

第 14 届 CPHOS 物理竞赛联考

理论试题参考答案及评分标准

考试时间：2023 年 3 月 25 日 9:00—12:00

一、(60 分) 杆的滑落

如图 1.1 所示，在重力加速度为 g 的环境中，有光滑竖直刚性墙壁与静摩擦系数、动摩擦系数同为 μ 的水平刚性地面。一长为 $2l$ ，质量 m 均匀分布的刚性细杆斜靠在墙角。记杆与竖直方向夹角为 θ 。

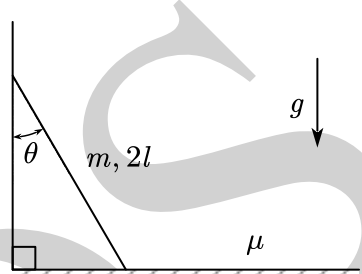


图 1.1

(1) 求使杆能在当前位置保持平衡的 θ 的范围。

下面考察杆的滑落，记 $\theta = \theta(t)$ 。设杆原先竖立于墙角 ($\theta(0) = 0$)，随后在 $t = 0$ 时刻受到大小合适的扰动，使其获得角速度 $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ 且恰好能滑落，即恰好在 $t > 0$ 时不会再静止斜靠于墙角。

(2) 若 $\mu = 0$ ，求杆脱离竖直墙壁瞬间杆与竖直方向的夹角 θ_{00} 。

(3) 若 $\mu \ll 1$ ，求 ω_0 ，保留到 μ 的最低阶项。

(4) 若 $\mu \ll 1$ ，求杆脱离竖直墙壁瞬间杆与竖直方向的夹角 θ_0 ，保留到 μ 的一阶修正项。

解：(1) 如左下图所示受力分析。

三力共点几何关系：

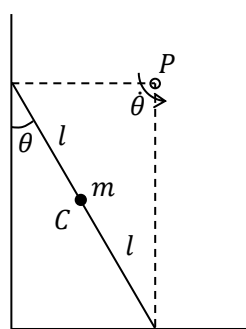
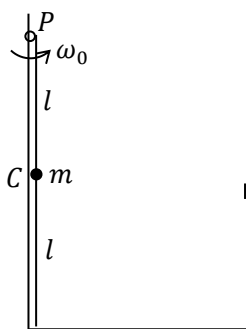
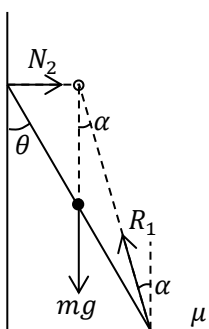
$$\tan \theta = 2 \tan \alpha \quad (1)$$

摩擦角条件：

$$\tan \alpha \leq \mu \quad (2)$$

得范围

$$0 \leq \theta \leq \arctan(2\mu) \quad (3)$$



(2) 如右上图所示过程，能量守恒（使用瞬心计算动能）：

$$mgl + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m(2l)^2 \omega_0^2 = mgl \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m(2l)^2 + ml^2 \right) \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

得

$$\dot{\theta}^2 = \omega_0^2 + \frac{3g}{2l} (1 - \cos \theta) \quad (5)$$

由题意得

$$\omega_0 = 0 \quad (6)$$

于是

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2l}(1 - \cos \theta) \quad (7)$$

求导得

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4l} \sin \theta \quad (8)$$

如左下图所示受力分析。杆水平方向质心运动定理：

$$N_2 = m \frac{d^2}{dt^2}(l \sin \theta) \quad (9)$$

脱离临界条件：

$$N_2 = 0 \quad (10)$$

得

$$\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta = 0 \quad (11)$$

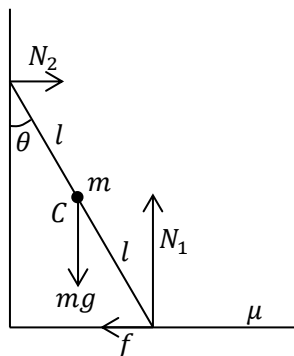
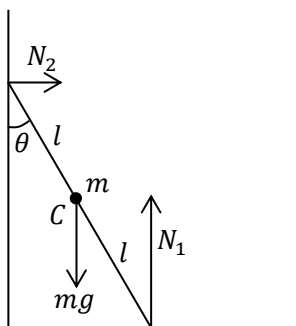
代入 (7) (8) 式得方程

$$\frac{3g}{4l} \sin \theta \cos \theta - \frac{3g}{2l}(1 - \cos \theta) \sin \theta = 0 \quad (12)$$

解得脱离时夹角

$$\theta_{00} = \arccos \frac{2}{3} = 0.841 \text{rad} \quad (13)$$

(注：严格解与小数解给出一个即可，(4) 问同)



(3) 考察 $\theta \ll 1$ 时杆的运动，如右上图所示受力分析（图中夸大了 θ ）。

质心运动定理（近似）：

水平：

$$N_2 - f = m l \ddot{\theta} \quad (14)$$

竖直：

$$N_1 - mg = 0 \quad (15)$$

对质心的转动定理（近似）：

$$N_1 l \theta - f l - N_2 l = \frac{1}{12} m (2l)^2 \ddot{\theta} \quad (16)$$

滑动：

$$f = \mu N_1 \quad (17)$$

联立解得

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4l}(\theta - 2\mu) \quad (18)$$

由题意得，在杆滑落过程中的某时刻， $\theta = \theta_1, \dot{\theta} = 0^+, \ddot{\theta} = 0$ ，代入上述方程解得

$$\theta_1 = 2\mu \quad (19)$$

利用 $\ddot{\theta} = \frac{\dot{\theta} d\dot{\theta}}{d\theta}$ 得

$$\frac{\dot{\theta} d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{3g}{4l}(\theta - 2\mu) \quad (20)$$

分离变量，两边积分：

$$\int_{\omega_0}^0 \dot{\theta} d\dot{\theta} = \int_0^{\theta_1} \frac{3g}{4l}(\theta - 2\mu) d\theta \quad (21)$$

得

$$-\frac{1}{2}\omega_0^2 = \frac{3g}{4l}\left(\frac{1}{2}\theta_1^2 - 2\mu\theta_1\right) \quad (22)$$

解得

$$\omega_0 = \mu \sqrt{\frac{3g}{l}} \quad (23)$$

（注：这是在不确定是否有时间做（4）问的情况下保证得分的方法，如有考生在（3）问中列出了严格（指未作 $\theta \ll 1$ 的近似）的动力学方程而在（4）问中省略，仍可以得到（4）问中对应的方程分）

（4）方法一：

考察一般的 θ 下杆的运动，受力分析图与（3）问相同，只是 θ 不一定很小。

质心运动定理：

水平：

$$N_2 - f = m \frac{d^2}{dt^2}(l \sin \theta) \quad (24)$$

竖直：

$$N_1 - mg = m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos \theta) \quad (25)$$

对质心的转动定理：

$$N_1 l \sin \theta - f l \cos \theta - N_2 l \cos \theta = \frac{1}{12} m (2l)^2 \ddot{\theta} \quad (26)$$

滑动：

$$f = \mu N_1 \quad (27)$$

联立得

$$\ddot{\theta} = \frac{2\mu \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 + (\sin \theta - 2\mu \cos \theta) \frac{g}{l}}{\frac{4}{3} - 2\mu \sin \theta \cos \theta} \quad (28)$$

利用 $\ddot{\theta} = \frac{\dot{\theta} d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\theta}^2)}{d\theta}$ 作换元，得 $\dot{\theta}^2(\theta)$ 满足的微分方程

$$\frac{d(\dot{\theta}^2)}{d\theta} = \frac{2\mu \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 + (\sin \theta - 2\mu \cos \theta) \frac{g}{l}}{\frac{2}{3} - \mu \sin \theta \cos \theta} \quad (29)$$

由题意得，在杆滑落过程中的某时刻， $\theta = \theta_1, \dot{\theta} = 0^+, \frac{d(\dot{\theta}^2)}{dt} = 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$ ，代入上述方程解得

$$\theta_1 = \arctan(2\mu) \quad (30)$$

将 (29) 式保留到 μ 的一阶项, 得

$$\frac{d(\dot{\theta}^2)}{d\theta} = 3\mu \cos^2 \theta \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{3g}{2l} \left(\sin \theta + \mu \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta \cos \theta - 2 \cos \theta \right) \right) \quad (31)$$

