

第13届 CPHO-S 物理竞赛联考暨39th – CPhO模拟赛

理论试题参考答案及评分标准

考试时间：2022年10月15日 9:00—12:00

命题人：陈浩楠 任雨奇 罗民睿 马潇翔 孙烨皓

审题人：徐嘉珺 樊子颀 卞知彰 史宇飞 王明月

宋卓洋 王梓人 陆金浩 蔡一在 曹凌博 李瀚奕

考生必读

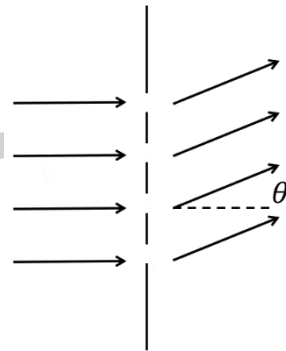
- 1、考生考试前请务必阅读本须知。
- 2、本试题共9页，答题卡共8页，总分320分。
- 3、如遇到试题印刷不清楚的情况，请务必向监考老师提出。
- 4、需要阅卷老师评阅的内容一定要写在答题纸相应题号后面的空白处；阅卷老师只评阅答题纸上的内容，写在试题纸和草稿纸上的内容一律不被评阅。

一、(64分)

凡是含有众多单元，且排列规则、取向有序的周期结构，统称为光栅。一维多缝光栅是一个最简单也是最早被制成的光栅，在光学领域起着重要的作用。

本题第(1)(2)小问请作答在答题卡第1页

(1) 如图1.1所示，在空间中有一透射式一维光栅。其透光部分的缝宽为 a ，相邻两条缝的中心距离为 d ，共有 $N(N \gg 1)$ 条缝。其挡光部分完全不透光。一束波长为 λ 的平行光垂直于光栅平面入射，其等相位面平行于光栅平面。在无穷远处有一光屏接收衍射光。



(1.1) 先考虑其中单条缝的衍射情况。对于一条宽为 a 的狭缝，已知经其衍射后，在衍射角 $\theta = 0$ 处衍射光的振幅为 U_0 ，在衍射角为任意 θ 处接收到衍射光的振幅为 $U(\theta)$ 。试计算 $|U(\theta)|$ ，用 U_0, λ, a 和 θ 表示。 图1.1

(1.2) 光栅衍射的结果可以看作多条单缝的衍射光彼此间干涉形成。对于题述光栅，已知在衍射角 $\theta = 0$ 处，它的衍射光强为 I_0 。试求任意 θ 处，该光栅的衍射光强 $I(\theta)$ ，结果用 $I_0, \lambda, a, d, N, \theta$ 表示。

(1.3) 根据计算结果，我们发现 $I(\theta)$ 随衍射角的分布会呈现出若干的主峰，在这些主峰处，衍射光强远大于其它衍射角处的光强。设 $\theta = 0$ 处的主峰为零级峰，从 $\theta = 0$ 开始沿 θ 增大方向第 m 个主峰为 $+m$ 级主峰，沿 θ 减小方向第 m 个主峰为 $-m$ 级主峰。计算 m 级主峰所对应的衍射角 θ_m （假设该光栅衍射光存在第 m 级主峰），结果用 λ 和 d 表示，并说明在何种情况下可能观察不到光栅衍射光的某些主峰。

(1.4) 设对于波长为 λ 的入射光，该光栅的 m 级主峰衍射角为 θ_m ；当入射光波长变为 $\lambda + \delta\lambda$ ($\delta\lambda \ll \lambda$) 时，该光栅衍射的 m 级主峰衍射角变为 $\theta_m + \delta\theta$ 。则该光栅在 m 级主峰处衍射的角色散本领定义为：

$$D_\theta = \frac{\delta\theta}{\delta\lambda} \quad (1.1)$$

D_θ 一定程度上反映了光栅的色散能力。用非单色光入射光栅，对于 D_θ 更大的光栅，一定波长差的光之间的 m 级主峰衍射角之差会更大，从而导致不同颜色的光会更分散。试计算对于该

透射式光栅，在 m 级主峰处，它的角色散本领 $D_{\theta m}$ ，结果用 m 、 d 和 θ_m 表示。

(2) 人们设计了一种反射式光栅。如图 1.2 所示为反射式闪耀光栅，其表面周期分布着具有一定倾角且互相平行的槽面。该槽面通常情况下为铝膜刻压而成，在很宽的光波段内具有极高的反射率。简单起见，我们认为它的反射率为 1。

已知该闪耀光栅相邻两槽的间距为 d ，共有 N ($N \gg 1$) 条相同的槽。每条槽的反射面宽度为 w 。该光栅在结构上有两个特征方向，一个是该光栅宏观平面的法线方向 \hat{N} ，另一个是每个单元槽面的表面法线方向 \hat{n} 。对于该闪耀光栅，二者之间的夹角为 θ_b 。如图所示，入射光和出射光的方向分别用与 \hat{N} 的夹角 θ 和 φ 表示。现以波长为 λ 的平行光入射到该光栅。

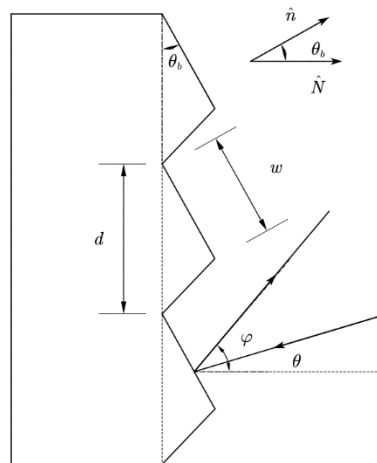


图 1.2

(2.1) 不考虑每一条槽面对其相邻槽面可能的挡光效果。设光强分布情况为 $I(\theta, \varphi)$ 。已知 $I(\theta_b, \theta_b) = I_0$ ，计算 $I(\theta, \varphi)$ ，结果用 $I_0, d, w, \theta_b, \lambda, N, \theta, \varphi$ 表示。

(2.2) 计算当光沿 \hat{n} 方向入射时，令 $\varphi = -\theta_b$ 处为零级主峰。计算第 m 级主峰所在方位角 φ_m ，结果用 θ_b, λ, d, m 表示。

(2.3) 接 (2.2)，计算 φ_m 处相应的角色散本领 $D_{\varphi m} = \frac{\delta \varphi}{\delta \lambda}$ ，结果用 θ_b, λ, d, m 表示。

(2.4) 试根据你已计算得到的相关结论，说明反射式闪耀光栅在进行分光时相比于第 (1) 问中传统透射式光栅的优势。

本题第 (3) 小问请作答在答题卡第 6 页

(3) 光栅的原理在物理学领域中有着广泛的应用。利用电子的史密斯—帕塞尔效应，可以产生激励产生远红外、微米波、太赫兹波段的电磁辐射。

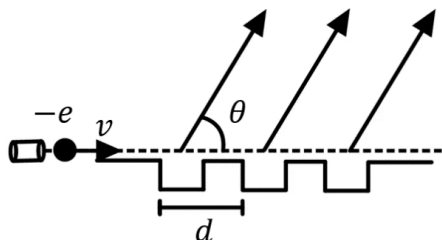


图 1.3

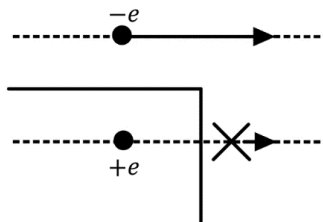


图 1.4

该电磁波产生装置的简化模型如图 1.3 所示。空间中有一金属光栅，其表面互相平行地等间距分布有 N 条刻线，刻线的间距为 d 。在该金属光栅的左侧有一电子发射器，可以发射高速运动电子，贴近着光栅表面运动。如图 1.4 所示，当电子在 A 点处非常靠近金属表面时，可以近似地将金属光栅视作无限大金属平面。根据电像法，金属光栅表面的感应电荷分布等效为对称位置的一个点电荷，该像电荷将跟随着电子运动。当电子运动至刻线处时，像电荷将无法继续前进，导致像电荷会做减速运动。根据电磁学理论，非匀速运动的点电荷会发射电磁波。因此电子每经过一条刻线，便会在此处激发一束电磁波。

已知电子发射器发射的电子束为相对论性电子，速度为 $v = \beta c$ 。忽略电子之间的相互作用。由于电子动量极大，因此像电荷对其作用可忽略不计，近似认为电子做匀速直线运动。因此同一电子在经过每一条刻线时的运动方式几乎相同，激发的电磁波初始相位也相

同。设激发的电磁波波长为 λ ，传播方向与电子运动方向夹角为 θ 。认为刻线很窄，电子在到达与离开某一条刻线时发出的电磁波为同一束电磁波。

(3.1) 计算同一电子在相邻两条刻线处所激起电磁波传到无穷远处时的相位差的绝对值 $|\Delta\varphi|$ ，用 $\lambda, d, \beta, \theta$ 及物理常数表示。

(3.2) 对于某一 θ 角方向，远处的探测器可以检测到一系列频率的电磁波，计算其频率的最小间隔 Δf ，结果用 θ, β, d 以及物理常数表示。

解：(1) (1.1) 以单缝中点处为原点，光栅平面内垂直于单缝方向为 x 轴方向建立坐标轴。则 x 处的光相对于原点处的光相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta \quad (1)$$

设原点处单位面积透光复振幅为 \tilde{c} ，接收到的振幅微元

$$dU = \tilde{c} e^{i\Delta\varphi} dx \quad (2)$$

衍射光总振幅

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\theta) &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tilde{c} e^{i\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta} dx \\ &= \tilde{c} \frac{e^{i\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} - e^{-i\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta}}{i \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta} \\ &= \tilde{c} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} \end{aligned} \quad (3)$$

根据题给条件 $U(\theta = 0) = U_0$ ，得到

$$|U(\theta)| = |U_0| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} \quad (4)$$

(1.2) 光栅的衍射可以看作多条缝之间的干涉。相邻两条缝之间衍射光的相位差为

$$\Delta\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \quad (5)$$

以第一条缝处为基准相位，衍射光总振幅

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\text{总}}(\theta) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{U}(\theta) e^{in\Delta\varphi_0} \\ &= \tilde{U}(\theta) \frac{1 - e^{iN\Delta\varphi_0}}{1 - e^{i\Delta\varphi_0}} \end{aligned} \quad (6)$$

总光强为

$$\begin{aligned} I(\theta) &= |\tilde{U}_{\text{总}}(\theta)|^2 \\ &= U_0^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} \right)^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} N d \sin \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta\right)} \right)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

根据题给条件 $I(\theta = 0) = I_0$ ，得到光强分布

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} \right)^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} N d \sin \theta\right)}{N \sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta\right)} \right)^2 \quad (8)$$

