

第14届CPHOS物理竞赛联考

理论试题

考试时间：2023年3月25日 9:00—12:00

命题人：史宇飞 张政亮 蒋振杨 王子岳
黄文杰 余博文 杨岱旭
审题人：王梓人 陆伊杨 田向晨 张 源
黄文杰 余博文 杨岱旭 罗钰涵
李瀚奕

考生必读

- 1、考生考试前请务必阅读本须知。
- 2、本试题共5页，答题卡共8页，总分320分。
- 3、如遇到试题印刷不清楚的情况，请务必向监考老师提出。
- 4、需要阅卷老师评阅的内容一定要写在答题纸相应题号后面的空白处；阅卷老师只评阅答题纸上的内容，写在试题纸和草稿纸上的内容一律不被评阅。

一、(60分) 杆的滑落

如图1.1所示，在重力加速度为 g 的环境中，有光滑竖直刚性墙壁与静摩擦系数、动摩擦系数同为 μ 的水平刚性地面。一长为 $2l$ ，质量 m 均匀分布的刚性细杆斜靠在墙角。记杆与竖直方向夹角为 θ 。

(1) 求使杆能在当前位置保持平衡的 θ 的范围。

下面考察杆的滑落，记 $\theta = \theta(t)$ 。设杆原先竖直立于墙角($\theta(0) = 0$)，随后在 $t = 0$ 时刻受到大小合适的扰动，使其获得角速度 $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ 且恰好能滑落，即恰好在 $t > 0$ 时不会再静止斜靠于墙角。

(2) 若 $\mu = 0$ ，求杆脱离竖直墙壁瞬间杆与竖直方向的夹角 θ_{00} 。

(3) 若 $\mu \ll 1$ ，求 ω_0 ，保留到 μ 的最低阶项。

(4) 若 $\mu \ll 1$ ，求杆脱离竖直墙壁瞬间杆与竖直方向的夹角 θ_0 ，保留到 μ 的一阶修正项。

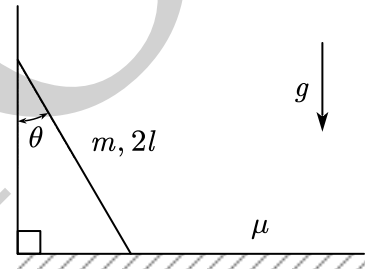


图1.1

二、(40分) 单电子隧穿效应

微纳电子器件中，微小电容存在单电子隧穿效应。当电容器储能与热涨落能量满足 $k_B T \ll \epsilon_C = \frac{q^2}{2C}$ 时，由于量子效应，单电子可以从电容器 C 的一个极板穿越板间的空气隙，到达另一个极板，导致电容的电量“自发地”发生一个电子电量 e 的变化。

(1) 若单电子隧穿后能量升高，则无法发生隧穿。推导两个方向单电子隧穿都无法发生时 q 需满足的条件，即库仑阻塞条件。

(2) 此时外加恒定的偏置电流 I ，忽略隧穿用时，定义电压振荡的振幅为电压最大值和最小值之差的一半，求稳定状态下单电子隧穿结电压振荡振幅 V_A 、周期 T 。

(3) 设单位时间隧穿几率为 $\Gamma = \frac{\Delta \epsilon_C}{e^2 R_T}$ ， $\Delta \epsilon_C$ 为隧穿前后电容器储能的减小量， R_T 与电容器的带电量 q 无关，为一常数。外加恒定偏置电流 I ，求系统稳定后，单电子隧穿结电压 \bar{V} 与 I 的关系，即伏安特性。

三、(40 分) 螺旋过山车

在游乐园中的过山车项目中，经常可以看见过山车的轨道有一竖直的圆，能够给游客带来刺激的体验。现假设该圆形轨道的半径为 R ，圆面的法向垂直于重力方向。设过山车的长度为 πR ，过山车的动力系统对单位长度的过山车的作用力恒定为 a ，方向沿该点的瞬时速度方向。过山车的质量为 m 。过山车质量均匀分布，且轨道能束缚过山车使其不脱离轨道。