其为一阶线性微分方程, 在初始条件 $\dot{\theta}^2|_{\theta=\theta_1} = 0^+$ 下的解为

$$\dot{\theta}^2 = e^{\int_{\theta_1}^{\theta} 3\mu \cos^2 \theta' d\theta'} \int_{\theta_1}^{\theta} e^{-\int_{\theta_1}^{\theta'} 3\mu \cos^2 \theta'' d\theta''} \cdot \frac{3g}{2l} \left(\sin \theta' + \mu \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta' \cos \theta' - 2 \cos \theta' \right) \right) d\theta' \quad (32)$$

保留到 μ 的一阶项, 得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2l} \left(1 - \cos \theta + \mu \left(\frac{3}{2} \theta + \frac{3}{2} \sin \theta \cos \theta - \frac{3}{2} \sin \theta \cos^2 \theta - \frac{7}{2} \sin \theta \right) \right) \quad (33)$$

脱离临界条件:

$$N_2 = 0 \quad (34)$$

与 (24) (25) (27) 式联立得

$$\mu \frac{g}{l} + (\cos \theta - \mu \sin \theta) \ddot{\theta} = \dot{\theta}^2 (\mu \cos \theta + \sin \theta) \quad (35)$$

代入 (28) (33) 式并保留到 μ 的一阶项, 得方程

$$\sin \theta (2 - 3 \cos \theta) + \mu \left(3\theta \sin \theta - \frac{22}{3} + 5 \cos \theta + \frac{3}{2} \cos^2 \theta - 6 \cos^3 \theta + \frac{15}{2} \cos^4 \theta \right) = 0 \quad (36)$$

由于 $\mu \ll 1$, 本问答案 θ_0 应与 (2) 问答案 θ_{00} 接近, 于是令

$$\theta_0 = \theta_{00} + \delta\theta_0, \delta\theta_0 \ll 1, \theta_{00} = \arccos \frac{2}{3} \quad (37)$$

将 (13) 式代入方程并近似:

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \left(2 - 3 \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3} \delta\theta_0 \right) \right) + \mu \left(3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \theta_{00} - \frac{22}{3} + 5 \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^3 + \frac{15}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^4 \right) = 0 \quad (38)$$

解得

$$\delta\theta_0 = \mu \left(\frac{98}{45} - \frac{3}{5} \sqrt{5} \arccos \frac{2}{3} \right) \quad (39)$$

所以

$$\theta_0 = \theta_{00} + \delta\theta_0 = \arccos \frac{2}{3} + \mu \left(\frac{98}{45} - \frac{3}{5} \sqrt{5} \arccos \frac{2}{3} \right) = (0.841 + 1.049\mu) \text{rad} \quad (40)$$

方法二:

首先, 假设 $\mu = 0$, 求 N_1 的零阶近似 $N_1^{(0)}$ 。

根据 (2) 问中的受力分析, 杆竖直方向质心运动定理:

$$N_1^{(0)} - mg = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) \quad (1')$$

由 (3) 问, $\omega_0 = \mu \sqrt{\frac{3g}{l}} \sim \mu$, 故求导并将 (5) (8) 式代入得

$$N_1^{(0)} = \frac{1}{4} mg (9 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 1) \quad (2')$$

现在考虑本小问情况, 即 $\mu \ll 1$ 。用 N_1 的零阶近似计算摩擦力做功微元

$$dW = \mu N_1^{(0)} d(2l \sin \theta) \quad (3')$$

得

$$dW = \frac{1}{2} \mu mgl (9 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 1) \cos \theta d\theta \quad (4')$$

积分得杆从竖立状态滑到 θ 处时摩擦力做功

$$W = \frac{1}{2} \mu mgl (10 \sin \theta - 3 \sin^3 \theta - 3 \sin \theta \cos \theta - 3\theta) \quad (5')$$

在 (2) 问能量守恒中加入摩擦力做功:

$$mgl + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m(2l)^2 \omega_0^2 = W + mgl \cos \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m(2l)^2 + ml^2 \right) \dot{\theta}^2 \quad (6')$$

得 $\dot{\theta}^2(\theta)$ 的一阶近似为

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2l} (1 - \cos \theta) - \frac{3\mu g}{4l} (10 \sin \theta - 3 \sin^3 \theta - 3 \sin \theta \cos \theta - 3\theta) \quad (7')$$

与 (33) 式相同。(7') 式求导得

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4l} \sin \theta - \frac{3\mu g}{8l} (9 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta + 1) \cos \theta \quad (8')$$

考察一般的 θ 下杆的运动以求出临界, 受力分析图与 (3) 问相同, 只是 θ 不一定很小。

质心运动定理:

水平 (用 N_1 的零阶近似计算摩擦力):

$$N_2 - \mu N_1^{(0)} = m \frac{d^2}{dt^2} (l \sin \theta) \quad (9')$$

竖直:

$$N_1 - mg = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) \quad (10')$$

脱离临界条件:

$$N_2 = 0 \quad (11')$$

与 (9') (10') 式联立得

$$\mu N_1^{(0)} + ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = 0 \quad (12')$$

代入 (2') (7') (8') 式并保留到 μ 的一阶项, 得方程

$$\sin \theta (2 - 3 \cos \theta) + \mu \left(3\theta \sin \theta - \frac{22}{3} + 5 \cos \theta + \frac{3}{2} \cos^2 \theta - 6 \cos^3 \theta + \frac{15}{2} \cos^4 \theta \right) = 0 \quad (13')$$

与 (36) 式相同。后续步骤与解法一相同, 令

$$\theta_0 = \theta_{00} + \delta\theta_0, \delta\theta_0 \ll 1, \theta_{00} = \arccos \frac{2}{3} \quad (14')$$

将 (13) 式代入方程并近似:

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \left(2 - 3 \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3} \delta\theta_0 \right) \right) + \mu \left(3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \theta_{00} - \frac{22}{3} + 5 \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^3 + \frac{15}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^4 \right) = 0 \quad (15')$$

解得

$$\delta\theta_0 = \mu \left(\frac{98}{45} - \frac{3}{5} \sqrt{5} \arccos \frac{2}{3} \right) \quad (16')$$

所以

$$\theta_0 = \theta_{00} + \delta\theta_0 = \arccos \frac{2}{3} + \mu \left(\frac{98}{45} - \frac{3}{5} \sqrt{5} \arccos \frac{2}{3} \right) = (0.841 + 1.049\mu) \text{ rad} \quad (17')$$

评分标准: 本题满分 60 分。

第 (1) 问 4 分: (1) (2) 式各 1 分, (3) 式 2 分;

第 (2) 问 14 分: (4) (7) (8) (9) (10) 式各 2 分, (13) 式 4 分;

第 (3) 问 18 分: (14) (15) (16) (17) (18) (19) 式各 2 分, (22) (23) 式各 3 分;

第 (4) 问 24 分:

方法一: (24) (25) (26) (27) (28) (29) (34) (36) 式各 2 分, (37) (40) 各 4 分;

方法二: (2') (5') (7') (8') (9') (10') (11') (13') 式各 2 分, (14') (17') 式各 4 分。

二、(40 分) 单电子隧穿效应

微纳电子器件中, 微小电容存在单电子隧穿效应。当电容器储能与热涨落能量满足 $k_B T \ll \epsilon_C = \frac{q^2}{2C}$ 时, 由于量子效应, 单电子可以从电容器 C 的一个极板穿越板间的空气隙, 到达另一个极板, 导致电容的电量“自发地”发生一个电子电量 e 的变化。

(1) 若单电子隧穿后能量升高, 则无法发生隧穿。推导两个方向单电子隧穿都无法发生时 q 需满足的条件, 即库仑阻塞条件。

(2) 此时外加恒定的偏置电流 I , 忽略隧穿用时, 定义电压振荡的振幅为电压最大值和最小值之差的一半, 求稳定状态下单电子隧穿结电压振荡振幅 V_A 、周期 T 。

