(1 + \alpha)n_1 RT_0 + \beta P_0 V_- - P_1(V_+ - V_-)}{P_1 V_+} \right) \left(\frac{V_+}{V_-} \right)^{\frac{P_1 V_+}{(1 + \alpha)n_1 RT_0 + \beta P_0 V_- - P_1(V_+ - V_-)}}}{R(\beta + 1) \left(\mu + \frac{\beta P_0 V_- - P_1(V_+ - V_-) - \alpha P_1 V_+ + (1 + \alpha)n_1 RT_0}{\beta P_1 V_+ - \beta P_0 V_- + P_1(V_+ - V_-) - (1 + \alpha)n_1 RT_0} \right)} \quad (20)$$

$$P_2 = \frac{h + \left(\frac{P_1 V_+}{n_1} \right) \left(1 + \frac{(1 + \alpha)n_1 RT_0 + \beta P_0 V_- - P_1(V_+ - V_-)}{P_1 V_+} \right) \left(\frac{V_+}{V_-} \right)^{\frac{P_1 V_+}{(1 + \alpha)n_1 RT_0 + \beta P_0 V_- - P_1(V_+ - V_-)}}}{(\beta + 1)V_-} n_1 \quad (21)$$

$$T_2 = 762.076 \text{ K} \quad (22)$$

$$P_2 = 5.41769 \times 10^5 \text{ Pa} \quad (23)$$

(2.3) 考虑绝热膨胀，打开放气口， $P = P_0$

$$\frac{P_0 V_-}{n_f R} = T_f' = T_2 \left(\frac{P_0}{P_2} \right)^{\frac{1}{\beta+1}} \quad (24)$$

(2.4)

$$V(\theta) = \frac{V_+ + V_-}{2} - \frac{V_+ - V_-}{2} \cos\left(\frac{2\theta - \pi}{3}\right)$$

$$P(\theta) = \begin{cases} P_1, & -5\pi/2 \leq \theta < -\pi \\ P_1 \frac{V_+^{\frac{1}{1+\gamma}}}{\left(\frac{V_+ + V_-}{2} - \frac{V_+ - V_-}{2} \cos\left(\frac{2\theta - \pi}{3}\right)\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}}, & -\pi \leq \theta < \pi/2 \\ P_2 \frac{V_-^{\frac{\beta+1}{\beta}}}{\left(\frac{V_+ + V_-}{2} - \frac{V_+ - V_-}{2} \cos\left(\frac{2\theta - \pi}{3}\right)\right)^{\frac{\beta+1}{\beta}}}, & \pi/2 \leq \theta < 2\pi \\ P_0, & 2\pi \leq \theta < 7\pi/2 \end{cases} \quad (25)$$

评分标准：本题满分 100 分。

第 (1) 问 32 分：

第 (1.1) 小问 8 分：(1) (2) 式各 4 分；

第 (1.2) 小问 9 分：(3) (4) (5) 式各 3 分；

第 (1.3) 小问 15 分：(6) 式 7 分，(7) 式 8 分；

第 (2) 问 68 分：

第 (2.1) 小问 34 分：(8) (9) (10) (11) 式各 4 分，(12) (13) (14) (15) (16) (17) 式各 3 分；

第 (2.2) 小问 18 分：(18) 式 2 分，(19) 式 4 分，(20) (21) (22) (23) 式各 3 分；

第 (2.3) 小问 4 分：(24) 式 4 分；

第 (2.4) 小问 12 分：(25) 式每个区间对应表达式各 3 分。

后记：可以尝试验证 (3) 式，提示：封闭图形 $S = \oint y dx$ 。

五、(60 分)

广义相对论中，任何观测者所持的任何一种作周期运动的真实装置，都可以作为他的标准钟。此钟所记录的时间，就是他的固有时，也就是他真实经历的时间。同时，空间任意两点间的时空距离与它们的时空坐标之间由度规 g_{ij} 联系，即：

$$ds^2 = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 g_{ij} dx^i dx^j \quad (5.1)$$

在此题中，设 x^0 为时间坐标，而 x^1, x^2, x^3 为三个空间坐标，并且 $g_{00} < 0$ 。

对于一个观测者来说，上式表明了它世界线的长度。广义相对论中，世界线的长度是用它的标准钟的读数来参数化的。这样，固有时间就与自然世界线的长度成正比了。因此可以定义：

$$d\tau = i \frac{ds}{c} \quad (5.2)$$

其中 $d\tau$ 为固有时的微分， $i^2 = -1$ 。

广义相对论中，还存在一种虚构的坐标钟，满足：

$$dt = \frac{dx^0}{c} \quad (5.3)$$

(1) 假设观测者相对空间保持静止，即 x^1, x^2, x^3 不变，求观测者所持的标准钟与坐标钟的钟速之比 $\frac{d\tau}{dt}$ ，用 c 和 g_{ij} 的分量表示。