(1.3) 衍射主峰满足

$$\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}d \sin \theta\right) = 0 \quad (9)$$

得到 m 级主峰衍射角

$$\sin \theta_m = \frac{m\lambda}{d} \quad (10)$$

或写为

$$\theta_m = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{d}\right) \quad (10^*)$$

若主峰所在的角度恰好使得 (8) 式中单缝衍射因子取到 0, 则无法观察到主峰。此时满足

$$\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}a \sin \theta_m\right) = 0 \quad (11)$$

得到

$$\frac{a}{d} = \frac{p}{q} \quad (12)$$

其中 p 和 q 是互质的两个正整数。

(1.4) 当波长 λ 变化 $\delta\lambda$ 时, 对 (10) 式取微分得到

$$\cos \theta_m \delta\theta_m = \frac{m}{d} \delta\lambda \quad (13)$$

得到角色散本领

$$D_{\theta m} = \frac{\delta\theta_m}{\delta m} = \frac{m}{d \cos \theta_m} \quad (14)$$

(2) (3.1) 首先考虑单条刻线的衍射效果。与 (1.1) 同理, 在一条槽平面内垂直于刻线方向建立 x 轴, 选取槽的中部为原点。则 x 处的光反射后相对于原点处的相位差为

$$\Delta\varphi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} x [\sin(\theta_b - \theta) - \sin(\varphi - \theta_b)] \quad (15)$$

单条刻线的衍射强度分布

$$\begin{aligned} U(\theta) &= \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} c e^{i\Delta\varphi(x)} dx \\ &= c \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} w [\sin(\theta - \theta_b) + \sin(\varphi - \theta_b)]\right)}{\frac{\pi}{\lambda} w [\sin(\theta - \theta_b) + \sin(\varphi - \theta_b)]} \end{aligned} \quad (16)$$

由此得到了单条刻线的衍射强度分布因子。再考虑多条刻线之间的干涉效果。相邻两条刻线的衍射光相位差为

$$\Delta\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} d (\sin \theta + \sin \varphi) \quad (17)$$

衍射光总振幅

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\text{总}}(\theta) &= U(\theta) \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\Delta\varphi_0} \\ &= U(\theta) \frac{1 - e^{iN\Delta\varphi_0}}{1 - e^{i\Delta\varphi_0}} \\ &= U(\theta) e^{i\frac{N-1}{2}\Delta\varphi_0} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\Delta\varphi_0\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi_0\right)} \end{aligned} \quad (18)$$

此即为光栅衍射因子。根据所得到的两种因子，得到衍射光光强分布

$$I(\theta, \varphi) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} w [\sin(\theta - \theta_b) + \sin(\varphi - \theta_b)]\right)}{\frac{\pi}{\lambda} w [\sin(\theta - \theta_b) + \sin(\varphi - \theta_b)]} \right)^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} N d (\sin \theta + \sin \varphi)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d (\sin \theta + \sin \varphi)\right)} \right)^2 \times \left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta_b\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} N d \sin \theta_b\right)} \right)^2 \quad (19)$$

(2.2) 光线沿着 \hat{n} 方向入射时，有

$$\theta = \theta_b \quad (20)$$

此时光强分布为

$$I(\varphi) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} w \sin(\varphi - \theta_b)\right)}{\frac{\pi}{\lambda} w \sin(\varphi - \theta_b)} \right)^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} N d (\sin \theta_b + \sin \varphi)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d (\sin \theta_b + \sin \varphi)\right)} \right)^2 \quad (21)$$

衍射主峰要求满足条件

$$\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} d (\sin \theta_b + \sin \varphi)\right) = 0 \quad (22)$$

因此第 m 级主峰满足

$$\sin \varphi_m = \frac{m\lambda}{d} - \sin \theta_b \quad (23)$$

或表示为

$$\varphi_m = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{d} - \sin \theta_b\right) \quad (23^*)$$

(2.3) 对 (21) 式取微分得到

$$\cos \varphi_m \delta \varphi_m = \frac{m}{d} \delta \lambda \quad (24)$$

得到角色散本领

$$D_{\varphi m} = \frac{\delta \varphi_m}{\delta \lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi_m} \quad (25)$$

根据 (21) 式，有

$$\cos \varphi_m = \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{d} - \sin \theta_b\right)^2} \quad (26)$$

得到用 θ_b 、 λ 、 d 和 m 表示的角色散本领

$$D_{\varphi m} = \frac{m}{\sqrt{d^2 - (m\lambda - d \sin \theta_b)^2}} \quad (27)$$

(2.4) 根据 (21) 式可知，能量较为集中的单缝衍射零级方向与闪耀光栅的零级主峰方向并不重合，这使得单缝衍射零级方向存在色散；而传统光栅在能量较为集中的单缝零级衍射方向不发生色散。因此闪耀光栅的能量利用效率更高。

(3) (3.1) 电子从一条刻线运动至另一条刻线需要时间为

$$\Delta t = \frac{d}{\beta c} \quad (28)$$

激起电磁波的圆频率

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad (29)$$

相邻两条刻线激起电磁波的相位差为

$$\begin{aligned} |\Delta\varphi| &= \left| \omega\Delta t - \frac{2\pi}{\lambda} d \cos\theta \right| \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} d \left(\frac{1}{\beta} - \cos\theta \right) \end{aligned} \quad (30)$$

(3.2) 由于光栅刻线 N 远大于 1, 因此在 θ 角处远处的探测器探测到的电磁波频率满足干涉极大条件, 即

$$\Delta\varphi = 2m\pi \quad (31)$$

其中 $m = 0, 1, 2, \dots$, 得到观测到的电磁波波长

$$\lambda = \frac{d}{m} \left(\frac{1}{\beta} - \cos\theta \right) \quad (32)$$

观测到电磁波频率

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{mc}{d \left(\frac{1}{\beta} - \cos\theta \right)} \quad (33)$$

可见观测到的电磁波频率等间隔分布, 最小间隔为

$$\Delta f = \frac{c}{d \left(\frac{1}{\beta} - \cos\theta \right)} \quad (34)$$

评分标准: 本题满分 64 分。

第 (1.1) 问 7 分: (1) (3) 式 2 分, (4) 式 3 分;

第 (1.2) 问 7 分: (5) (6) 式 2 分, (8) 式 3 分;

第 (1.3) 问 6 分: (9) 式 2 分, (10) 或 (10*) 式 2 分, 说明缺级 2 分;

第 (1.4) 问 4 分: (13) (14) 式 2 分;

第 (2.1) 问 12 分: (15) (17) (18) 式 2 分 (16) (19) 式 3 分;

第 (2.2) 问 6 分: (21) (22) 式 2 分, (23) 或 (23*) 2 分;

第 (2.3) 问 6 分: (25) (26) (27) 式 2 分;

第 (2.4) 问 4 分: 说明闪耀光栅单缝衍射零级存在色散从而能量利用效率更高 4 分;

第 (3.1) 问 6 分: (28) (29) (30) 式 2 分;

第 (3.2) 问 6 分: (32) (33) (34) 式 2 分。

二、(64 分)

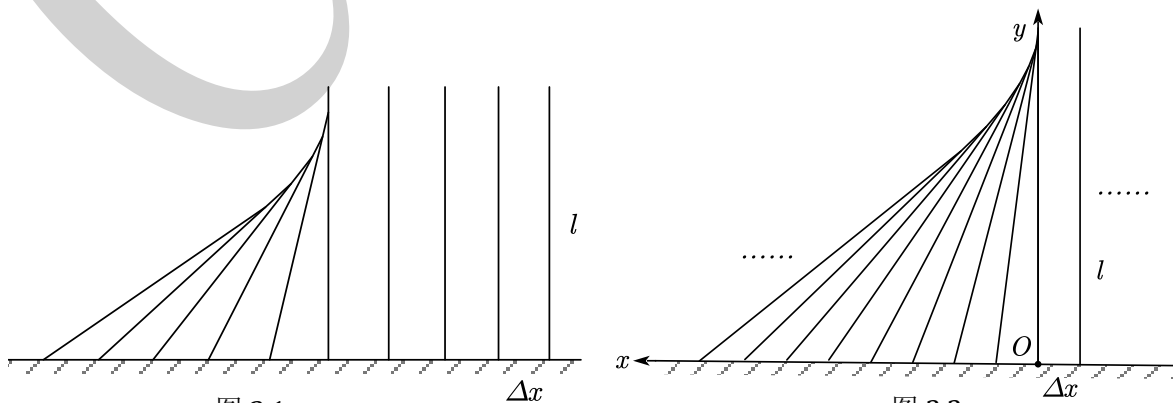


图 2.1

图 2.2

多米诺骨牌是生活中常见的一种玩具。它通常是木制、骨制或塑料制的长方体骨牌，按照一定的间距排列成行。若轻轻推倒第一枚骨牌，其余的骨牌将会触发一系列连锁反应，依次地倒下。

为了简单起见，将多米诺骨牌视为长度为 l ，厚度忽略不计的匀质长方形板。每张多米诺骨牌的质量为 m 。如图 2.1 所示，将无限多的多米诺骨牌等间距地竖立在地面上，牌间距为 $\Delta x (\Delta x \ll l)$ 。将多米诺骨牌之间的碰撞视为完全非弹性碰撞。骨牌之间接触光滑。地面足够粗糙，使得牌与地面之间始终无相对滑动。

现给第一张骨牌一个微小扰动，骨牌便开始逐个碰撞、倒下。

本题第 (1) (2.1) (2.2) 小问请作答在答题卡第 2 页

(1) 经过一段时间后，骨牌的位形将会如图 2.2 所示。由于 $\Delta x \ll l$ ，可以发现骨牌的顶端连成的曲线是近似光滑的。经历足够长时间后，骨牌整体宏观的推进速度将会趋于一个定值 v_∞ ，骨牌顶端连成的曲线保持形状不变地向右方传递。

选取一个向右以速度 v_∞ 匀速运动的惯性参考系，将其称为“波前系”。在该参考系下，骨牌顶端所连成的曲线保持静止。在波前系下，以左侧第一张竖直状态的骨牌底端所在位置为原点，建立平面直角坐标系，如图 2.2 所示。

(1.1) 考虑底端横坐标为 $x (x > 0)$ 的牌，求出其与水平面的夹角 θ 。

(1.2) Δx 较小，因此牌顶端可以近似连成一条曲线。设这条曲线上每一点在图示坐标系下的横纵坐标分别为 X 和 Y ，求出牌顶端所连成曲线的方程，用 X 关于 Y 的函数 $X(Y)$ 的形式表示。