(3) 设单位时间隧穿几率为 $\Gamma = \frac{\Delta \epsilon_C}{e^2 R_T}$, $\Delta \epsilon_C$ 为隧穿前后电容器储能的减小量, R_T 与电容器的带电量 q 无关, 为一常数。外加恒定偏置电流 I , 求系统稳定后, 单电子隧穿结电压 \bar{V} 与 I 的关系, 即伏安特性。

解: (1) 电容器储能

$$W_0 = \frac{q^2}{2C} \quad (1)$$

隧穿后, 电容器储能变为

$$W_1 = \frac{(q - e)^2}{2C} \quad (2)$$

若发生库仑阻塞, 则

$$W_0 < W_1 \quad (3)$$

即

$$-2eq + e^2 > 0 \quad (4)$$

条件为

$$q < \frac{1}{2}e \quad (5)$$

同理, 将上述讨论中的 $-e$ 全部改为 $+e$, 最终得到库仑阻塞条件为

$$-\frac{1}{2}e < q < \frac{1}{2}e \quad (6)$$

(2) 稳定状态下, 电容器的带电量从 q 经电流 I 充到 q' , 同时电压从 V 变到 V' , 然后发生一次隧穿, 降到 q , 循环往复。因此, 周期 T 为一个周期内充电用时。

分析充电得

$$q' - q = IT \quad (7)$$

分析隧穿得

$$q' - q = e \quad (8)$$

联立 (7) (8) 式得周期为

$$T = \frac{e}{I} \quad (9)$$

电容器满足

$$q = CV \quad (10)$$

$$q' = CV' \quad (11)$$

由题意得振幅满足

$$2V_A = V' - V \quad (12)$$

联立 (8) (10) (11) (12) 式得

$$V_A = \frac{e}{2C} \quad (13)$$

(3) 设在某次随机试验中, $t = 0$ 时电容器带电 Q_0 , $0 \sim t$ 时间间隔内共发生 k 次隧穿, t 时刻电容器带电 Q 。

由电荷守恒,

$$Q(k, t) = Q_0 + It - ke \quad (14)$$

电容器满足

$$Q(k, t) = CV(k, t) \quad (15)$$

得

$$V(k, t) = \frac{Q_0}{C} + \frac{I}{C}t - \frac{e}{C}k \quad (16)$$

求期望得

$$\bar{V}(t) = \frac{\bar{Q}_0}{C} + \frac{I}{C}t - \frac{e}{C}\bar{k}(t) \quad (17)$$

微分得

$$d\bar{V} = \frac{I}{C}dt - \frac{e}{C}d\bar{k} \quad (18)$$

由题意, 在 t 时刻的

$$\Delta\epsilon_c = \frac{Q^2}{2C} - \frac{(Q - e)^2}{2C} \quad (19)$$

代入题给关系 $\Gamma = \frac{\Delta\epsilon_c}{e^2 R_T}$ 得

$$\Gamma = \frac{1}{2eR_T} \left(2V - \frac{e}{C} \right) \quad (20)$$

由概率关系,

$$\bar{k}(t + dt) = \bar{k}(t) + \bar{\Gamma}dt \quad (21)$$

将 (20) (21) 式代入 (18) 式中, 得

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{I}{C} - \frac{1}{CR_T} \left(\bar{V} - \frac{e}{2C} \right) \quad (22)$$

稳定时,

$$\bar{V} = IR_T + \frac{e}{2C} \quad (23)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 10 分: (1) (2) (3) (6) 式各 2 分, (4) (5) 式各 1 分;

第 (2) 问 10 分: (7) (9) (13) 式各 2 分, (8) (10) (11) (12) 式各 1 分;

第 (3) 问 20 分: (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) (23) 式各 2 分。

三、(40 分) 螺旋过山车

在游乐园中的过山车项目中, 经常可以看见过山车的轨道有一竖直的圆, 能够给游客带来刺激的体验。现假设该圆形轨道的半径为 R , 圆面的法向垂直于重力方向。设过山车的长度为 πR , 过山车的动力系统对单位长度的过山车的作用力恒定为 a , 方向沿该点的瞬时速度方向。过山车的质量为 m 。过山车质量均匀分布, 且轨道能束缚过山车使其不脱离轨道。

(1) 若开始时, 过山车静止在水平的轨道上, 这条水平轨道末端连接着一个圆轨道, 过山车的车头恰好在水平轨道与圆轨道的连接处, 已知过山车能够走完整个圆轨道。规定车头的运动方向为正方向。试求整个过程中, 过山车车头的切向加速度的最小值 A_{\min} (考虑正负) 以及满足条件的 a 的取值范围。注意, 要给出 a 与 m, g, R 的数值关系, 保留三位小数。

(2) 接上问, 已知 a 在上述范围内。求在整个过程 (包括起始时间和头部再次到达最低点的时间) 中当过山车车头加速度最大时 (考虑正负), 过山车上靠近车头的前一半中张力最小处对单位长度铁轨的压力 $\frac{dN}{Rd\phi}$ 。并给出 a 取临界值时的具体大小。同样要给出其与 m, g, R 的数值关系, 保留三位小数。

解: (1)

方法一:

显然, 当车头正好到达轨道最高点时车头的切向加速度最小。

在过山车的自然坐标系中, 设过山车各段的重力切向分量之和为 f , 那么积分可得:

$$df = \frac{m}{\pi R} Rg \cdot \sin \theta \cdot d\theta \quad (1)$$

$$f = \int_0^\pi \frac{m}{\pi R} \cdot Rg \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \frac{2}{\pi} mg \quad (2)$$

所以, 过山车的最小加速度为:

$$A_{\min} = \frac{a\pi R - f}{m} = \frac{a\pi R}{m} - \frac{2}{\pi} g \quad (3)$$

如果过山车要走完整个圆轨道, 那么就要求最小速度大于等于 0。

考虑过山车加速的与位置的关系, 记过山车车头绕圆形转过的角度为 θ 。

当 $0 < \theta < \pi$ 时:

$$f(\theta) = \int_0^\theta \frac{1}{\pi} mg \sin \theta' \cdot d\theta' = \frac{1}{\pi} mg(1 - \cos \theta) \quad (4)$$

$$A(\theta) = \frac{a\pi R}{m} - \frac{g}{\pi} (1 - \cos \theta) \quad (5)$$

当 $\pi \leq \theta < 2\pi$ 时:

$$f(\theta) = \int_{\theta-\pi}^\pi \frac{1}{\pi} mg \sin \theta' \cdot d\theta' - \int_0^{\theta-\pi} \frac{1}{\pi} mg \sin \theta' \cdot d\theta' = -\frac{2}{\pi} mg \cos \theta \quad (6)$$

$$A(\theta) = \frac{a\pi R}{m} + \frac{2}{\pi} g \cos \theta \quad (7)$$

分析可知: 当 $\theta = \pi$ 时, 加速度取最小值, 作图可以发现, 当 a 值较小时, 过山车会经过加速、减速、再加速三个阶段。所以, 就要求在减速阶段的最后, 过山车的速度要大于 0。

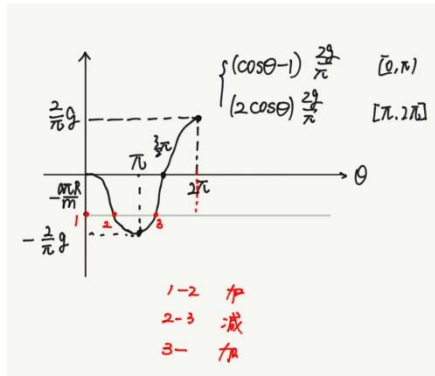
减速阶段末的 θ 值设为 θ_0 , 则由 (7) 式有:

$$\cos \theta_0 = -\frac{a\pi^2 R}{2mg} \quad (8)$$

又有基本运动学公式:

$$2AR \cdot d\theta = d(v^2) \quad (9)$$

考虑减速阶段末速度恰好为 0 的临界情况（记这种情况下的 $a = a_0$ ），对开始到减速阶段结



束的全过程利用上式积分得到：

$$0 = \int_0^\pi 2R \left[\frac{a_0 \pi R}{m} - \frac{g}{\pi} (1 - \cos \theta) \right] d\theta + \int_\pi^{\theta_0} 2R \left(\frac{a_0 \pi R}{m} + \frac{2g}{\pi} \cos \theta \right) d\theta \quad (10)$$