(1) 若开始时，过山车静止在水平的轨道上，这条水平轨道末端连接着一个圆轨道，过山车的车头恰好在水平轨道与圆轨道的连接处，已知过山车能够走完整个圆轨道。规定车头的运动方向为正方向。试求整个过程中，过山车车头的切向加速度的最小值 A_{\min} （考虑正负）以及满足条件的 a 的取值范围。注意，要给出 a 与 m, g, R 的数值关系，保留三位小数。

(2) 接上问，已知 a 在上述范围内。求在整个过程（包括起始时间和头部再次到达最低点的时间）中当过山车车头加速度最大时（考虑正负），过山车上靠近车头的前一半中张力最小处对单位长度铁轨的压力 $\frac{dN}{Rd\phi}$ 。并给出 a 取临界值时的具体大小。同样要给出其与 m, g, R 的数值关系，保留三位小数。

四、(40 分) 热透镜效应

热透镜效应是指半导体激光器工作时产生的温度会使晶体表面发生热形变，造成了晶体各部分密度不同，而光在经过不同密度的分界线时发生不同程度的折射，因此就形成了像是光线通过普通透镜一样的折射效果。半导体激光器光束具有与高斯分布相对应的空间剖面，形成不均匀的温度分布即径向的温度梯度变化，中心温度最高，沿径向逐渐降低。半导体激光器工作时高斯光束照射到介质表面，由于光热效应，会使介质中心温度升高并沿径向逐渐降低，温度梯度致使微观粒子产生向外扩散的运动趋势，造成介质各部分密度不同，从而导致介质形成折射率梯度，如图 4.1 所示。

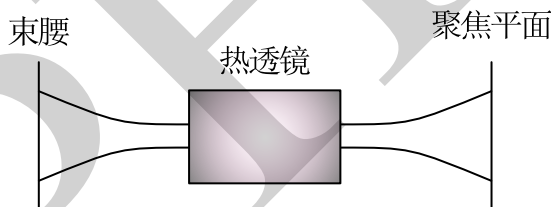


图 4.1

在热透镜效应中，由常数 $\frac{dn}{dT}$ 引起的折射率随温度变化是引起热透镜效应的主要因素，已知等效透镜的焦距为 f ($f \gg r$)，光束通过透镜后，聚焦于焦点 F ，如图 4.2 所示。以样品厚度方向为 z 方向，介质内温度分布为

$$T(r, z) = T_0 \left[1 - \frac{r^2}{f^2} e^{-kz} \right] \quad (4.1)$$

其中 T_0, k 均为已知常数，入射光的波数 $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ 。回答下列问题。

(1) 试求出在薄透镜位置 r 处相对于透镜中心处的相位差 $\Delta\phi_f = \phi(r) - \phi(0)$ 的表达式。

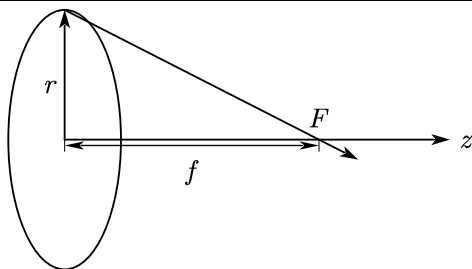


图4.2

(2) $\phi(r)$ 是 r 处光通过薄膜的累积相位差:

$$\phi(r) = \int_0^b \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta n(r, z) dz \quad (4.2)$$

其中 b 为热透镜的样品厚度, $\Delta n(r, z)$ 为距轴心 r 处热致折射率变化, 定义为

$$\Delta n(r, z) = n(r, z) - n(0, z) \quad (4.3)$$

试求出温度梯度产生的热透镜焦距 f 的表达式。

(3) 但是实际实验中考虑到存在环境噪声光波的干扰, 因此采用迈克尔孙干涉仪利用相干光的干涉来消除此干扰, 入射光经分束器分成两束光, 假设分光后每束光的振幅为 A_0 , 它们经过不同的光程 r_1 和 r_2 后相遇并发生干涉, 光束的振幅相等, 空气的折射率 $n = 1$, 初相位相等, 试求出干涉光强 I 关于波长 λ 的函数 $I(\lambda)$ 。