(1.3) 在波前系中，虽然骨牌顶端连成的曲线形状保持不变且保持静止，但每张骨牌都时刻在运动。试计算波前系下，底端横坐标为 x 的骨牌的角速度大小，用地面系下骨牌推进速度 v ， x 和 l 表示。

(1.4) 试计算地面系中牌堆的总动能 E_k ，用地面系下骨牌推进速度 v 和 $m, l, \Delta x$ 表示。

(2) 在第 (1) 问中我们考虑了骨牌整体的运动现象，现在仔细考虑单张骨牌碰撞前后的过程。考虑处于倒塌状态的最前方骨牌，设其在碰撞下一张骨牌前瞬间，其顶端 x 方向的速度分量为 v' ；碰撞后瞬间其顶端 x 方向的速度分量为 $v (v < v')$ 。重力加速度为 g 。

(2.1) 计算 $\Delta v = v' - v$ ，结果用 $g, l, \Delta x, v$ 表示，保留至最低阶近似。

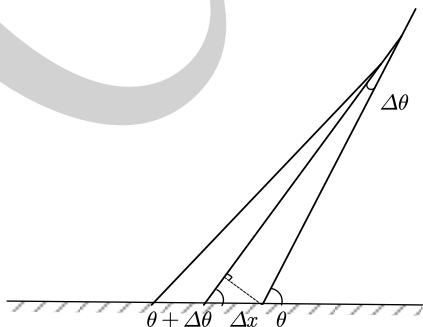
(2.2) 考虑底端横坐标为 x 的骨牌，设其顶端在碰撞时受到的冲量为 $I(x)$ 。对某一块骨牌进行分析，设其碰撞前后的角速度变化量为 $\Delta\omega$ ，试建立 $I(x)$ 满足的微分方程。

本题第 (2.3) (2.4) 小问请作答在答题卡第 6 页

(2.3) 将 $\Delta\omega$ 用 $g, l, \Delta x, v, x$ 表示，并结合边界条件解出 $I(x)$ 。

(2.4) 由于 $\Delta v \ll v$ ，可近似认为 $v_\infty \approx v \approx v'$ 。试根据前面各小问的结论，计算 v_∞ ，保留至最低阶近似，结果中仅允许出现 $g, l, \Delta x$ 。

解：(1) (1.1)



如图，由几何关系有：

$$l\Delta\theta = -\Delta x \cdot \sin\theta \quad (1)$$

由于 $\Delta x \ll l$, 可用微分表示:

$$l d\theta = -\sin\theta \cdot dx$$

有:

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = -\frac{dx}{l} \quad (2)$$

积分有:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin\theta} = \int_0^x -\frac{dx}{l}$$

$$\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) - 0 = -\frac{x}{l}$$

即:

$$\tan\frac{\theta}{2} = e^{-\frac{x}{l}}$$

$$\cos\theta = \frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}} = \tanh\frac{x}{l}$$

故:

$$\theta = 2 \arctan\left(e^{-\frac{x}{l}}\right) = \arccos\left(\tanh\frac{x}{l}\right) \quad (3)$$

(1.2) 对顶端坐标 (X, Y) :

$$X = x - l \cos\theta \quad (4)$$

$$Y = l \sin\theta \quad (5)$$

从而有:

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{Y}{l}\right)^2} \quad (6)$$

又:

$$\cos\theta = \tanh\frac{x}{l}$$

$$x = l \cdot \operatorname{artanh}(\cos\theta)$$

可得:

$$X = l \cdot \operatorname{artanh}\left(\sqrt{1 - \left(\frac{Y}{l}\right)^2}\right) - \sqrt{l^2 - Y^2} \quad (7)$$

此即曲线方程。

(1.3) 由 (1.1) 中有:

$$\theta = \arccos\left(\tanh\frac{x}{l}\right)$$

对 x 求导有:

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2\frac{x}{l}}} \cdot \frac{1}{l \cosh^2\frac{x}{l}}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{l \cosh \frac{x}{l}} \quad (8)$$

在波前系中，牌的位形是不变的。
对于某一块骨牌，在波前系中有：

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (9)$$

从而：

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{v}{l \cosh \frac{x}{l}}$$

角速度大小为：

$$\omega(x) = \left| \frac{d\theta}{dt} \right| = \frac{v}{l \cosh \frac{x}{l}} \quad (10)$$

(1.4) 牌绕其底端的转动惯量为：

$$J = \frac{1}{3} ml^2 \quad (11)$$

底端位于 x 处的牌动能为：

$$E_{k,x} = \frac{1}{2} J \omega(x)^2 = \frac{1}{6} m \frac{v^2}{\cosh^2 \frac{x}{l}} \quad (12)$$

总动能为：

$$E_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6} m \frac{v^2}{\cosh^2 \frac{n\Delta x}{l}}$$

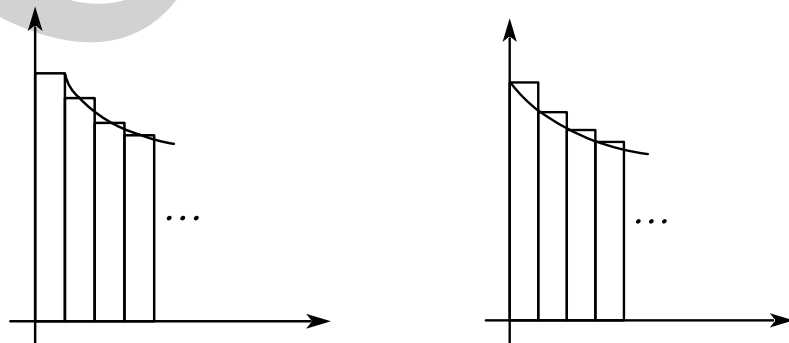
由于 $\Delta x \ll l$ ，化求和为积分有：

$$E_k = \frac{1}{6} mv^2 + \int_{\Delta x}^{\infty} \frac{1}{6} m \frac{v^2}{\cosh^2 \frac{x - \Delta x/2}{l}} \frac{dx}{\Delta x} \quad (13)$$

积分得：

$$E_k = \frac{1}{6} mv^2 \left(\frac{l}{\Delta x} + \frac{1}{2} \right) \quad (14)$$

考虑到化求和为积分过程中的误差，如下图，若用 $E_k = \int_0^{\infty} \frac{1}{6} m \frac{v^2}{\cosh^2 \frac{x}{l}} \frac{dx}{\Delta x}$ 则会有 mv^2 量级的



误差，而 (13) 式可以保证误差在 $mv^2 \frac{\Delta x}{l}$ 量级。

(2) (2.1)

从碰后瞬间到下一次碰前瞬间，势能改变量：

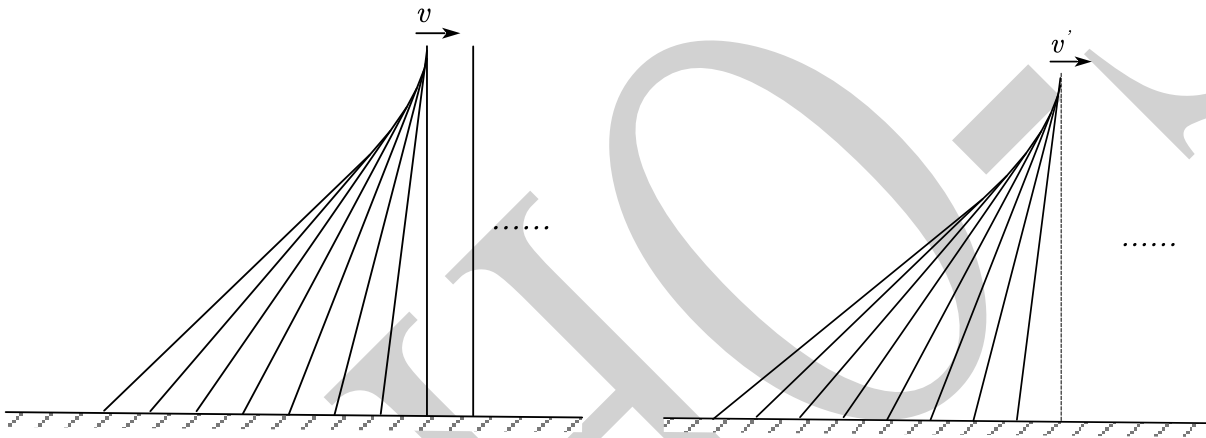
$$\Delta E_p = -mg \frac{l}{2} \quad (15)$$

碰后瞬间，总动能为：

$$E_{k1} = \frac{1}{6}mv^2 \left(\frac{l}{\Delta x} + \frac{1}{2} \right)$$

碰前瞬间，可假想有一块竖直的牌和其它牌一起运动，推进速度（波前速度）为 v^* 。

故，总动能为：



$$E_{k2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6}m \frac{v^{*2}}{\cosh^2 \frac{n\Delta x}{l}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6}m \frac{v^{*2}}{\cosh^2 \frac{n\Delta x}{l}} - \frac{1}{6}mv^{*2} = \frac{1}{6}mv^{*2} \left(\frac{l}{\Delta x} - \frac{1}{2} \right) \quad (16)$$

其中：

$$\frac{v^*}{v'} = \frac{l}{\sqrt{l^2 - \Delta x^2}}$$

忽略高阶小量，有：

$$v^* \approx v' \quad (17)$$

即：

$$E_{k2} = \frac{1}{6}mv'^2 \left(\frac{l}{\Delta x} - \frac{1}{2} \right) \quad (18)$$

能量守恒：

$$E_{k1} = E_{k2} + \Delta E_p \quad (19)$$

解得：

$$v' = \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{2l}\right)v^2 + 3g\Delta x}{1 - \frac{\Delta x}{2l}}} \quad (20)$$

故：

$$\Delta v = v' - v \approx \frac{v^2 + 3gl}{2vl} \Delta x \quad (21)$$

(2.2) 由角动量定理:

$$J\Delta\omega = -I(x)l\cos[\theta(x + \Delta x) - \theta(x) + I(x + \Delta x)(l + \Delta l)] \quad (22)$$

其中:

$$J = \frac{1}{3}ml^2$$

$$\Delta l = -\cos\theta \cdot \Delta x = -\tanh\frac{x}{l} \cdot \Delta x \quad (23)$$

$$I(x + \Delta x) = I(x) + \Delta I(x)$$

可得:

$$\Delta I(x) - \tanh\frac{x}{l} \cdot \frac{\Delta x}{l} I(x) = \frac{1}{3}ml\Delta\omega \quad (24)$$

化差分为微分有:

$$dI(x) - \tanh\frac{x}{l} \cdot \frac{dx}{l} I(x) = \frac{1}{3}ml\Delta\omega \frac{dx}{\Delta x}$$