最终化简得到：

$$\frac{a_0 \pi R}{m} \left[2\pi - \arccos \left(-\frac{a_0 \pi^2 R}{2mg} \right) \right] - \frac{2g}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{a_0 \pi^2 R}{2mg} \right)^2} = g \quad (11)$$

要求 $a \geq a_0 = 0.118 \frac{mg}{R}$ 。

方法二：

考虑过山车的速度与位置的关系，记过山车车头绕圆形转过的角度为 θ 。

当 $0 < \theta < \pi$ 时：

$$\frac{1}{2} m v^2 = - \int_0^\theta \frac{m}{\pi R} g R (1 - \cos \theta') \cdot R d\theta' + \pi R a \cdot R \theta = - \frac{mgR}{\pi} (\theta - \sin \theta) + \pi R^2 a \theta \quad (1')$$

$$v^2 = - \frac{2gR}{\pi} (\theta - \sin \theta) + \frac{2\pi R^2 a \theta}{m} \quad (2')$$

记 A 为切向加速度，对 (2') 式两边求导得到：

$$2vA = \left(- \frac{2gR}{\pi} (1 - \cos \theta) + \frac{2\pi R^2 a}{m} \right) \frac{v}{R} \quad (3')$$

$$A = - \frac{g}{\pi} (1 - \cos \theta) + \frac{\pi R a}{m} \quad (4')$$

当 $\pi \leq \theta < 2\pi$ 时：

$$\frac{1}{2} m v^2 = - \int_{\theta-\pi}^\theta \frac{m}{\pi R} g R (1 - \cos \theta') \cdot R d\theta' + \pi R a \cdot R \theta = - \frac{mgR}{\pi} (\pi - 2 \sin \theta) + \pi R^2 a \theta \quad (5')$$

$$v^2 = -2gR \left(1 - \frac{2}{\pi} \sin \theta \right) + \frac{2\pi R^2 a \theta}{m} \quad (6')$$

对 (6') 式两边求导得到：

$$2vA = \left(\frac{4}{\pi} g R \cos \theta + \frac{2\pi R^2 a}{m} \right) \frac{v}{R} \quad (7')$$

$$A = \frac{a\pi R}{m} + \frac{2}{\pi} g \cos \theta \quad (8')$$

综合 (4') (8') 判断得到 $\theta = \pi$ 时

$$A_{\min} = \frac{a\pi R}{m} - \frac{2}{\pi} g \quad (9')$$

同时可知, A 随 θ 的变化为先减后增, 速度极小点应出现在 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 处。

当速度达到极小时,

$$A = 0, \quad \cos \theta_0 = -\frac{a\pi^2 R}{2mg} \quad (10')$$

因此, 我们考虑临界的情况 (记这种情况下的 $a = a_0$), 此时将 (10') 代入 (6') 可得:

$$\frac{a_0 \pi R}{m} \left[2\pi - \arccos \left(-\frac{a_0 \pi^2 R}{2mg} \right) \right] - \frac{2g}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{a_0 \pi^2 R}{2mg} \right)^2} = g \quad (11')$$

要求 $a \geq a_0 = 0.118 \frac{mg}{R}$ 。

(2) 易知当加速度达到最大时, 过山车转过 2π 的角度。由 (9) 式, 此时速度满足:

$$v^2 = \int_0^\pi \left[\frac{a\pi R}{m} - \frac{g}{\pi} (1 - \cos \theta) \right] d\theta + \int_\pi^{2\pi} 2R \left(\frac{a\pi R}{m} + \frac{2g}{\pi} \cos \theta \right) d\theta \quad (12)$$

得到

$$v^2 = \frac{4a\pi^2 R^2}{m} - 2Rg \quad (13)$$

同时, 加速度易得:

$$A = \frac{a\pi R}{m} + \frac{2}{\pi}g$$

取从车尾开始顺指针方向转过 ϕ 角度的过山车分析, 可得 ϕ 角度处的张力大小为:

$$T = \frac{m\phi}{\pi} A - \int_0^\phi \frac{1}{\pi} mg \sin \phi' \cdot d\phi' - aR\phi = \frac{m\phi}{\pi} A - \frac{1}{\pi} mg (1 - \cos \phi) - aR\phi \quad (14)$$

过山车上靠近车头的前一半中过山车中张力最小处有:

$$\frac{dT}{d\phi} = \frac{m}{\pi} A - \frac{1}{\pi} mg \sin \phi - aR = 0 \quad (15)$$

得到张力最小点满足:

$$\sin \phi_0 = \frac{2}{\pi}, \quad \frac{\pi}{2} < \phi_0 < \pi$$

最小张力值为:

$$T = \frac{m\phi_0}{\pi} A - \frac{1}{\pi} mg (1 - \cos \phi_0) - aR\phi_0 = \frac{mg}{\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{2}{\pi} \right) \quad (16)$$

对该处的轨道受力分析可得:

$$dN + \frac{m}{\pi R} \cdot R d\phi \cdot g \cos \phi_0 + T_{\min} d\phi = \frac{m}{\pi R} \cdot R d\phi \frac{v^2}{R} \quad (17)$$

最终得到:

$$\frac{dN}{R d\phi} = \frac{mg}{\pi R} \left(2 \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} - 3 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{2}{\pi} + \frac{4\pi^2 R a}{mg} \right) \quad (18)$$

代入 $a = a_0$ 得

$$\frac{dN}{R d\phi} = 1.160 \frac{mg}{R} \quad (19)$$

为单位长度施加的压力大小。

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 19 分：

方法一：(1) (3) (5) (7) (9) 式各 1 分，(2) (4) (6) (8) (11) 式各 2 分，(10) 式 3 分，(11) 式结果 1 分；

方法二：(1') (4') (5') (8') (9') (10') 式各 2 分，(2') (3') (6') (7') 式各 1 分，(11) 式 2 分，计算结果 1 分；

第 (2) 问 21 分：(12) (13) 式各 2 分，(14) (15) (16) 式 3 分，(17) (18) 式 3 分，(19) 式 2 分。

四、(40 分) 热透镜效应

热透镜效应是指半导体激光器工作时产生的温度会使晶体表面发生热形变，造成了晶体各部分密度不同，而光在经过不同密度的分界线时发生不同程度的折射，因此就形成了像是光线通过普通透镜一样的折射效果。半导体激光器光束具有与高斯分布相对应的空间剖面，形成不均匀的温度分布即径向的温度梯度变化，中心温度最高，沿径向逐渐降低。半导体激光器工作时高斯光束照射到介质表面，由于光热效应，会使介质中心温度升高并沿径向逐渐降低，温度梯度致使微观粒子产生向外扩散的运动趋势，造成介质各部分密度不同，从而导致介质形成折射率梯度，如图 4.1 所示。

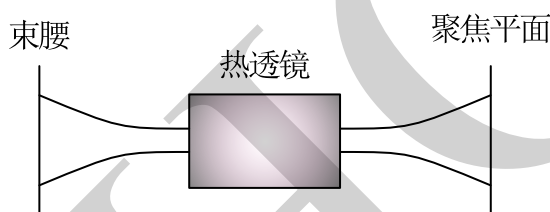


图 4.1

在热透镜效应中，由常数 $\frac{dn}{dT}$ 引起的折射率随温度变化是引起热透镜效应的主要因素，已知等效透镜的焦距为 f ($f \gg r$)，光束通过透镜后，聚焦于焦点 F ，如图 4.2 所示。以样品厚度方向为 z 方向，介质内温度分布为

$$T(r, z) = T_0 \left[1 - \frac{r^2}{f^2} e^{-kz} \right] \quad (4.1)$$

其中 T_0, k 均为已知常数，入射光的波数 $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ 。回答下列问题。

(1) 试求出在薄透镜位置 r 处相对于透镜中心处的相位差 $\Delta\phi_f = \phi(r) - \phi(0)$ 的表达式。

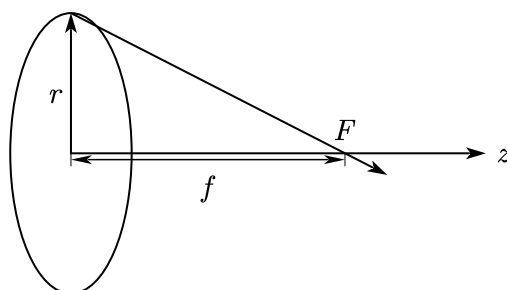


图 4.2

(2) $\phi(r)$ 是 r 处光通过薄膜的累积相位差：

$$\phi(r) = \int_0^b \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta n(r, z) dz \quad (4.2)$$