(2) 对于狭义相对论研究的惯性系，存在以下关系：

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (5.4)$$

一个观测者相对于该惯性系以速度 v 运动，求观测者所持的标准钟与坐标钟的钟速之比

$\frac{d\tau}{dt}$, 用 c 和 v 表示。

(3) 假设有一个圆盘绕坐标原点相对惯性系以角速度 ω 旋转, 圆盘半径 R 满足 $\omega R < c$, 圆盘上的时空由非转动的正交惯性系的坐标 (t', r', θ', z') 描述, 满足坐标变换:

$$\begin{cases} x^0 = ct' \\ x^1 = r' \cos(\theta' + \omega t') \\ x^2 = r' \sin(\theta' + \omega t') \\ x^3 = z' \end{cases} \quad (5.5)$$

用 $dt', dr', d\theta', dz'$ 为四维坐标表示 ds^2 , 并写出 g_{ij} 的非零分量。在圆盘系中使用 (5.1) 式时, 其中的 $dx^0 = dt'$, $dx^1 = dr'$, $dx^2 = d\theta'$, $dx^3 = dz'$ 。

在以下小问中, 均使用爱因斯坦求和规则, 即重复的上下指标代表求和。但默认求和只对 1,2,3 下标进行, 即:

$$g_{0i}dx^i = g_{01}dx^1 + g_{02}dx^2 + g_{03}dx^3 \quad (5.6)$$

(4) 广义相对论中固有距离和标准时之间通过光速 c 联系如下:

如图 5 所示, A 与 B 是两个空间上相距无穷近的相对空间静止的点, 满足:

$$x_B^i - x_A^i = dx^i (i = 1, 2, 3) \quad (5.6)$$

一束光从 A 射向 B, 再从 B 反射回 A, 这个过程由 A 点标准钟测量耗时为 $\Delta\tau$, 则 AB 之间的纯空间距离满足:

$$dl = \frac{c\Delta\tau}{2} \quad (5.7)$$

已知对于光, 世界线方程为 $ds^2 = 0$ 。而纯空间距离可以写作 $dl^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j$, 求其中各系数 γ_{ij} , 用 g_{ij} 表示。

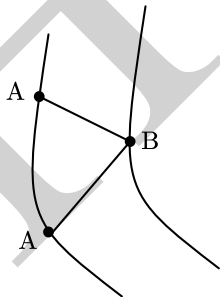


图5

(5) 利用狭义相对论的“尺缩”原理, 推导第 (3) 小问中旋转圆盘的固有周长。

(6) 利用第 (4) 小问中所给的公式, 推导第 (3) 小问中旋转圆盘的固有周长。

(7) 已知相对某一坐标系某一点的速度满足如下定义:

$$v = c \frac{dl}{\sqrt{-g_{00}}dx^0 - \frac{g_{0i}dx^i}{\sqrt{-g_{00}}}} \quad (5.8)$$

一个人以相对圆盘的速度 v 绕圆盘边缘 $r = R$ 转了一周, 此时 θ 会变化 2π 。分两种情况求从地面上静止的观测者看来这个人转一圈回到起点所用的时间。

(8) 直接用狭义相对论的速度变换讨论第 (7) 小问中的问题, 分两种情况求从地面上静止的观测者看来这个人转一圈所用的时间。

(9) 在第 (8) 小问中, 你所取的圆盘周长为何值? 为什么?

解：(1) 空间上不发生移动，即 $dx^i = 0 (i = 1, 2, 3)$

$$d\tau = i \frac{ds}{c} = \sqrt{-g_{00}} \frac{dx^0}{c} = \sqrt{-g_{00}} dt \quad (1)$$

得到

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{-g_{00}} \quad (2)$$

(2) 改写得到

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (3)$$

由已知得

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = v^2 dt^2 \quad (4)$$

代入得

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(3) 由题可得

$$dx^0 = c dt \quad (5)$$

$$dx^1 = \cos(\theta + \omega t) dr - \sin(\theta + \omega t) d\theta - \omega \sin(\theta + \omega t) dt \quad (6)$$

$$dx^2 = \sin(\theta + \omega t) dr + \cos(\theta + \omega t) d\theta + \omega \cos(\theta + \omega t) dt \quad (7)$$

$$dx^3 = dz \quad (8)$$

代入

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

得

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2} \right) dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 + 2\omega r^2 dt d\theta \quad (9)$$

即

$$\begin{aligned} g_{00} &= -c^2 \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2} \right) \\ g_{11} &= 1 \\ g_{22} &= r^2 \\ g_{33} &= 1 \\ g_{02} &= g_{20} = r^2 \omega \end{aligned} \quad (10)$$

(4) 由

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}dx^0dx^i + g_{ij}dx^i dx^j = 0 \quad (11)$$