即:

$$\frac{dI(x)}{dx} - \frac{\tanh\frac{x}{l}}{l} I(x) = \frac{1}{3}ml \frac{\Delta\omega}{\Delta x} \quad (25)$$

此即 $I(x)$ 满足的微分方程。

(2.3)

$$\Delta\omega = \frac{\partial\omega}{\partial v}(v - v') = -\frac{\partial\omega}{\partial v}\Delta v \quad (26)$$

其中:

$$\omega(x) = \frac{v}{l \cosh\frac{x}{l}}$$

$$\Delta v \approx \frac{v^2 + 3gl}{2vl} \Delta x$$

代入到微分方程中有:

$$\frac{dI(x)}{dx} - \frac{\tanh\frac{x}{l}}{l} I(x) = -m \frac{v^2 + 3gl}{6vl} \frac{1}{\cosh\frac{x}{l}} \quad (27)$$

这是一阶线性非齐次微分方程, 其通解为:

$$I(x) = \left[\int -m \frac{v^2 + 3gl}{6vl} \frac{1}{\cosh\frac{x}{l}} e^{\int -\tanh\frac{x}{l} dx} dx + C \right] e^{\int \tanh\frac{x}{l} dx}$$

可得:

$$I(x) = -m \frac{v^2 + 3gl}{6v} \sinh\frac{x}{l} + C \cosh\frac{x}{l} \quad (28)$$

$x \rightarrow \infty$ 时,

$$I(x) = 0$$

有:

$$C = m \frac{v^2 + 3gl}{6v}$$

故:

$$I(x) = m \frac{v^2 + 3gl}{6v} e^{-\frac{x}{l}} \quad (29)$$

(2.4) 对最前方($x = 0$)的牌, 由角动量定理:

$$I(0)l = J \frac{v}{l} \quad (30)$$

即:

$$m \frac{v^2 + 3gl}{6v} l = \frac{1}{3} mlv$$

解得:

$$v = \sqrt{3gl}$$

即:

$$v_{\infty} = \sqrt{3gl} \quad (31)$$

可以发现, v_{∞} 与 Δx 无关。

评分标准: 本题满分 64 分。

第 (1.1) 问 6 分: (1) (2) (3) 式各 2 分;

第 (1.2) 问 4 分: (4) (5) (6) (7) 式各 1 分;

第 (1.3) 问 6 分: (9) (8) (10) 式各 2 分;

第 (1.4) 问 8 分: (11) (12) (13) (14) 式各 2 分;

第 (2.1) 问 14 分, (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) 式各 2 分;

第 (2.2) 问 10 分: (22) (23) (24) 式各 2 分; (25) 式各 4 分;

第 (2.3) 问 10 分: (27) (26) (28) 式各 2 分, (29) 式各 4 分;

第 (2.4) 问 6 分: (30) 式 2 分, (31) 式 4 分。

三、(64 分)

玻尔模型假设氢原子中电子绕原子核做圆周运动, 成功解释了氢原子光谱的实验分布规律。在此之后, 物理学家们尝试在此基础上进行修正。1915 年, 德国科学家索末菲成功地计算出了相对论与椭圆轨道的情形, 提出了索末菲模型。

本题第 (1) (2) (3) 小问请作答在答题卡第 3 页

(1) 考虑静止质量为 m 的电子绕一个电量为 Ze 的静止的原子核做匀速圆周转动。根据玻尔的量子化理论, 电子的角动量 $L = n_1 \hbar$, 其中 n_1 是任意正整数。同时考虑因相对论带来的质量膨胀效应, 用含有 n_1 的表达式写出电子的能级公式。为简化表达, 可以在结果中引入精细结构常数:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \quad (3.1)$$

(2) 然而, 圆周运动是一个过于平凡的情形, 电子的运动可能是进动的椭圆轨道。记电子到原子核的最大和最小距离分别为 r_{\min} 和 r_{\max} 。定义进动椭圆轨道的等效半长轴及半短轴

$$a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}, b = \sqrt{r_{\min} r_{\max}} \quad (3.2)$$

继续考虑因相对论导致的质量膨胀, 已知电子的能量 (不包括电子静能) 为 E , 角动量为 L 。计算电子轨道的等效半长轴 a 和等效半短轴 b 。

(3) 事实上, 在考虑椭圆轨道后, 玻尔量子化模型就无法适用了, 于是索末菲提出了另一个量子化条件, 即在角动量量子化的前提下, 引入第二个量子数, 即径向量子数 n_2 , 并令

$$\int p_r dr = n_2 h \quad (3.3)$$

其中积分是沿着椭圆轨道一周的积分， p_r 是电子的径向动量。请你同时考虑上一问的椭圆轨道和索末菲的量子化条件，用两个量子数 n_1, n_2 重新表达电子能级公式、椭圆的等效半长轴和等效半短轴。

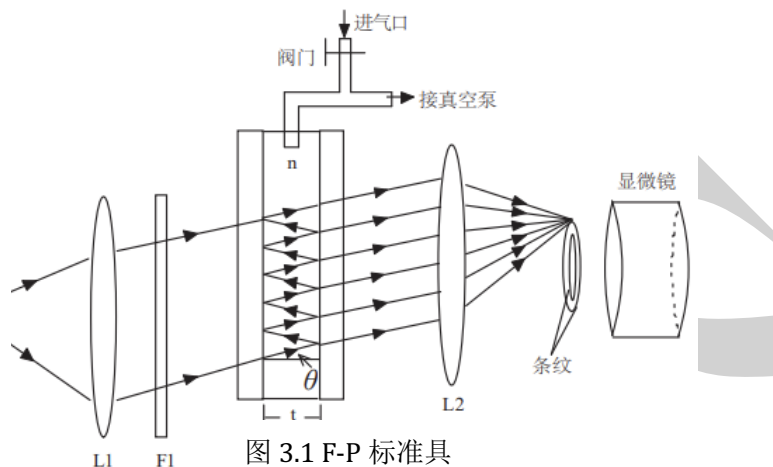


图 3.1 F-P 标准具

本题第 (4) 小问请作答在答题卡第 7 页

(4) 显然，验证原子结构的一个重要手段是观察原子光谱。如图所示描绘了一个用来观察原子光谱的 F-P 干涉仪，其中的核心部件是 F-P 标准具，这个装置包含两个高反射率内表面的玻璃板，忽略玻璃板对光的损耗。这两个间距为 t 的玻璃板构成一个干涉腔，光在其中会被不断反射。干涉腔内部的空气折射率 n 可以通过阀门调节。钠光灯发出的光线经过透镜 L_1 折射后变成平行光，然后经过标准具。已知钠光波长为 λ ，玻璃板内表面反射率为 R 。

(4.1) 角度 θ 定义如图 3.1 所示，即光线在干涉腔内部的反射角，请求出 F-P 标准具的光强透过率 T 随 θ 变化关系。

(4.2) 我们现在使用氢原子作为光源，通过恰当调试显微镜的视场，使得视场中可以观察到一系列亮圆环。现尝试用该装置验证第 (3) 问中计算所得的模型。若该模型成立，我们将观测到圆环的精细结构，即光屏上的圆环会发生微小的分裂。已知该装置两玻璃板间距 $t = 1 \mu\text{m}$ ，透镜焦距 $f = 0.1 \text{ m}$ ，玻璃板之间抽成真空。考虑 $n_1 + n_2 = 2$ 的两条氢原子谱线干涉形成的半径最小的圆环，试估算若要能够清晰分辨出二者的区别，该装置对于圆环半径 D 的测量精度的数量级应达到多少。

你可能用到的数学公式：

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin^2 x dx}{(1 + r \cos x)^2} = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - 1 \right), (0 < r < 1)$$

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{x} dx = \frac{\pi}{2} (a+b-2\sqrt{ab}), (0 < a < b)$$

解：(1) 设电子轨道半径为 r ，根据动量定理：

$$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1)$$

根据角动量量子化条件

$$L = n_1 \hbar \quad (2)$$

角动量守恒

$$\frac{mvr}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = L \quad (3)$$

解得

$$v = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 n_1 \hbar} \quad (4)$$

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 n_1^2 \hbar^2}{mZe^2} \sqrt{1 - \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 n_1 \hbar c} \right)^2} \quad (5)$$

得到电子能级

$$\begin{aligned} E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= mc^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}} - mc^2 \end{aligned} \quad (6)$$

(2) 设电子与原子核的连线方向和电子速度方向的夹角为 β ，考虑角动量守恒

$$L = \frac{mvr \sin \beta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7)$$

能量守恒

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (8)$$

联立 (7) (8) 两式消去 v 得到 $\sin \beta$ 随 r 变化关系

$$\sin \beta = \frac{Lc}{r \sqrt{\left(mc^2 + E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^2 - m^2 c^4}} \quad (9)$$

当电子与原子核的距离达到极值时，有

$$\sin \beta = 1 \quad (10)$$

得到一个关于 r 的一元二次方程，根据求根公式解得此时的 r ，分别对应 r 的最大值与最小值

$$r_{\max, \min} = \frac{(mc^2 + E) \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \pm \sqrt{\left[(mc^2 + E) \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right]^2 - \left[(mc^2 + E) \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right] \left[\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 - L^2 c^2 \right]}}{(mc^2)^2 - (mc^2 + E)^2} \quad (11)$$

得到等效半长轴和等效半短轴

$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{mc^2 + E}{(mc^2)^2 - (mc^2 + E)^2} \cdot \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (12)$$

$$b = \sqrt{r_{\max} r_{\min}} = \frac{\sqrt{\left[(mc^2 + E) \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right] \left[\left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 - L^2 c^2\right]}}{(mc^2)^2 - (mc^2 + E)^2} \quad (13)$$

(3) 解法一：设 r 处电子的径向动量为 p_r ，角向动量为 p_θ 。对电子列径向动量定理

$$\frac{dp_r}{dt} - p_\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (14)$$

引入参量 $u = r^{-1}$ ，代入得到

$$\frac{-L^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}}{\gamma m} = \frac{u^3 L^2}{\gamma m} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} u^2 \quad (15)$$

其中 $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 。(15) 式与 (8) 式联立，并利用 $u = r^{-1}$ ，消去速度 v 得到

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \left[1 - \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 Lc}\right)^2\right] u + \frac{Ze^2(mc^2 + E)}{4\pi\epsilon_0 L^2 c^2} \quad (16)$$

该微分方程为简谐振动方程，由此解得椭圆轨道方程

$$\frac{1}{r} = k + A \cos \omega \theta \quad (17)$$

其中

$$\omega = \sqrt{1 - \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 Lc}\right)^2} \quad (18)$$