其中 b 为热透镜的样品厚度， $\Delta n(r, z)$ 为距轴心 r 处热致折射率变化，定义为

$$\Delta n(r, z) = n(r, z) - n(0, z) \quad (4.3)$$

试求出温度梯度产生的热透镜焦距 f 的表达式。

(3) 但是实际实验中考虑到存在环境噪声光波的干扰，因此采用迈克尔孙干涉仪利用相干光的干涉来消除此干扰，入射光经分束器分成两束光，假设分光后每束光的振幅为 A_0 ，它们经过不同的光程 r_1 和 r_2 后相遇并发生干涉，光束的振幅相等，空气的折射率 $n = 1$ ，初相位相等，试求出干涉光强 I 关于波长 λ 的函数 $I(\lambda)$ 。

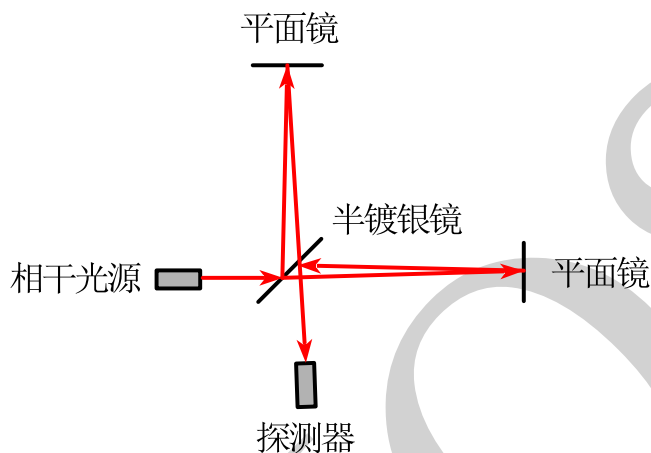


图4.3

解：(1) 由费马原理可知，光束各点在焦点 F 处有相同的相位。而在薄透镜位置 r 处的光程相对于透镜中心处的光程相差为 δ

$$\delta = \sqrt{r^2 + f^2} - f \approx \left(f + \frac{r^2}{2f} \right) - f = \frac{r^2}{2f} \quad (1)$$

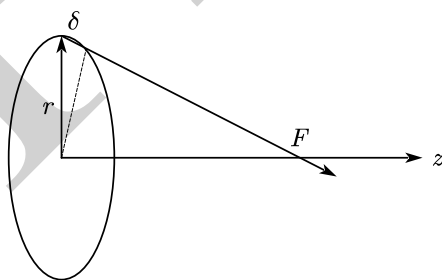


图4.4

对开方项进行关于 r 幂级数展开，并取级数前两项，得与等效透镜焦距相关的相位变化为

$$\Delta\phi_f = \phi(r) - \phi(0) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{r^2}{2f} = \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{r^2}{f} \quad (2)$$

(2) 折射率与温差的关系为

$$\Delta n(r, z) = [T(r, z) - T(0, z)] \frac{dn}{dT} = -\frac{T_0 r^2}{f^2} e^{-kz} \frac{dn}{dT} \quad (3)$$

则

$$\phi(r) = \int_0^b \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta n(r, z) dz = \int_0^b -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{T_0 r^2}{f^2} e^{-kz} \frac{dn}{dT} dz = \frac{2\pi}{\lambda k} \cdot \frac{T_0 r^2}{f^2} (e^{-kb} - 1) \frac{dn}{dT} \quad (4)$$

$$\Delta\phi(r) = \phi(r) - \phi(0) = \frac{2\pi}{\lambda k} \cdot \frac{T_0 r^2}{f^2} (e^{-kb} - 1) \frac{dn}{dT} \quad (5)$$

(2)(5)式联立得

$$\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{r^2}{f} + \frac{2\pi}{\lambda k} \cdot \frac{T_0 r^2}{f^2} (e^{-kb} - 1) \frac{dn}{dT} = 0 \quad (6)$$

则温度梯度产生的热透镜焦距表达式

$$f = \frac{2T_0}{k} (1 - e^{-kb}) \frac{dn}{dT} \quad (7)$$

(3) 由题意得

$$E_1 = A_0 \cos \left[2\pi f \left(t - \frac{r_1}{v} \right) + \varphi \right] \quad (8)$$

$$E_2 = A_0 \cos \left[2\pi f \left(t - \frac{r_2}{v} \right) + \varphi \right] \quad (9)$$

式中, f 是光的频率, v 是光速。叠加后, 得到的光波场为

$$E = A \cos[2\pi f t + \varphi] \quad (10)$$

而

$$A^2 = 2A_0^2 [1 + \cos \Delta\varphi] \quad (11)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \quad (12)$$

则

$$I(\lambda) = 2A_0^2 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \right] \right\} \quad (13)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 10 分: (1) (2) 式各 5 分;

第 (2) 问 20 分: (3) (4) (5) (6) (7) 式各 4 分;

第 (3) 问 10 分: (8) (9) 式各 1 分, (11) 式 3 分, (12) 式 2 分, (13) 式 3 分。

五、(40 分) 细导线的相变

长度为 L 的细导线是由可以相变的材料制成的, 它的平均截面面积为 A (各处略有涨落, 且 $L^2 \gg A \gg \Delta A$)。它的电阻率取两个值之一: 如果温度小于 T_c , 则为 ρ ; 如果温度大于 T_c , 则为 2ρ 。单位长度导线在环境中的散热功率为 $w = \alpha(T - T_0)$, 其中 α 是常数, T 表示导线的温度, T_0 是环境温度 ($T_0 < T_c$)。导线的导热率很差, 故可忽略沿导线方向热流, 沿导线方向可以有温度梯度。认为相变过程导线形状不变, 并忽略温差电动势等副效应。

现考虑如下的循环: 导线两端的电压从 0 非常缓慢地增加到 $2V_0$, 然后再缓慢的减小回 0。请在下图中画出总功率随电压变化的曲线, 并在曲线上用箭头标出系统演化的方向。务必在图中标注每段曲线的函数解析式和转折点的坐标。坐标单位采用了无量纲化, 即记 $P_0 =$

$$\alpha L(T_c - T_0) \text{ 以及 } V_0 = L \sqrt{\frac{\alpha \rho (T_c - T_0)}{A}}。$$

注意: 求解正确但未在图中画出或标出的部分不得分。

解:

由于不考虑沿导线的热流, 所以每一小段钢丝分电压仅供自己维持温度, 若以下标 k 表示同一点处的参量, 则由能量守恒定律:

$$w_k = \rho_k \left(\frac{I}{A}\right)^2 A \quad (1)$$

固有：

$$\alpha(T_k - T_0) = \rho_k \frac{I^2}{A} \quad (2)$$

式中 I 表示流过导线的电流。因此我们看出，只要是电阻率相同的部分，它们的温度也总是相同的。

那么当总电压为 V 时，若有长度 eL 的部分温度高于 T_c ，则导线功率为：

$$P = \frac{V^2 A}{(1+e)\rho L} \quad (3)$$

将 $P_0 = \alpha L(T_c - T_0)$ 以及 $V_0 = L\sqrt{\frac{\alpha\rho(T_c - T_0)}{A}}$ 带入可得：

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{1+e} \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 \quad (4)$$

下面来具体分析变化过程：

第一段：初始时刻， $T < T_c$ ，故全段电阻率为 ρ ，此时 $e = 0$ ，带入（4）得：

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 \quad (5)$$

随电压升高，温度到达 T_c 时，进入第二段，临界时：

$$\frac{V^2 A}{\rho L} = \alpha(T_c - T_0) \quad (6)$$

$$V = V_0$$

第二段：整个相变不会同时发生，且电阻率变为 2ρ 的部分会逐渐增多。论证如下：

这是因为导线截面略有涨落。横截面积略小的部分先开始相变。原因在于，在相变温度以下时，横截面积略小的部分的单位长电阻越大。根据平衡条件，横截面积略小的部分的温度应当略高于横截面积略大的部分，致使横截面积略小的部分更早到达相变温度并发生相变，而横截面积略大的部分维持在略低于但非常接近的温度。