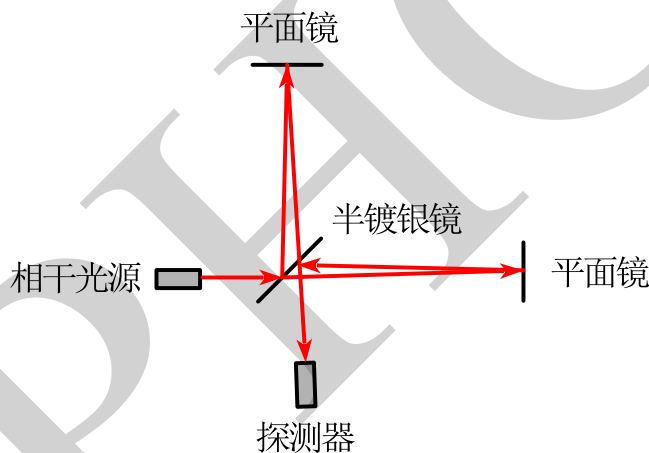


图4.3

五、(40 分) 细导线的相变

长度为 L 的细导线是由可以相变的材料制成的, 它的平均截面面积为 A (各处略有涨落, 且 $L^2 \gg A \gg \Delta A$)。它的电阻率取两个值之一: 如果温度小于 T_c , 则为 ρ ; 如果温度大于 T_c , 则为 2ρ 。单位长度导线在环境中的散热功率为 $w = \alpha(T - T_0)$, 其中 α 是常数, T 表示导线的温度, T_0 是环境温度 ($T_0 < T_c$)。导线的导热率很差, 故可忽略沿导线方向热流, 沿导线方向可以有温度梯度。认为相变过程导线形状不变, 并忽略温差电动势等副效应。

现考虑如下的循环: 导线两端的电压从 0 非常缓慢地增加到 $2V_0$, 然后再缓慢的减小回 0。请在下图中画出总功率随电压变化的曲线, 并在曲线上用箭头标出系统演化的方向。务必在图中标注每段曲线的函数解析式和转折点的坐标。坐标单位采用了无量纲化, 即记 $P_0 =$

$$\alpha L(T_c - T_0) \text{ 以及 } V_0 = L \sqrt{\frac{\alpha \rho (T_c - T_0)}{A}}。$$

注意: 求解正确但未在图中画出或标出的部分不得分。

六、(60 分) 分析光子静质量上限

物理学的许多定律都与光子静质量确切为零密切相关, 例如库仑定律的平方反比律、狭义相对论、规范不变性等等。本题将以 Proca 方程为基础研究非零光子静质量的物理效应, 并以实验为基础估计光子静质量的上限。

首先我们给出光子静质量存在时修正的 Maxwell 方程, 即 Proca 方程:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \mu^2 \varphi \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu^2 \vec{A} \end{cases} \quad (6.1)$$

其中, $\mu = \frac{m_\gamma c}{\hbar}$, m_γ 为光子的静质量。 \vec{A} 为磁矢势, 且满足方程

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (6.2)$$

请依据此方程组解决以下问题。

(1) 证明: 点电荷 q 产生的静电场的电势的表达式为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (6.3)$$

(2) 磁偶极子 \vec{m} 的产生的磁矢势为

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (6.4)$$

(2.1) 请类比第 (1) 问, 求出 Proca 方程体系下的磁偶极子的磁矢势, 并求出磁偶极子产生的磁感应强度。

(2.2) 在第 (2.1) 小问中已经表明, 在地球表面固定的 $r = R$ 处, 地球磁场将出现偶极子角分布, 加上一个明显与 \vec{m} 反平行的恒定外磁场。我们通过卫星和地面观测得出的结论是: 外部磁场与赤道上的偶极子场之比为 539/31089, 据此估算光子静质量上限。已知地球半径为 $R = 6371 \text{ km}$ 。

(2.3) 已知真空中的静磁压强为 $P_0 = \frac{B^2}{2\mu_0}$, 其大小等于磁场的能量密度, 请推导出 Proca 场下的附加压强 P_1 。对宇宙中的一个星系, 实验表明星际气体压强与磁压强 P_0 大致相同, 据此分析求出光子静质量的上限。已知星系尺度 $l \sim 10^{20} \text{ m}$, 这意味着只需考虑磁场。

已知电磁场能量守恒方程为

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \vec{S} - \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (6.5)$$