式子两侧对 θ 求导得到

$$\frac{dr}{d\theta} = r^2 \omega A \sin \omega \theta \quad (19)$$

根据径向动量量子化条件，有

$$\begin{aligned} \int p_r dr &= \int m \frac{dr}{dt} dt \\ &= \int \frac{L}{r^2 \frac{d\theta}{dt}} \cdot \frac{dr}{dt} dt \\ &= \int \frac{L}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 d\theta \\ &= \int \frac{LA^2 \sin^2 \omega \theta d\theta}{(k + A \cos \omega \theta)^2} \end{aligned} \quad (20)$$

令 $r = \frac{A}{k}$ ，根据椭圆轨道性质可知 $r < 1$ 。利用题给第一个积分公式可得

$$\begin{aligned} n_2 h &= \frac{L}{\omega} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin^2 x dx}{(1 + r \cos x)^2} \\ &= \frac{L}{\omega} \cdot 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} - 1\right) \end{aligned} \quad (21)$$

利用

$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{1}{k - A} + \frac{1}{k + A} \quad (22)$$

$$b = \sqrt{r_{\max} r_{\min}} = \sqrt{\frac{1}{k^2 - A^2}} \quad (23)$$

代入 (21) 并利用角动量量子化条件得到

$$\frac{a}{b} = \frac{n_1}{n_2 \omega} \quad (24)$$

利用 (2) 中解得的 a, b 可以解得能级

$$E = \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{\left(n_2 + \sqrt{n_1^2 - \alpha^2 Z^2}\right)^2}}} - 1 \right] mc^2 \quad (25)$$

解法二：设 r 处电子的径向动量为 p_r ，角向动量为 p_θ 。根据能量守恒，有

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (p_r^2 + p_\theta^2)c^2} - mc^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (26)$$

角动量守恒

$$L = p_\theta r \quad (27)$$

联立解得 p_r 随 r 的变化关系

$$p_r(r) = \frac{\sqrt{\left(E + mc^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)^2 - (mc^2)^2 - \frac{L^2 c^2}{r^2}}}{c} \quad (28)$$

根据径向量子化条件，有

$$n_2 h = 2 \int_a^b p_r(r) dr \quad (29)$$

利用题给第二个积分公式，得到

$$n_2 h = \pi(a + b - 2\sqrt{ab}) \quad (30)$$

(17) 与 (2) 式联立，并利用精细结构常数简化表达，解得能级

$$E = \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{\left(n_2 + \sqrt{n_1^2 - \alpha^2 Z^2}\right)^2}}} - 1 \right] mc^2 \quad (31)$$

(4) (4.1) 设对于玻璃板内表面，从空气入射到玻璃内的光振幅透射率为 t ，振幅反射率为 r ；从玻璃内入射到空气中的光振幅透射率为 t' 。则有

$$R = r^2 \quad (32)$$

根据斯托克斯倒逆关系有

$$tt' = 1 - r^2 \quad (33)$$

相邻两束出射光到达光屏时的相位差为

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2nt \cos \theta \quad (34)$$

设入射光振幅为 U_0 ，第 i 束出射光的复振幅为

$$U_i = tt' U_0 (r^2 e^{i\delta})^{i-1} \quad (35)$$

标准具透射光的总复振幅为

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^{\infty} U_i \\ &= tt' U_0 \frac{1}{1 - r^2 e^{i\delta}} \end{aligned} \quad (36)$$

光强透射率 T 为

$$\begin{aligned} T &= \frac{|U|^2}{|U_0|^2} \\ &= \frac{t^2 t'^2}{1 + r^4 - 2r^2 \cos \delta} \end{aligned} \quad (37)$$

利用 (32) (33) 式，得到

$$T = \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \delta} \quad (38)$$

或写为

$$T = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt{R}}{1 - R} \right)^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad (39)$$

(4.2) 亮环满足条件

$$\delta = 2m\pi (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (40)$$

得到

$$\cos \theta = \frac{m\lambda}{2nt} \quad (41)$$

对于标准具中为真空的情形，有

$$\cos \theta = \frac{m\lambda}{2t} \quad (42)$$

根据 (3) 中模型，可以计算得出氢原子光谱的理论波长。氢原子发光只能跃迁到基态。根据能量守恒方程：

$$\frac{hc}{\lambda} = -\Delta E \quad (43)$$

对于 $n_1 = 1, n_2 = 1$ ，有

$$\lambda_{11} = 121.5007906 \text{ nm} \quad (44)$$

对于 $n_1 = 2, n_2 = 0$ ，有

$$\lambda_{20} = 121.5002514 \text{ nm} \quad (45)$$

根据几何关系

$$\cos \theta = \frac{2f}{\sqrt{4f^2 + D^2}} \quad (46)$$

对于最小的圆环，应取

$$m = 16 \quad (47)$$

得到最小的圆环半径

$$D_{11} = 0.048344m \quad (48)$$

$$D_{20} = 0.048348m \quad (49)$$

由此可得应使得测量精度达到 $10^{-6}m$

评分标准：本题满分 64 分。

第 (1) 问 10 分：(1) (3) (4) (5) (6) 式 2 分；

第 (2) 问 14 分：(7) (8) (9) (12) (13) 式 2 分，(11) 式 4 分；

第 (3) 问 18 分：

解法一：(15) (17) (22) (23) 式 1 分，(14) (16) (18) 式 2 分，(21) (25) 式 4 分；

解法二：(26) (27) 式 3 分，(28) (30) (31) 式 4 分；

第 (4.1) 问 11 分：(32) 式 1 分，(33) (34) (35) (37) 式 2 分，(38) 或 (39) 式 2 分；

第 (4.2) 问 11 分：(43) (44) (45) (46) (47) (48) (49) 式 1 分，(42) 式 2 分，精度数量级正确 2 分。

四、(64 分)

在一次实验中，甲组同学得到了一个球形部分实心装填了某种材料的特制球形干燥管，管壁外部包裹有不透明的绝热材料。该组同学计划设计实验测定该种材料的导热系数，并据此推断材料的种类。

实验计划将两个完全相同电加热器的棒状探头分别探入球形干燥管的两端，并与管壁紧密接触，如图 4.1 所示。调节两个电加热器的功率，测得探头温度分别为 $T_1, T_2 (T_1 > T_2)$ 时，输出功率为 P 。本题只考虑遵循傅里叶传导定律的热传导，并假设实验装置外壁绝热性能良好，连接处导热性能良好。经过简单的测量，得到球形部分的半径为 r_0 ，探头的有效半径为 $r_0 \delta (\delta \ll 1)$ 。

本题第 (1) (2) (3) 小问请作答在答题卡第 4 页

(1) 作为估算，认为等温面是无数个与探头连线垂直的圆。试以此为基础，推导球形材料导热系数 κ 的理论公式，用题给参量表示。

(2) 显然，第 (1) 问的近似是很粗糙的。考虑到球内的热流分布未知，等温面形状未知，不能简单地采取分割切片微分串联的做法，必须严格求解球内的温度分布。

为尽量回避巨量的数学运算，本问希望通过与静电学产生类比，而将所求转化到大家更为熟悉的领域求解。

(2.1) 我们将温度 T 看作位矢 \vec{r} 的函数， $T(\vec{r})$ ，这样就得到了一个全空间分布的标量场，称作温度场。与电流密度类似，定义能流密度矢量 \vec{j} ，意义为单位面积上的导热功率。试写出达到稳态时所讨论的球形材料内部温度场 $T(\vec{r})$ 所满足的不含时微分方程，并给出该温度场分布的边界条件。

(2.2) 将上述方程与各向同性均匀介质中的静电场稳恒电流基本方程作比较，尝试通过变量代换的方法使两组方程在数学上同构，并给出具体的代换形式。

(2.3) 经过上述处理，我们将温度场与静电场联系了起来。原则上讲，求解球内的温度分布，等效于对这个同构的静电系统进行物理上的求解。试简要文字描述该同构的静电系统场源与介质的空间分布情况。

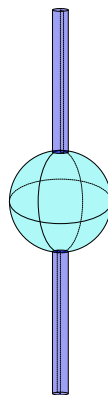


图 4.1

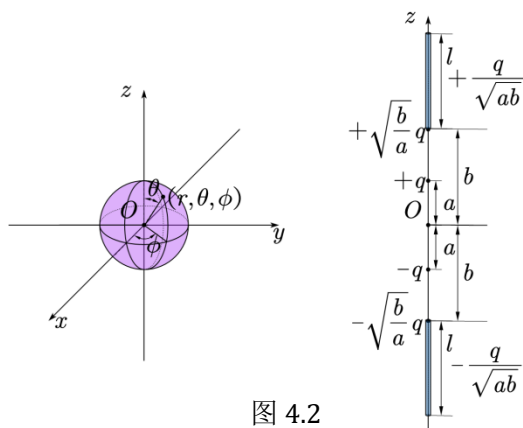


图 4.2

(3) 本问及后续所有计算均在球坐标系下进行, 即用 (r, θ, ϕ) 表示坐标位置, 其中 r 为该点到原点的位置, θ 为该点和原点连线与 z 轴的夹角, ϕ 为该点与原点连线在 $X-Y$ 平面投影与 x 轴正方向的夹角。

在求解本问题前, 不妨先考虑一个静电学体系。

如图 4.2 所示, 真空中分布有两对点电荷和两段线电荷。一对点电荷中的一个位于 z 轴正半轴上, 与原点距离为 a , 带 $+q$, 另一个带 $-q$, 与前述点电荷关于原点对称; 另一对点电荷中的一个也位于 z 轴正半轴上, 与原点距离为 b (有关系 $b > a$), 带 $+\sqrt{\frac{b}{a}}q$, 另一个与之关于原点对称, 带 $-\sqrt{\frac{b}{a}}q$ 。两段线电荷长度均为 l , 线电荷密度分别为 $\pm \frac{q}{\sqrt{ab}}$, 带正电者同样位于 z 轴正半轴上, 两个顶点与原点距离分别为 b 和 $b+l$, 带负电者与其关于原点对称。

(3.1) 以无穷远处电势为零, 试求空间中的电势分布 $\varphi_{e1} = \varphi_{e1}(r, \theta, \phi)$, 并考察 $l \rightarrow +\infty$ 时的情况。

在后续的计算中, 始终令 $l \rightarrow +\infty$ 。

(3.2) 承上问, 计算电场强度的径向分量 $E_{r1} = E_{r1}(r, \theta, \phi)$ 。特别地, 考察 $r = \sqrt{ab}$ 时, E_{r1} 有何性质。