得到光由A到B (已舍去不合理的解)

$$dx_1^0 = \frac{-g_{0i}dx^i + \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{ij}g_{00})dx^i dx^j}}{g_{00}} \quad (12)$$

用 $-dx^i$ 代替 dx^i 得由B到A

$$dx_2^0 = \frac{g_{0i}dx^i + \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{ij}g_{00})dx^i dx^j}}{g_{00}} \quad (13)$$

$$dl = \frac{c\Delta\tau}{2} = \frac{c\sqrt{-g_{00}}}{2} (dx_1^0 + dx_2^0) = \sqrt{\left(g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right) dx^i dx^j} \quad (14)$$

即

$$\gamma_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} \quad (15)$$

(5) 我们令盘上的观测者沿盘的边沿放一组尺, 首尾相接, 摆满一圈。在惯性观测者看来, 沿盘边切向放置的尺, 相对于自己的尺以 $v = \omega R$ 运动。运动方向沿着尺的方向。狭义相对论的知识告诉他, 盘上的尺将发生洛伦兹收缩, 他量得盘上尺的长度为

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{R^2 \omega^2}{c^2}} \quad (16)$$

它显然比静止于惯性系中的尺的长度要短。如果在惯性系中惯性观测者围绕盘的边沿也放一组尺, 用这组尺同时去测盘上各尺的长度, 他会发现盘上(沿盘边)放置的所有的尺都缩短了。然而, 当他用自己的尺去测量盘的周长时, 发现周长并未改变, 仍是 $2\pi R$ 。他看到盘上的观测者在用那组“缩短”了的尺测量然的长度, 结果当然是

$$C' = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - \frac{R^2 \omega^2}{c^2}}} \quad (17)$$

(6) $dr = dz = 0$

对 $r = R$ 积分得:

$$C' = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{22} - \frac{g_{02}g_{02}}{g_{00}}} d\theta = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - \frac{R^2 \omega^2}{c^2}}} \quad (18)$$

(7) 先考虑人逆时针转:

$$v = c \frac{\frac{Rd\theta}{\sqrt{1 - \frac{R^2 \omega^2}{c^2}}}}{c \sqrt{1 - \frac{R^2 \omega^2}{c^2}} dt - \frac{r^2 \omega d\theta}{c \sqrt{1 - \frac{R^2 \omega^2}{c^2}}}} \quad (19)$$

积分解得

$$T^+ = \frac{2\pi R \left(1 + \frac{R\omega v}{c^2}\right)}{v \left(1 - \frac{R^2 \omega^2}{c^2}\right)} \quad (20)$$

类似可得顺时针情况下

$$T^- = \frac{2\pi R \left(1 - \frac{R\omega v}{c^2}\right)}{v \left(1 - \frac{R^2 \omega^2}{c^2}\right)} \quad (21)$$

(8) 先考虑人逆时针转: 由速度变换得惯性系中人相对圆盘边缘速度

$$v_r = \frac{v + R\omega}{1 + \frac{R\omega v}{c^2}} - R\omega \quad (22)$$

得

$$T^+ = \frac{2\pi R}{v_r} = \frac{2\pi R \left(1 + \frac{R\omega v}{c^2}\right)}{v \left(1 - \frac{R^2 \omega^2}{c^2}\right)} \quad (23)$$

同理

$$v_r' = \frac{v - R\omega}{1 - \frac{R\omega v}{c^2}} + R\omega \quad (24)$$

$$T^- = \frac{2\pi R}{v_r'} = \frac{2\pi R \left(1 - \frac{R\omega v}{c^2}\right)}{v \left(1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2}\right)} \quad (25)$$

(9) 取 $2\pi R$, 因为惯性系时空中空间部分满足欧氏几何。

相对的, 圆盘转动系中 $\frac{\text{周长}}{\text{半径}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2}}}$ 是因为这个时空的空间部分不满足欧氏几何。

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 小问 4 分: (1) (2) 式各 2 分;

第 (2) 小问 4 分: (3) (4) 式各 2 分, 或答案正确给满分;

第 (3) 小问 10 分: (5) (6) (7) (8) 式各 1 分, (9) 式 4 分, (10) 式 2 分;

第 (4) 小问 14 分: (11) 式 2 分, (12) (13) (14) (15) 式各 3 分, (12) 取了错误的解但答案正确整道题给 8 分;

第 (5) 小问 4 分: 答案正确 2 分, 说明 2 分;

第 (6) 小问 3 分: (18) 式 3 分;

第 (7) 小问 9 分: (19) (20) (21) 式各 3 分;

第 (8) 小问 8 分: (22) (23) (24) (25) 式各 2 分;

第 (9) 小问 4 分: 写出惯性时空中空间部分满足欧氏几何给分, 否则不给分。