其中 \vec{S} 为坡印亭矢量, ω 为电磁场的能量密度。

提示, 你可能会用到以下公式:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (6.6)$$

$$\nabla \times (\vec{f} \times \vec{g}) = (\vec{g} \cdot \nabla) \vec{f} + (\nabla \cdot \vec{g}) \vec{f} - (\vec{f} \cdot \nabla) \vec{g} - (\nabla \cdot \vec{f}) \vec{g} \quad (6.7)$$

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{f}) = (\nabla \varphi) \cdot \vec{f} + \varphi \nabla \cdot \vec{f} \quad (6.8)$$

$$(\vec{f} \cdot \nabla) \nabla \frac{e^{-kr}}{r} = [3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{f}) - \vec{f}](1 + kr) \frac{e^{-kr}}{r^3} + \hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{f}) k^2 \frac{e^{-kr}}{r} \quad (6.9)$$

$$\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{g} - \vec{f} \cdot (\nabla \times \vec{g}) \quad (6.10)$$

七、(40 分)

在远离各星体的近似平直时空中，四艘完全相同、静长 $l_0 = 1.25ct_0$ 的飞船 A、B、C、D 按如图 7 的方式作匀速直线运动。其中 c 为真空光速、 t_0 为已知常量。各飞船船体上均固定有两根夹角一定的定位用直杆 x_i 、 y_i ($i = A、B、C、D$ ，以下简称“定位杆”)， x_i 杆沿着各自的船身方向。初始时刻，A、B、C、D 四艘船的船尾 (记作 a_i) 重合。

在不同飞船参考系中观察到的飞船运动情况与定位杆方向为：

- ① 飞船 A 参考系中， y_A 杆与 x_A 杆垂直；
- ② 飞船 A 参考系中，飞船 B 以速度 v 沿 x_A 杆方向运动，B 的两根定位杆与 A 的两杆分别平行；
- ③ 飞船 B 参考系中，飞船 C 以速度 v 沿 y_B 杆方向运动，C 的两根定位杆与 B 的两杆分别平行；
- ④ 飞船 C 参考系中，飞船 D 与飞船 A 保持相对静止，D 的两根定位杆与 C 的两杆分别平行。

(1) 求飞船 C 参考系中观察到的飞船 D 的相对速度 \vec{v}' 。已知 x_C 、 y_C 杆方向的单位矢量为 \hat{x}_C 、 \hat{y}_C

(2) 求飞船 A 参考系中观察到的飞船 D 的两根定位杆的夹角 α 的表达式，并代入 $v = 0.6c$ 计算结果。用角度制表示，保留 4 位有效数字。

(3) 飞船之间通过电磁波相互联络，各船均于船头 (记作 b_i) 接收电磁波，于船尾发射电磁波。在飞船 A 参考系中，将初始时刻记作 $t = 0$ ，已知 $v = 0.6c$ 。从 $t = 0$ 时刻起，各飞船之间按照 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow \dots$ 的顺序发射电磁波联络信号，且在各自飞船的参考系中，接收到前一飞船发射的信号与开始向下一飞船发射信号是同时的。求飞船 A 第一次接收到从 D 发射的信号的时刻。结果中的系数保留 4 位有效数字。

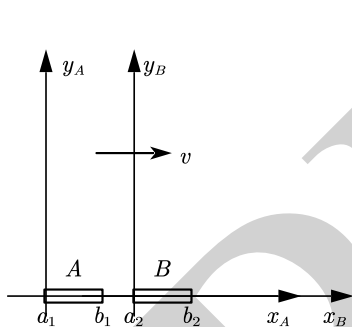


图 7.1

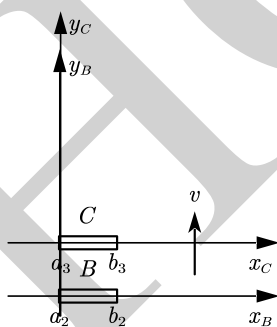


图 7.2

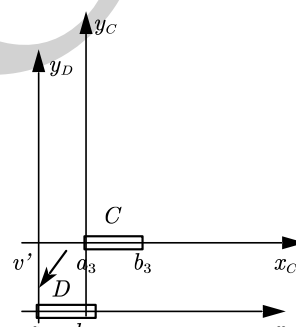


图 7.3