也就是说，电阻率为 ρ 的部分温度一定维持在 T_c ，否则相变无法“生长”：

$$\alpha(T_c - T_0) = \rho \frac{I^2}{A} \quad (7)$$

联立欧姆定律 $I = \frac{VA}{\rho L(1+e)}$ ：

$$e = \frac{V}{V_0} - 1 \quad (8)$$

带入（4）得：

$$\frac{P}{P_0} = \frac{V}{V_0} \quad (9)$$

当所有部分电阻率都为 2ρ 后，进入第三段，临界时 $e = 1$ ：

$$V = 2V_0$$

第三段：现在电压开始降低，且全段导线电阻率为 2ρ ， $e = 1$ 带入（4）：

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 \quad (10)$$

降至温度为 T_c 进入第四段，临界时：

$$\frac{V^2 A}{2\rho L} = \alpha(T_c - T_0) \quad (11)$$

$$V = \sqrt{2}V_0$$

第四段：与第二段类似，此时约束条件为电阻率为 2ρ 的部分温度等于 T_c 。

$$\alpha(T_c - T_0) = 2\rho \frac{I^2}{A} \quad (12)$$

联立欧姆定律 $I = \frac{VA}{\rho L(1+e)}$ ：

$$e = \sqrt{2} \frac{V}{V_0} - 1$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{V}{\sqrt{2}V_0} \quad (13)$$

当所有部分电阻率都为 ρ 后，进入第五段，临界时 $e = 0$ ：

$$V = \frac{\sqrt{2}}{2}V_0 \quad (14)$$

第五段：全段电阻率为 ρ ，故曲线与第一段相同，直至电压降为0：

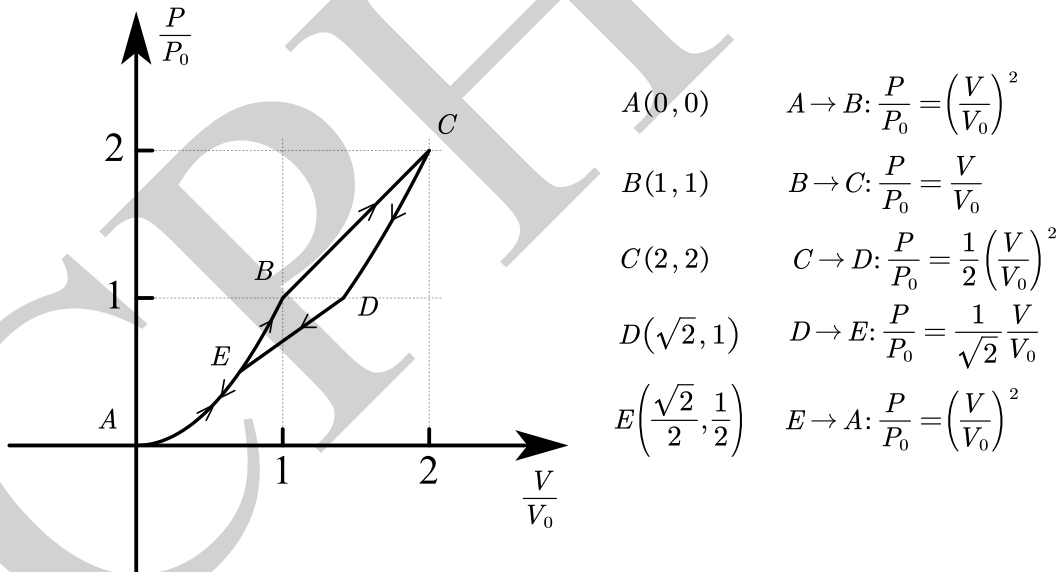
$$\frac{P}{P_0} = \frac{V}{V_0} \quad (15)$$

综合上式可得：

曲线分段为：① $\frac{P}{P_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^2$ ② $\frac{P}{P_0} = \frac{V}{V_0}$ ③ $\frac{P}{P_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{V_0}\right)^2$ ④ $\frac{P}{P_0} = \frac{V}{\sqrt{2}V_0}$ ；

四个转折点坐标为： $B(1,1)$ ， $C(2,2)$ ， $D(\sqrt{2},1)$ ， $E(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ ；

具体如下图所示：



评分标准：本题满分 40 分。

本题判分主要根据考生作图，过程不评分。

$A \rightarrow B, C \rightarrow D, E \rightarrow A$ 每段 6 分（其中图像 2 分，始末点 2 分，解析式 1 分，方向 1 分）

$B \rightarrow C, D \rightarrow E$ 每段 11 分（其中图像正确 7 分，始末点 2 分，解析式 1 分，方向 1 分）

六、（60 分）分析光子静质量上限

物理学的许多定律都与光子静质量确切为零密切相关，例如库仑定律的平方反比律、狭义相对论、规范不变性等等。本题将以 Proca 方程为基础研究非零光子静质量的物理效应，

并以实验为基础估计光子静质量的上限。

首先我们给出光子静质量存在时修正的 Maxwell 方程，即 Proca 方程：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \mu^2 \varphi \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu^2 \vec{A} \end{cases} \quad (6.1)$$

其中， $\mu = \frac{m_\gamma c}{\hbar}$ ， m_γ 为光子的静质量。 \vec{A} 为磁矢势，且满足方程

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (6.2)$$

请依据此方程组解决以下问题。

(1) 证明：点电荷 q 产生的静电场的电势的表达式为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (6.3)$$

(2) 磁偶极子 \vec{m} 的产生的磁矢势为

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (6.4)$$

(2.1) 请类比第 (1) 问，求出 Proca 方程体系下的磁偶极子的磁矢势，并求出磁偶极子产生的磁感应强度。

(2.2) 在第 (2.1) 小问中已经表明，在地球表面固定的 $r = R$ 处，地球磁场将出现偶极子角分布，加上一个明显与 \vec{m} 反平行的恒定外磁场。我们通过卫星和地面观测得出的结论是：外部磁场与赤道上的偶极子场之比为 539/31089，据此估算光子静质量上限。已知地球半径为 $R = 6371 \text{ km}$ 。

(2.3) 已知真空中的静磁压强为 $P_0 = \frac{B^2}{2\mu_0}$ ，其大小等于磁场的能量密度，请推导出 Proca 场下的附加压强 P_1 。对宇宙中的一个星系，实验表明星际气体压强与磁压强 P_0 大致相同，据此分析求出光子静质量的上限。已知星系尺度 $l \sim 10^{20} \text{ m}$ ，这意味着只需考虑磁场。

已知电磁场能量守恒方程为

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \vec{S} - \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (6.5)$$

其中 \vec{S} 为坡印亭矢量， ω 为电磁场的能量密度。

提示，你可能会用到以下公式：

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (6.6)$$

$$\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g} \cdot \nabla) \vec{f} + (\nabla \cdot \vec{g}) \vec{f} - (\vec{f} \cdot \nabla) \vec{g} - (\nabla \cdot \vec{f}) \vec{g} \quad (6.7)$$

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{f}) = (\nabla \varphi) \cdot \vec{f} + \varphi \nabla \cdot \vec{f} \quad (6.8)$$

$$(\vec{f} \cdot \nabla) \nabla \frac{e^{-kr}}{r} = [3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{f}) - \vec{f}](1 + kr) \frac{e^{-kr}}{r^3} + \hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{f}) k^2 \frac{e^{-kr}}{r} \quad (6.9)$$

$$\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{g} - \vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{g}) \quad (6.10)$$

解：（1）代入提示中（6.2）式与方程组（6.1）的第一式中

$$\nabla \cdot \left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \mu^2\varphi \quad (1)$$

取静态场条件

$$(\nabla^2 - \mu^2)\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

方法一：对点电荷有 $\rho = q\delta(\vec{r})$ ，当 $\vec{r} \neq 0$ 时利用提示中（6.6）式得到

$$\nabla^2\varphi = \mu^2 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (3)$$