本题第 (4) 小问请作答在答题卡第 7 页

(4) 再考虑一个半径为 r_0 的球形电阻, 材料的电阻率为 ρ 。令在 z 轴正半轴上距原点 r_1 ($r_1 < r_0$) 处注入电流 I_0 , 与其关于原点对称处流出 I_0 , 考察稳态的电流分布。

(4.1) 写出球内电场强度在球面上满足的边界条件。

(4.2) 给出球内电势分布 $\varphi_{e2} = \varphi_{e2}(r, \theta, \phi)$ 。

提示: 由静电场唯一性定理, 给定解域内各区的自由电荷分布和介电常量后, 若标定电势在边界上的法向导数 (即负的电场强度矢量法向分量), 解域内的静电场解若存在则唯一。

(4.3) 令 $r_1 \rightarrow r_0^-$, 给出球内电势分布 $\varphi_e = \varphi_e(r, \theta, \phi)$ 。

(4.4) 实际上, $r_1 = r_0$ 时原 (4.1) 的边界条件以及 (4.2) 的计算方法不再适用。为确认电势分布的合理性, 请检验电阻内部通过 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 截面的电流是否为 I_0 。

本题第 (5) 小问请作答在答题卡第 8 页

(5) 通过前述讨论, 我们得到了同构静电系统的电场精确解, 可以继续解决热学问题了。

(5.1) 试给出球面上的温度分布 $T|_{r=r_0}$ 。为方便后续计算, 请将反双曲函数化为对数形式。

(5.2) 利用已知量, 试给出材料导热系数 κ 的理论表达式。请取适当的近似, 将结果表示成较为简明的形式。该结果相比于第 (1) 问结果应更为精确, 近似也更为合理。

(5.3) 某次测得 $\delta = 0.1, r_0 = 5 \text{ cm}, P = 1 \text{ W}, T_1 = 323 \text{ K}, T_2 = 298 \text{ K}$, 试计算该种材料的导热系数 κ 具体数值, 并根据题末的表格推断该种材料的种类。

提示：上一问中近似后得到的公式能够保证这一问中 κ 的系统误差（近似带来的误差）与真值之比在千分之二之内。

你可能会用到以下公式：

$$\frac{d \sinh^{-1} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \sinh^{-1} x + C$$

$$\sinh^{-1} x = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$$

材料名称	导热系数 ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)	材料名称	导热系数 ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
石蜡	0.12	纯硅胶	0.35
玻璃钢	0.4	钢	36~54
泡沫	0.045	HDPE	0.5
LTCC	2	橡胶	0.19~0.26

解：(1)

$$\kappa = \frac{P}{T_1 - T_2} \int_{\delta}^{\pi-\delta} \frac{r_0 \sin \theta d\theta}{\pi(r_0 \sin \theta)^2} = \frac{2P}{\pi r_0 (T_1 - T_2)} \ln \cot \frac{\delta}{2} \left(\approx \frac{2P}{\pi r_0 (T_1 - T_2)} \ln \frac{2}{\delta} \right) \quad (1)$$

(2)

(2.1) 基本方程

$$\begin{cases} \nabla^2 T = 0 \\ -\nabla T = \kappa \vec{j} \end{cases} \quad (2)$$

边界条件：

$$T(r_0, \theta, \phi) = \begin{cases} T_1, \theta \in (0, \delta) \\ T_2, \theta \in (\pi - \delta, \pi) \end{cases} \quad (3)$$

$$\vec{j} \cdot \vec{n} = 0, \theta \in (\delta, \pi - \delta) \quad (4)$$

$$\oint_0^{\delta} \vec{j} \cdot d\vec{s} = \oint_{\pi-\delta}^{\pi} \vec{j} \cdot d\vec{s} = P; \quad (5)$$

(2.2)

$$T \leftrightarrow \varphi, \kappa \vec{j} \leftrightarrow \vec{E}, \kappa P \leftrightarrow \rho I \quad (6)$$

(2.3) 真空中有各向同性的线性导电介质均匀分布在半径为 r_0 的球形区域内，输出为 I 电流源的正负极对称分布在球两端张角为 δ 的范围内，电接触良好。

(3) (3.1) 先计算 z 轴正半轴上线电荷在空间中产生的电势 φ_{e11} 。

位于 z 至 $z + dz$ 处线电荷元在 (r, θ, ϕ) 处激发的电势为

$$d\varphi_{e11} = \frac{q dz}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{ab} \sqrt{z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta}} \quad (7.1)$$

配方处理，积分

$$\varphi_{e11} = \int_b^{b+l} \frac{qdz}{4\pi\epsilon_0\sqrt{ab}\sqrt{(z-r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}} \quad (7.2)$$

利用题给公式，得到

$$\varphi_{e11} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{ab}} \cdot \left(\sinh^{-1} \frac{b+l-r\cos\theta}{r\sin\theta} - \sinh^{-1} \frac{b-r\cos\theta}{r\sin\theta} \right) \quad (8)$$

替 q 为 $-q$ ， θ 为 $-\theta$ ，得到 z 轴负半轴上线电荷在空间中产生的电势

$$\varphi_{e12} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{ab}} \cdot \left(\sinh^{-1} \frac{b+l+r\cos\theta}{r\sin\theta} - \sinh^{-1} \frac{b+r\cos\theta}{r\sin\theta} \right) \quad (9)$$

再线性叠加上四个点电荷的电势，处理得到

$$\begin{aligned} \varphi_{e1} = & \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{ab}} \cdot \left(\sinh^{-1} \frac{b+l-r\cos\theta}{r\sin\theta} - \sinh^{-1} \frac{b-r\cos\theta}{r\sin\theta} - \sinh^{-1} \frac{b+l+r\cos\theta}{r\sin\theta} \right. \\ & \left. + \sinh^{-1} \frac{b+r\cos\theta}{r\sin\theta} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2+2ar\cos\theta}} \right) \\ & + \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+b^2-2br\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+b^2+2br\cos\theta}} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

[或

$$\begin{aligned} \varphi_{e1} = & \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{ab}} \cdot \left(\ln \frac{\sqrt{(b+l-r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} + b+l-r\cos\theta}{\sqrt{(b+l+r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} + b+l+r\cos\theta} \right. \\ & \left. + \ln \frac{\sqrt{(b+r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} + b+r\cos\theta}{\sqrt{(b-r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} + b-r\cos\theta} \right) \\ & + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2+2ar\cos\theta}} \right) \\ & + \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+b^2-2br\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+b^2+2br\cos\theta}} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

]

由于

$$\begin{aligned} & \sinh^{-1} \frac{b+l-r\cos\theta}{r\sin\theta} - \sinh^{-1} \frac{b+l+r\cos\theta}{r\sin\theta} \\ & = \ln \frac{\sqrt{(b+l-r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} + b+l-r\cos\theta}{\sqrt{(b+l+r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} + b+l+r\cos\theta} \end{aligned}$$

上式在 $l \rightarrow +\infty$ 时趋于 $\ln 1 = 0$ ，回代得到

$$\begin{aligned} \varphi_{e1} = & \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{ab}} \cdot \left(\sinh^{-1} \frac{b+r\cos\theta}{r\sin\theta} - \sinh^{-1} \frac{b-r\cos\theta}{r\sin\theta} \right) \\ & + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2+2ar\cos\theta}} \right) \\ & + \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2+b^2-2br\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+b^2+2br\cos\theta}} \right) \end{aligned}$$

(12)

[或

$$\begin{aligned} \varphi_{e1} = & \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{(b+r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} + b + r\cos\theta}{\sqrt{(b-r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} + b - r\cos\theta} \\ & + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta}} \right) \\ & + \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 + 2br\cos\theta}} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

]

(3.2) 由

$$E_{r1} = -\frac{\partial\varphi_{e1}}{\partial r} \quad (14)$$

结合题目提示

$$\frac{\partial \sinh^{-1} \frac{b \pm r \cos \theta}{r \sin \theta}}{\partial r} = -\frac{b}{r \cdot \sqrt{(b \pm r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}}$$

整理得到

$$\begin{aligned} E_{r1} = & -\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2br\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 + 2br\cos\theta}} \right) \\ & + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r - a\cos\theta}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r + a\cos\theta}{(r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & + \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r - b\cos\theta}{(r^2 + b^2 - 2br\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r + b\cos\theta}{(r^2 + b^2 + 2br\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

代入 $r = \sqrt{ab}$, 计算得到

$$E_{r1}|_{r=\sqrt{ab}} = 0 \quad (16)$$

(4) (4.1) 球形电阻不会漏电, 因此球面上电流密度矢量没有法向分量。

得到电场强度的边界条件为

$$E_{r2}|_{r=r_0} = 0 \quad (17)$$

(4.2) (9) 式与 (3.2) 中静电体系在 $r = \sqrt{ab}$ 球面上满足的边界条件相同。

试图在两者之间建立联系。令

$$\sqrt{ab} = r_0 \quad (18)$$

由静电场唯一性定理, 只要使解域内 ($0 \leq r < r_0$) 自由电荷分布相同, 球形电阻内电势分布则可以立即得到。

显然球形电阻内部仅在注入、流出电流两处有电荷积累。在球内分别做各自包含两点的高斯面, 运用静电场高斯定理, 得到

$$\oiint_{S_{\pm}} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \pm \frac{q}{\epsilon_0} \quad (19)$$

欧姆定律微分形式

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho} \quad (20)$$

结合

$$\oiint_{S_{\pm}} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} = \pm I_0 \quad (21)$$

得到

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \rho I_0 \quad (22)$$

则将 (3.2) 中 φ_{e1} 表达式内 $\frac{q}{\epsilon_0}$ 替为 ρI_0 , b 替为 $\frac{r_0^2}{r_1}$, a 替换为 r_1 , 就能得到球内的电势分布 (已令球心处为电势零点)

$$\begin{aligned} \varphi_{e2} = & \frac{\rho I_0}{4\pi r_0} \cdot \left(\sinh^{-1} \frac{r_0^2 + rr_1 \cos \theta}{rr_1 \sin \theta} - \sinh^{-1} \frac{r_0^2 - rr_1 \cos \theta}{rr_1 \sin \theta} \right) \\ & + \frac{\rho I_0}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2r_1 r \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 + 2r_1 r \cos \theta}} \right) \\ & + \frac{\rho I_0 r_0}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r_1^2 r^2 + r_1^4 - 2rr_1 r_0^2 \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{r_1^2 r^2 + r_1^4 + 2rr_1 r_0^2 \cos \theta}} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

(4.3) 令 $r_1 \rightarrow r_0^-$, 得到

$$\begin{aligned} \varphi_e = & \frac{\rho I_0}{4\pi r_0} \cdot \left(\sinh^{-1} \frac{r_0 + r \cos \theta}{r \sin \theta} - \sinh^{-1} \frac{r_0 - r \cos \theta}{r \sin \theta} \right) \\ & + \frac{\rho I_0}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos \theta}} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