且此时 $\rho = 0$ ，而当 $\vec{r} \rightarrow 0$ 时

$$\varphi_{Proca} \rightarrow \varphi_{Coulomb} \quad (4)$$

得证。

方法二：对 $r \neq 0$ 的情况下可以将方程（2）式化为

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) - \mu^2(r\varphi) = 0 \quad (3')$$

结合库伦定律的渐进条件，可以解得

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (4')$$

（2）（2.1）类似（2）式，我们可以推出静态下磁矢势方程

$$(\nabla^2 - \mu^2)\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \quad (5)$$

它的形式与电势一样，所以我们可以合理类比。首先我们改写一下题给的磁偶极子矢势

$$\vec{A}_0 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \nabla \frac{1}{r} \quad (6)$$

类比得到 $\frac{1}{r} \rightarrow \frac{e^{-\mu r}}{r}$ ，得到磁矢势

$$\vec{A}_0 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \nabla \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (7)$$

求磁场时我们要不停利用提示中所给的公式

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\vec{m} \times \nabla \frac{e^{-\mu r}}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{m} \cdot \nabla) \nabla \frac{e^{-\mu r}}{r} - \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \nabla^2 \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (8)$$

其中

$$\nabla^2 \frac{e^{-\mu r}}{r} = \mu^2 \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (9)$$

另一项利用提示（6.9）式

$$(\vec{m} \cdot \nabla) \nabla \frac{e^{-\mu r}}{r} = [3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}](1 + \mu r) \frac{e^{-\mu r}}{r^3} + \hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{m}) \mu^2 \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (10)$$

最后整理成（2.2）所描述的形式

$$\vec{B} = [3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}] \left(1 + \mu r + \frac{\mu^2 r^2}{3} \right) \frac{e^{-\mu r}}{r^3} - \frac{2}{3} \mu^2 \vec{m} \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (11)$$

（2.2）由题选取赤道上有 $\hat{r} \cdot \vec{m} = 0$ ，则

$$\frac{\vec{B}_{\text{外}}}{\vec{B}_{\text{偶极}}} = \frac{2}{3} \frac{\mu^2 R^2}{1 + \mu R + \frac{1}{3} \mu^2 R^2} = \frac{539}{31089} \quad (12)$$

解得

$$\mu R = 0.1756 \quad (13)$$

顺势求出光子静质量上限

$$m_\gamma = 9.696 \times 10^{-51} \text{ kg} \sim 10^{-50} \text{ kg} \quad (14)$$

(2.3) 由题干的提示, 我们猜测仍有静磁压强等于磁能密度, 所以我们只用求出修正的磁能密度就行了

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\mu^2}{\mu_0} \vec{A} \quad (15)$$

根据题干我们求一下 $\vec{j} \cdot \vec{E}$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{\mu^2}{\mu_0} \vec{A} \cdot \vec{E} \quad (16)$$

其中

$$(\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (17)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{E} = \vec{A} \cdot \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \cdot (\varphi \vec{A}) + \varphi \nabla \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (18)$$

然后对方程 (6.1) 的第四式作用

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0 = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{E}) - \mu^2 \nabla \cdot \vec{A} \quad (19)$$

再代入方程组 (6.1) 的第一式和电荷守恒方程 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$, 得到

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (20)$$

最后得到

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B} + \mu^2 \varphi \vec{A}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\mu^2 A^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu^2 \varphi^2 \right) \quad (21)$$

与题给的能量守恒方程对比得到能量密度

$$\omega = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\mu^2 A^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu^2 \varphi^2 \quad (22)$$

所以附加的静磁压强为

$$P_1 = \frac{\mu^2 A^2}{2\mu_0} \quad (23)$$

因为星际气体压强与磁压强 P_0 大致相同, 所以附加压强应该明显小于静磁压强

$$\frac{\mu^2 A^2}{2\mu_0} \ll \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (24)$$

从量级上考虑

$$A \sim Bl \quad (25)$$

于是光子静质量上限

$$m_\gamma \approx 3.5 \times 10^{-63} \text{ kg} \quad (26)$$

评分标准: 本题满分 60 分。

第 (1) 问 8 分:

方法一: (1) (2) (3) (4) 式各 2 分;

方法二: (1) (2) (3') (4') 式各 2 分;

第 (2) 问 52 分:

第 (2.1) 问 18 分: (5) (6) (8) (9) (10) (12) (13) (14) 式各 2 分, (7) (11) 式 4 分;

第 (2.2) 问 6 分: (12) (13) (14) 式各 2 分;

第 (2.3) 问 28 分: (15) (16) (17) (18) (19) (20) (22) (24) (25) (26) 式各 2 分, (21) (23) 式各 4 分。

七、(40 分)

在远离各星体的近近平直时空中, 四艘完全相同、静长 $l_0 = 1.25ct_0$ 的飞船 A、B、C、D 按如图 7 的方式作匀速直线运动。其中 c 为真空光速、 t_0 为已知常量。各飞船船体上均固定有两根夹角一定的定位用直杆 x_i 、 y_i ($i = A, B, C, D$, 以下简称“定位杆”), x_i 杆沿着各自的船身方向。初始时刻, A、B、C、D 四艘船的船尾 (记作 a_i) 重合。

在不同飞船参考系中观察到的飞船运动情况与定位杆方向为:

- ① 飞船 A 参考系中, y_A 杆与 x_A 杆垂直;
- ② 飞船 A 参考系中, 飞船 B 以速度 v 沿 x_A 杆方向运动, B 的两根定位杆与 A 的两杆分别平行;
- ③ 飞船 B 参考系中, 飞船 C 以速度 v 沿 y_B 杆方向运动, C 的两根定位杆与 B 的两杆分别平行;
- ④ 飞船 C 参考系中, 飞船 D 与飞船 A 保持相对静止, D 的两根定位杆与 C 的两杆分别平行。

(1) 求飞船 C 参考系中观察到的飞船 D 的相对速度 \vec{v}' 。已知 x_C 、 y_C 杆方向的单位矢量为 \hat{x}_C 、 \hat{y}_C

(2) 求飞船 A 参考系中观察到的飞船 D 的两根定位杆的夹角 α 的表达式, 并代入 $v = 0.6c$ 计算结果。用角度制表示, 保留 4 位有效数字。

(3) 飞船之间通过电磁波相互联络, 各船均于船头 (记作 b_i) 接收电磁波, 于船尾发射电磁波。在飞船 A 参考系中, 将初始时刻记作 $t = 0$, 已知 $v = 0.6c$ 。从 $t = 0$ 时刻起, 各飞船之间按照 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow \dots$ 的顺序发射电磁波联络信号, 且在各自飞船的参考系中, 接收到前一飞船发射的信号与开始向下一飞船发射信号是同时的。求飞船 A 第一次接收到从 D 发射的信号的时刻。结果中的系数保留 4 位有效数字。

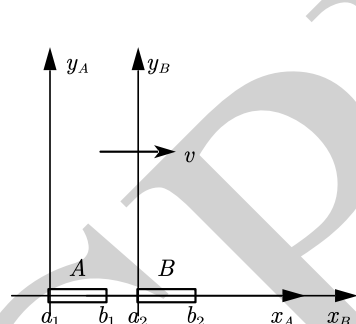


图 7.1

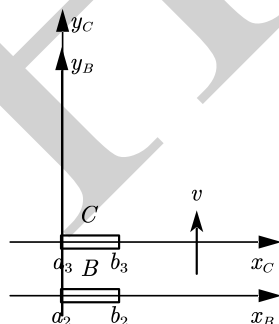


图 7.2

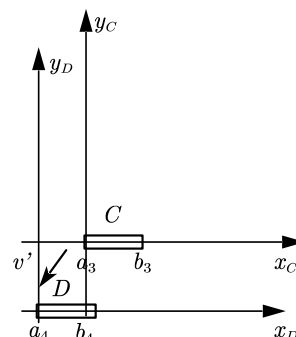


图 7.3

解:

(1) 由于飞船 D 与飞船 A 相对静止, 只用计算 A、C 两船的相对速度。

在飞船 B 参考系中, 飞船 A 的速度分量:

$$\begin{cases} v'_{Ax} = -v \\ v'_{Ay} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