亦可以写作

$$\begin{aligned} \varphi_e = & \frac{\rho I_0}{4\pi r_0} \cdot \ln \frac{\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos \theta} + r_0 + r \cos \theta}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta} + r_0 - r \cos \theta} \\ & + \frac{\rho I_0}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos \theta}} \right) \end{aligned}$$

(4.4) 由

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho} \quad (25)$$

与

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} \quad (26)$$

得到

$$I = \frac{1}{\rho} \int_0^{r_0} E_{\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \cdot 2\pi r dr \quad (27)$$

而

$$E_{\theta} = -\frac{\partial \varphi_e}{r \partial \theta} \quad (28)$$

代入 φ_e , 得到

$$E_{\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho I_0}{2\pi r_0 \sqrt{r^2 + r_0^2}} + \frac{\rho I_0}{\pi(r^2 + r_0^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (29)$$

积分得到

$$I = I_0 \int_0^{r_0} \frac{r}{r_0 \sqrt{r^2 + r_0^2}} dr + I_0 \int_0^{r_0} \frac{2r}{(r^2 + r_0^2)^{\frac{3}{2}}} dr = (\sqrt{2} - 1)I_0 + (2 - \sqrt{2})I_0 = I_0 \quad (30)$$

检验成功。

(5)

(5.1) 球面上的电势

$$\varphi_e|_{r=r_0} = \frac{\rho I_0}{4\pi r_0} \cdot \left(\ln \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) \quad (31)$$

由 (2.2),

$$T|_{r=r_0} = \frac{\kappa P}{4\pi r_0} \cdot \left(\ln \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) \quad (32)$$

(5.2) 取 $\theta = \delta, \pi - \delta$ 两处计算电势差。近似后:

$$T_1 - T_2 = \frac{\kappa P}{2\pi r_0} \cdot \left(\frac{2}{\delta} + \ln \frac{4}{\delta} - 1 \right) \quad (33)$$

得

$$\kappa = \frac{2\pi r_0 (T_1 - T_2)}{P \cdot \left(\frac{2}{\delta} + \ln \frac{4}{\delta} - 1 \right)} \quad (34)$$

(5.3) 不难直接给出结果

$$\kappa = \frac{2\pi r_0 (T_1 - T_2)}{P \cdot \left(\frac{2}{\delta} + \ln \frac{4}{\delta} - 1 \right)} = 0.346 W/m \cdot K \quad (35)$$

材料为纯硅胶。

评分标准: 本题满分 64 分。

第 (1) 问 2 分: (1) 式 2 分

第 (2) 问 11 分:

第 (2.1) 小问 6 分: (2) (5) 式各 2 分, (3) (4) 式各 1 分;

第 (2.2) 小问 3 分: (6) 式 3 分;

第 (2.3) 小问 2 分: 关于静电系统的描述 2 分

第 (3) 问 18 分:

第 (3.1) 小问 14 分: (7) 式 4 分, (8) (9) 各 2 分, (10) (12) 各 3 分;

第 (3.2) 小问 4 分: (14) (16) 式各 1 分, (15) 式 2 分;

第 (4) 问 23 分:

第 (4.1) 小问 1 分: (17) 式 1 分;

第 (4.2) 小问 9 分: (18) ~ (22) 式各 1 分, (23) 式 2 分, 唯一性定理表述 2 分;

第 (4.3) 小问 4 分: (24) 式 4 分;

第 (4.4) 小问 9 分: (25) (26) (27) (28) 式各 1 分, (29) (30) 式各 2 分, 结论 1 分;

第 (5) 问 10 分:

第 (5.1) 问 3 分: (31) 式 2 分, (32) 式 1 分;

第 (5.2) 问 4 分: (33) (34) 式各 2 分;

第 (5.3) 问 3 分: (35) 式 2 分, 结论 1 分;

五、(64 分)

光在介质中的传播速度会变慢, 变慢程度受介质折射率的大小影响。而根据电动力学理论, 介质的折射率与其电磁性质直接相关。本题尝试探讨介质的电磁学性质影响光在其中传播速度的机制。

本题第 (1) (2) (3) 小问请作答在答题卡第 5 页

(1) 对于线偏振光, 考虑平面电磁波入射至两种介质分界面的情形。已知对于平面电磁波, 其磁场强度 \vec{H} 与电场强度 \vec{E} 之间满足大小关系

$$|\vec{E}| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} |\vec{H}| \quad (5.1)$$

其中 μ 和 ϵ 分别为介质的磁导率与介电常数。 \vec{H} 的方向平行于 $\vec{k} \times \vec{E}$, 其中 \vec{k} 为电磁波的波矢, 沿电磁波传播方向。在两种介质分界面处, \vec{H} 满足平行于分界面磁场强度分量连续的边界条件。

在介质中, 对于光而言, 介质的折射率 n 与介质的相对介电常数 ϵ_r 以及相对磁导率 μ_r 之间满足关系

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (5.2)$$

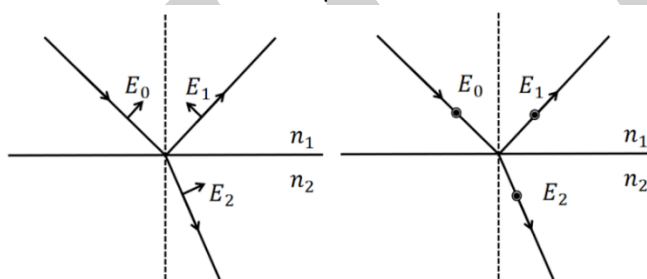


图 5.1

图 5.2

如图 5.1, 5.2 所示, 一束平面电磁波在两种介质的无限大平面界面处发生反射与折射, 入射角为 θ 。设入射电磁波的电场强度大小为 E_0 , 反射电磁波的电场强度大小为 E_1 , 折射电磁波的电场强度大小为 E_2 , 正方向如图中所标注 (图 5.2 中为垂直纸面向外为正)。已知入射侧介质的折射率为 n_1 , 出射侧介质的折射率为 n_2 , 介质的相对磁导率 $\mu_r \approx 1$ 。

(1.1) 考虑电场强度方向平行于入射面情形, 试利用 E_0, θ, n_1, n_2 表示出 E_1 和 E_2 。

(1.2) 考虑电场强度方向垂直于入射面情形, 试利用 E_0, θ, n_1, n_2 表示出 E_1 和 E_2 。

(2) 磁场满足高斯定理——在空间中任作一闭合高斯曲面, 其磁通量之和为零。因此, 对于边界重合的两块非闭合曲面, 其磁通量大小相等。由此可知, 磁通量仅与曲面的边界线有关。我们构造一个矢量 \vec{A} , 使其满足

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (5.3)$$

其中左式为 \vec{A} 沿曲面边界线的路径积分, 右式为该曲面的磁通量, 正方向的选取满足右手螺旋法则。我们将 \vec{A} 称为磁矢势。

(2.1) 在真空中建立一柱坐标系, 在坐标原点处存在一电流微元 $I d\vec{l}$, 电流方向沿 z 轴正方向。计算 (ρ, φ, z) 处的磁感应强度 $d\vec{B}$ 。

(2.2) 接 (2.1), 该空间中磁矢势 \vec{A} 只有 z 方向分量, 且 z 轴上的磁矢势分布为

$$\vec{A}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi z} \quad (5.4)$$

据此计算全空间中的磁矢势分布 $\vec{A}(\rho, \varphi, z)$ 。

(2.3) 根据电动力学理论, 我们可以利用下式给出体积为 dV 、电流密度为 \vec{j} 的电流微元对距离其 r 处产生的磁矢势微元

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{j}}{4\pi r} dV \quad (5.5)$$

据此验证你在 (2.2) 中得出的结果。

(3) 根据电动力学理论, 空间中某一处的电场强度 \vec{E} 为

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5.6)$$

其中 V 和 \vec{A} 为该处的电势与磁矢势。

在真空中有一巨大的薄导体板, 可近似认为其无限大, 其厚度为 h 。该空间中电势 V 处处为零。在整块导体板上施加随时间变化的均匀电流密度 $\vec{j} = J(t)\hat{e}_y$, \hat{e}_y 是平行于导体板的方向, 电流密度始终保持在整块板上均匀分布。已知 $t < 0$ 时电流密度大小始终为零。试证明, 空间中 t 时刻在距导体板 x ($h \ll x$) 处的电场强度大小为

$$\vec{E} = -\frac{1}{2}\mu_0 hc \vec{j} \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (5.7)$$

其中 c 为真空中光速。注意电磁作用的传播速度为光速而非无穷大, 因此电流密度发生变化时, 空间中各处的磁矢势需要一定的时间之后才会发生改变。

提示: 对于关于 x 和 y 的函数 f , 如果它可以写为关于 $x + y$ 整体的函数形式 $f(x + y)$, 则其偏导数存在关系:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (5.8)$$

本题第 (4) (5) 小问请作答在答题卡第 8 页

(4) 考虑一束平面电磁波平行于分界面法线方向从真空射入介质中的情形。以入射点为原点, 分界面法线方向为 x 轴建立空间直角坐标系。介质位于 $x > 0$ 区域。入射光电场强度分布用复数表示为 $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \hat{e}_y$, 其中 k 为真空中波矢大小, ω 为角频率。介质折射率为 n , 相对磁导率 $\mu_r \approx 1$ 。

(4.1) 写出反射光、透射光的电场强度 $\vec{E}_R(x, t)$ 和 $\vec{E}_T(x, t)$ 。

(4.2) 介质的极化率为 χ_e 。当 $\chi_e \ll 1$ 时, 试对 $\vec{E}_R(x, t)$ 和 $\vec{E}_T(x, t)$ 进行泰勒展开, 保留至首两阶非零项, 结果中不允许出现 n 。

(5) 接 (4), 此问中尝试用反复极化的观点去看待 (4) 中的过程。已知在介质中激发极化电场与电流仍会存在能量损耗, 该损耗极小但不为零, 使得在考虑有限远处的电场时可以忽略它, 但考虑无穷远处时不可忽略。

(5.1) 介质整体呈电中性, 无自由电荷。因此介质中可能存在的电流由极化电荷所产生。介质中的零级电场为入射光的电场强度。写出零级电场在介质中产生的电流分布 $\vec{j}_0(x, t)$ 。(结果中不允许出现 n)

(5.2) 根据零级电流分布, 结合第 (3) 问中所得结论, 试求 $x = s$ ($s < 0$) 处零级电流激发的电场强度 $\vec{E}_1(s, t)$ ($s < 0$)。令 $\vec{E}_1(s, t)$ 为一级电场强度, 将计算结果与 (4.2) 问中结果作比较。