根据速度变换公式, 飞船 A 在飞船 C 参考系中的速度分量

$$\begin{cases} v_{Ay} = \frac{v'_{Ay} - v}{1 - \frac{vv'_{Ay}}{c^2}} = -v \\ v_{Ax} = \frac{v'_{Ax} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vv'_{Ay}}{c^2}} = -v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{cases} \quad (2)$$

因此

$$\vec{v}' = -v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \hat{x}_C - v \hat{y}_C \quad (3)$$

【本问的典型错解：(0 分)】

在飞船B参考系中，飞船C的速度分量：

$$\begin{cases} v'_{Cy} = v \\ v'_{Cx} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

根据速度变换公式，飞船C在飞船A参考系中的速度分量

$$\begin{cases} v_{Cx} = \frac{v'_{Cx} + v}{1 + \frac{vv'_{Cx}}{c^2}} = v \\ v_{Cy} = \frac{v'_{Cy} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vv'_{Cx}}{c^2}} = v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{cases} \quad (2)$$

因此

$$\vec{v}' = -v \hat{x}_C - v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \hat{y}_C \quad (3)$$

这个解法不能给分，虽然形式上很相似。原因在于，飞船A两轴并不与飞船C两轴平行。】

(2) 根据题设，分析得到，A、B、C三艘飞船的两根定位杆在各自本征系中是互相垂直的。

方法一：

在飞船C参考系中，由于C与D之间的相对运动，在沿着相对速度方向上出现长度收缩。

$$|\vec{v}'| = \sqrt{2v^2 - \frac{v^4}{c^2}} \quad (4)$$

相对速度与 x_C 杆夹角

$$\theta = \arctan \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5)$$

由于沿着长度方向上收缩因子为 $\sqrt{1 - v'^2/c^2}$ ，垂直于速度方向上无收缩，因此，运动时杆与速度方向的夹角 ϕ' 和本征系中夹角 ϕ 的关系为

$$\tan \phi' = \frac{l'_\perp}{l'_\parallel} = \frac{l_\perp}{l_\parallel \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{\tan \phi}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \quad (6)$$

因此，在D船参考系中， x_D 、 y_D 杆与C相对于D的速度方向的夹角

$$\theta_1 = \arctan \left(\tan \theta \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \right) = \arctan \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7)$$

$$\theta_2 = \arctan \left(\frac{1}{\tan \theta} \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \right) = \arctan \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \quad (8)$$

(从这里可以看出 x_D 杆与 x_A 杆是重合的)
因此, 总的夹角 α 为

$$\alpha = \theta_1 + \theta_2 = \arctan \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \arctan \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \left(= \arctan \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v^2}{c^2}} \right) \quad (9)$$

代入 $v = 0.6c$ 算得

$$\alpha = 65.77^\circ \quad (10)$$

方法二:

飞船C参考系中, x_D 杆与 y_D 杆的方程为

$$x_D \text{ 杆: } y'' = -vt'' \quad (4.1')$$

$$y_D \text{ 杆: } x'' = -v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t'' \quad (4.2')$$

其中, 约定飞船A、B、C参考系中的各物理量分别用不加撇、加一撇、加两撇来表示。
根据洛伦兹变换,

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (y' - vt') \\ x'' = x' \\ t'' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t' - \frac{vy'}{c^2} \right) \end{cases} \quad (5')$$

得到飞船B参考系中的方程:

$$x_D \text{ 杆: } y' = 0 \quad (6.1')$$

$$y_D \text{ 杆: } x' - \frac{v^2}{c^2} y' = -vt' \quad (6.2')$$

根据洛伦兹变换,

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt) \\ y' = y \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \end{cases} \quad (7')$$

得到飞船A参考系中的方程:

$$x_D \text{ 杆: } y = 0 \quad (8.1')$$

$$y_D \text{ 杆: } \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} x - \frac{v^2}{c^2} y = 0 \quad (8.2')$$

因此，两杆的夹角

$$\alpha = \arctan \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\frac{v^2}{c^2}} \quad (9')$$

代入 $v = 0.6c$ 算得

$$\alpha = 65.77^\circ \quad (10')$$

(3) 逐次分析各信号传递过程。约定各参考系时间均以船尾重合时作为零点。

$A \rightarrow B$:

飞船 B 参考系中认为的信号接收时间

$$t'_1 = \frac{l_0}{c} = 1.25t_0 \quad (11)$$

$B \rightarrow C$:

飞船 B 参考系中，设在 t'_2 时间信号到达 C 的船头，则：

$$\sqrt{l_0^2 + (vt'_2)^2} = c(t'_2 - t'_1) \quad (12)$$

解得

$$t'_2 = \frac{125}{32}t_0 = 3.90625t_0 \quad (13)$$

此时飞船 C 的船头坐标

$$y'_2 = vt'_2 = \frac{75}{32}ct_0 = 2.34375ct_0 \quad (14)$$

由洛伦兹变换，飞船 C 参考系中认为的信号接收时间

$$t''_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t'_2 - \frac{vy'_2}{c^2} \right) = \frac{25}{8}t_0 = 3.125t_0 \quad (15)$$

$C \rightarrow D$:

方法一：

飞船 C 参考系中，飞船 D 的长度设为 l_D ，则利用 (2) 问中尺缩效应的分析，

$$(l_D \sin \theta)^2 + \left(\frac{l_D \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \right)^2 = l_0^2 \quad (16)$$

其中， θ 由 (5) 式决定。代入解得：

$$l_D = ct_0 \quad (17)$$

设飞船 C 参考系中在 t''_3 时刻信号到达 D 的船头，则

$$(vt''_3)^2 + \left(v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t''_3 - l_D \right)^2 = c^2(t''_3 - t''_2)^2 \quad (18)$$

解得：

$$t''_3 = 10.963t_0 \quad (19)$$

为了能够利用洛伦兹变换来求解飞船 D 参考系中接收到信号的时间，将 x_C 杆和 y_C 杆构成的坐标框架逆时针旋转 θ 角，得到一个新的 $\xi - \eta$ 坐标轴。此时，飞船 D 相对于飞船 C 沿着 ξ 轴的负方向运动。飞船 D 船头接收到信号时，船头的 ξ 坐标为

$$\xi_3 = -(v't''_3 - l_D \cos \theta) = -7.799ct_0 \quad (20)$$

根据洛伦兹变换，飞船D参考系中认为接收到信号的时刻为

$$t_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \left(t_3'' + \frac{v' \xi_3}{c^2} \right) = 7.766t_0 \quad (21)$$

方法二：

利用（2）问得到的结论（ x_D 杆与 x_A 杆重合），可知朝飞船D船头发射和朝飞船A船头发射是等价的。

由洛伦兹变换可知，飞船C船尾发射信号时在飞船B参考系中的时刻就是 t'_2 。

再利用洛伦兹变换将该事件变换至飞船A参考系中：

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (vt'_2) = \frac{375}{128} ct_0 = 2.92969ct_0 \quad (16')$$

$$y_2 = y'_2 = \frac{75}{32} ct_0 = 2.34375t_0 \quad (17')$$

$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t'_2 = \frac{625}{128} t_0 \quad (18')$$

因此，D船船头接收到信号的时刻为

$$t_3 = t_2 + \frac{\sqrt{(x_2 - l_0)^2 + y_2^2}}{c} = 7.766t_0 \quad (19')$$

$D \rightarrow A$ ：

由于飞船D事实上与A相对静止，因此不需要再变换参考系。因此，A接收到信号的时刻为

$$t = t_3 + \frac{l_0}{c} = 9.016t_0 \quad (22)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 8 分：（1）式 2 分，（2）式 4 分，（3）式 2 分；

第（2）问 12 分：

方法一：（4）式 2 分，（5）式 1 分，（6）（7）（8）（9）式各 2 分，（10）式 1 分；

方法二：（4'）式 1 分，（5'）（6'）（7'）（8'）（9'）式各 2 分，（10'）式 1 分；

第（3）问 20 分：（11）式 2 分，（12）式 1 分，（13）式 2 分，（14）式 1 分，（15）式 2 分，

方法一：（16）式 2 分，（17）（18）式各 1 分，（19）（20）（21）式各 2 分；

方法二：分析 2 分，（16'）（17'）（18'）（19'）式各 2 分；（22）式 2 分。