(5.3) 同理, 计算 $x = s$ ($s > 0$) 处的一级电场强度 $\vec{E}_1(s, t)$ ($s > 0$) 并将计算结果与 (4.2) 问中结果作比较, 并尝试解释为何介质中的光速会变慢。

解: (1) (1.1) 入射角为 θ , 设反射角为 θ_1 , 折射角为 θ_2 。根据折射定律和反射定律有

$$\theta = \theta_1 \quad (1)$$

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta_2 \quad (2)$$

对于该介质, 折射率 n 与相对介电常数 ϵ_r 满足关系

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (3)$$

对于电场强度方向平行于入射面的电磁波，在分界面处满足以下边界条件：

切向电场强度连续

$$E_0 \cos \theta - E_1 \cos \theta_1 = E_2 \cos \theta_2 \quad (4)$$

法向电位移矢量连续

$$\epsilon_0 \epsilon_{r1} E_0 \sin \theta + \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_1 \sin \theta_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_2 \sin \theta_2 \quad (5)$$

亦即

$$n_1^2 E_0 \sin \theta + n_1^2 E_1 \sin \theta_1 = n_2^2 E_2 \sin \theta_2 \quad (5^*)$$

联立解得

$$E_1 = \frac{n_2 \cos \theta - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta_2} E_0 \quad (6)$$

$$E_2 = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta_2} E_0 \quad (7)$$

其中

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta\right) \quad (8)$$

或将结果写为

$$E_1 = \frac{n_2 \cos \theta - \frac{n_1}{n_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}}{n_2 \cos \theta + \frac{n_1}{n_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}} E_0 \quad (6^*)$$

$$E_2 = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_2 \cos \theta + \frac{n_1}{n_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}} E_0 \quad (7^*)$$

(1.2) 根据题给信息，在该介质中电磁波的磁场强度 H 与电场强度 E 满足关系

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E = \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\mu_r}} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E \approx \sqrt{\epsilon_r} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E = n \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E \quad (9)$$

在介质分界面满足以下边界关系：

切向电场强度连续

$$E_0 + E_1 = E_2 \quad (10)$$

切向磁场强度连续

$$H_0 \cos \theta - H_1 \cos \theta_1 = H_2 \cos \theta_2 \quad (11)$$

亦即

$$n_1 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0 \cos \theta - n_1 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_1 \cos \theta_1 = n_2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_2 \cos \theta_2 \quad (11^*)$$

联立解得

$$E_1 = \frac{n_1 \cos \theta - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta_2} E_0 \quad (12)$$

$$E_2 = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + n_2 \cos \theta_2} E_0 \quad (13)$$

其中

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta\right) \quad (8)$$

或将结果写为

$$E_1 = \frac{n_1 \cos \theta - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}}{n_1 \cos \theta + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}} E_0 \quad (12 *)$$

$$E_2 = \frac{2n_1 \cos \theta}{n_1 \cos \theta + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}} E_0 \quad (13 *)$$

(2) (2.1) (ρ, φ, z) 所在位置相对于原点的位置矢量设为 \vec{r} 。根据毕奥-萨伐尔定律, 原点处的电流元在该处产生的磁感应强度为

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \quad (14)$$

计算得到

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \rho I dl}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\varphi} \quad (15)$$

(2.2) 由于 \vec{A} 只有 z 方向分量, 选取 $0 \sim \rho, z \sim z + dz$ 的矩形, 根据题干 (2) 式, 有

$$A(0, \varphi, z) dz - A(\rho, \varphi, z) dz = dz \int_0^\rho \frac{\mu_0 \rho I dl}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho \quad (16)$$

由此得到磁矢势在空间中的分布

$$\vec{A}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad (17)$$

(2.3) 对于 (2.2) 中情形,

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (18)$$

因此

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad (19)$$

(3) 由于电磁作用以光速传播, 考虑图中所示的半径为 r 的环状微元。该环上各处到所考虑的场点距离相等, 传播所需时间相同。 t 时刻所考虑场点处的电场受环状微元处 $t - \sqrt{x^2 + r^2}/c$ 时刻的电流密度影响。由于空间中处处电势相等, 因此 t 时刻, 环状微元对场点产生的电场强度微元为

$$d\vec{E}(t) = -\frac{\partial}{\partial t} d\vec{A} \left(t - \frac{\sqrt{r^2 + x^2}}{c} \right) \quad (20)$$

根据 (2.3) 所给信息, 有

$$d\vec{A} \left(t - \frac{\sqrt{x^2 + r^2}}{c} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{j} \left(t - \frac{\sqrt{x^2 + r^2}}{c} \right) \cdot 2\pi r h dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} \quad (21)$$

因此

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int d\vec{E} \\ &= - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \vec{j} \left(t - \frac{\sqrt{x^2 + r^2}}{c} \right) \cdot \frac{\mu_0 h r dr}{2\sqrt{x^2 + r^2}} \end{aligned} \quad (22)$$

令 $u = \sqrt{x^2 + r^2}$, 则

$$du = \frac{rdr}{\sqrt{x^2 + r^2}} \quad (23)$$

因此

$$\vec{E}(t) = -\frac{\mu_0 h}{2} \int_x^\infty \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}\left(t - \frac{u}{c}\right) du \quad (24)$$

又因为

$$\frac{\partial \vec{j}\left(t - \frac{u}{c}\right)}{\partial t} = -c \frac{\partial \vec{j}\left(t - \frac{u}{c}\right)}{\partial u} \quad (25)$$

故

$$\begin{aligned} \vec{E}(t) &= \frac{\mu_0 ch}{2} \int_{r=0}^{r=+\infty} \frac{\partial \vec{j}\left(t - \frac{u}{c}\right)}{\partial u} du \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 ch \left[\vec{j}\left(t - \frac{u}{c}\right) \Big|_{u=+\infty} - \vec{j}\left(t - \frac{u}{c}\right) \Big|_{u=x} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \mu_0 ch \vec{j}\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{aligned} \quad (26)$$

(4) (4.1) 入射角 $\theta = 0$, 根据 (1) 中结论, 可知此时的透射率 t 和反射率 r 分别为

$$t = \frac{2}{1+n} \quad (27)$$

$$r = \frac{1-n}{1+n} \quad (28)$$

在介质中传播的电磁波波矢大小为

$$k' = nk \quad (29)$$

得到透射光和反射光的电场强度

$$\vec{E}_T(x, t) = \frac{2}{1+n} E_0 \hat{e}_y e^{i(\omega t - nkx)} \quad (30)$$

$$\vec{E}_R(x, t) = \frac{1-n}{1+n} E_0 \hat{e}_y e^{i(\omega t + kx)} \quad (31)$$

(4.2) 介质中折射率与介质极化率之间满足关系

$$n = \sqrt{1 + \chi_e} \quad (32)$$

以 χ_e 为小量, 泰勒展开保留首两阶得到

$$\vec{E}_T(x, t) = \left[1 - \frac{1}{4} (1 + 2ikx) \chi_e \right] \vec{E}(x, t) \quad (33)$$

$$\vec{E}_R(x, t) = \left[-\frac{1}{4} \chi_e + \frac{1}{8} \chi_e^2 \right] \vec{E}(x, t) \quad (34)$$

(5) (5.1) 介质中极化强度矢量 \vec{P} 与电场强度 \vec{E} 之间满足关系

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (35)$$

变化的极化强度矢量会产生电流密度 \vec{j}

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = i\omega \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (36)$$

(5.2) 零级电流密度 $\vec{j}(t, x)$ 分布仅仅是 x 与 t 的函数, 任意时刻在 $x_0 \sim x_0 + dx_0$ 的范围内电流密度矢量均匀分布。利用 (3) 中所得到的结论, 该范围内的电流密度在 $x = s$ 处产生的电场强度矢量微元为

$$d\vec{E} = -\frac{1}{2} \mu_0 c dx_0 \vec{j}\left(t - \frac{x_0 - s}{c}, x_0\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\mu_0 c d x_0 \cdot i\omega\chi_e \varepsilon_0 E_0 e^{i\omega\left(t-\frac{x_0-s}{c}\right)-ikx_0} \widehat{e}_y \quad (37)$$

总电场强度为

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{i}{2}\mu_0 c \omega \chi_e \varepsilon_0 E_0 \int_0^{+\infty} e^{i\omega\left(t+\frac{s}{c}\right)-ikx_0-i\omega\frac{x_0}{c}} dx_0 \widehat{e}_y \\ &= \frac{\mu_0 c^2 \chi_e \varepsilon_0 E_0}{4} e^{i\omega\left(t+\frac{s}{c}\right)-ikx_0-i\omega\frac{x_0}{c}} \Big|_0^{+\infty} \widehat{e}_y \\ &= -\frac{1}{4}\chi_e E_0 e^{i\omega t+iks} \widehat{e}_y \end{aligned} \quad (38)$$

可以发现与 (34) 第一项相同。

(5.3) 同理, 有

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{2}\mu_0 c \omega \chi_e \varepsilon_0 E_0 \left[\int_0^s e^{i\omega\left(t-\frac{s-x_0}{c}-ikx_0\right)} dx_0 + \int_s^{+\infty} e^{i\omega\left(t-\frac{x_0-s}{c}-ikx\right)} dx_0 \right] \\ &= \frac{1}{4}\chi_e (1-2iks) E_0 e^{i(\omega t-ks)} \widehat{e}_y \end{aligned} \quad (39)$$

可以发现与 (33) 第二项相同。

由此可见光在介质中传播速度会变慢的原因是, 电磁波产生的电场会在介质中反复极化和干涉, 最终得到的电场强度分布等效为传播速度为 $\frac{c}{n}$ 的电磁波的电场强度分布。

评分标准: 本题满分 64 分。

第 (1.1) 问 7 分: (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) 式 1 分;

第 (1.2) 问 5 分: (9) (10) (11) (12) (13) 式 1 分;

第 (2.1) 问 3 分: (15) 式 3 分;

第 (2.2) 问 4 分: (16) (17) 式 2 分;

第 (2.3) 问 2 分: (18) (19) 式 1 分;

第 (3) 问 12 分: (25) 式 2 分, (20) (21) 式 3 分, (26) 式 4 分;

第 (4.1) 问 5 分: (27) (28) (29) (30) (31) 式 1 分;

第 (4.2) 问 6 分: (33) (34) 式 3 分;

第 (5.1) 问 4 分: (35) (36) 式 2 分;

第 (5.2) 问 8 分: (37) 式 3 分, (38) 式 5 分;

第 (5.3) 问 8 分: (39) 式 5 分; 原因 3 分。