第 15 届 CPHOS 物理竞赛联考

理论试题

考试时间： 2023 年 4 月 22 日 9:00—12:00

命题人：朱信霖 徐嘉珺 史景喆 张天昊
王梓人 杨 旸 杨载文
审题人：陈浩楠 高铭泽 戴正宇 龚俊安
陆伊炀 余博文 李瀚奕

考生必读

1、 考生考试前请务必阅读本须知。
2、 本试题共 7 页，答题卡共 8 页，总分 320 分。
3、 如遇到试题印刷不清楚的情况，请务必向监考老师提出。
4、 需要阅卷老师评阅的内容一定要写在答题纸相应题号后面的空白处；阅卷老师只评阅答题纸上的内容，写在试题纸和草稿纸上的内容一律不被评阅。

一、（40 分）

如图1.1所示，在水平地面上放置一质量M，半径R的空心均匀圆筒。一质量m，半径r的空心均匀小圆筒在该大圆筒中滚动，两圆筒轴的连线与竖直向下方向成夹角θ。圆筒内部有一不计质量的控制装置和引擎保持运转，使得在地面系下小圆筒与大圆筒自转角之差具有恒定时间变化率ω_0。已知所有接触都足够粗糙，且没有滚动摩擦。初态系统静止于平衡状态，控制装置关闭。在$t=0$时启动控制装置，认为在考察范围内圆筒不分离。已知重力加速度为g。

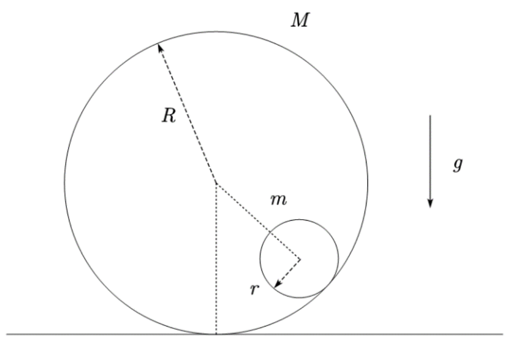


图1.1

（1）求运动过程$\dot{\theta}$与θ的关系。
（2）求解地面提供的支持力N与θ的关系。

解：(1) 假设大圆筒转过角 α，小圆筒转过角 ϕ
纯滚条件：

$$r(\phi+\theta)=R(\alpha+\theta) \tag{1}$$

控制装置：

$$\dot{\phi}-\dot{\alpha}=\omega_0 \tag{2}$$

结合前两式得到

$$\dot{\alpha}=-\dot{\theta}+\frac{r\omega_0}{R-r} \tag{3}$$

设地面给大圆筒向右的摩擦力 f_1，小圆筒给大圆筒顺时针方向的摩擦力 f_2，则水平动量方程：

$$f_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((M+m)\dot{\alpha}R+m(R-r)\dot{\theta}\cos\theta\Big) \tag{4}$$

大圆筒转动方程：

$$(f_2-f_1)R=MR^2\ddot{\alpha} \tag{5}$$

大圆筒平动系中小圆筒平动方程：

$$m(R-r)\ddot{\theta}=f_2-mg\sin\theta-mR\ddot{\alpha}\cos\theta \tag{6}$$

联立以上各式，得到关于 θ 的微分方程：

$$mg\sin\theta-m(2R-r)\ddot{\theta}\cos\theta+(2M+m)R\ddot{\theta}+m(R-r)\ddot{\theta}+m(R-r)\dot{\theta}^2\sin\theta=0 \tag{7}$$

利用

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}\theta}=\ddot{\theta}$$

得到分离变量后的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{(R-r)\dot{\theta}^2+g}=-\frac{2\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\left(2+\frac{2M}{m}\right)R-r-(2R-r)\cos\theta} \tag{8}$$

积分得到

$$\frac{1}{R-r}\ln\frac{(R-r)\dot{\theta}^2+g}{(R-r)\dot{\theta}_0^2+g}=-\frac{2}{2R-r}\ln\frac{\left(2+\frac{2M}{m}\right)R-r-(2R-r)\cos\theta}{\left(2+\frac{2M}{m}\right)R-r-(2R-r)} \tag{9}$$

由于初始时大圆筒相对于与地面接触的点不受到力矩，因此

$$\dot{\alpha}_0=0 \tag{10}$$

于是

$$\dot{\theta}_0=\frac{r\omega_0}{R-r} \tag{11}$$

得到

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{-g+\left(\frac{r^2\omega_0^2}{R-r}+g\right)\left(\frac{(2+2M/m)R-r-(2R-r)\cos\theta}{2MR/m}\right)^{-\frac{2(R-r)}{2R-r}}}{R-r}} \tag{12}$$

（2）由（1）可计算出

$$\ddot{\theta}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{m\sin\theta}{2MR}\left(g+\frac{r^2\omega_0^2}{R-r}\right)\left(\frac{(2+2M/m)R-r-(2R-r)\cos\theta}{2MR/m}\right)^{-\frac{2(R-r)}{2R-r}-1} \tag{13}$$

由竖直方向的动量方程

$$N-(m+M)g\ =\ m(R-r)\left(\dot{\theta}^2\cos\theta+\ddot{\theta}\sin\theta\right) \tag{14}$$

最终得到

$$\begin{aligned}N=&(m+M)g\\&+m(R-r)\left(\frac{-g+\left(\frac{r^2\omega_0^2}{R-r}+g\right)\left(\frac{(2+2M/m)R-r-(2R-r)\cos\theta}{2MR/m}\right)^{-\frac{2(R-r)}{2R-r}}}{R-r}\cos\theta\right.\\&\left.-\frac{m\sin^2\theta}{2MR}\left(g+\frac{r^2\omega_0^2}{R-r}\right)\left(\frac{(2+2M/m)R-r-(2R-r)\cos\theta}{2MR/m}\right)^{-\frac{2(R-r)}{2R-r}-1}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 30 分：（2）（4）（5）（10）（11）式各 2 分，（3）（6）（7）（8）式各 3 分；（9）（12）各 4 分。

第（2）问 10 分：（13）（14）式各 3 分，（15）式 4 分。

二、（40 分）磁场与转动参考系的等效

设空间中存在电场$\vec{E}$和匀强磁场$\vec{B}$。某惯性系S中以某点O为原点建立柱坐标系$\{r,\theta,z\}$，使得磁感应强度为$\vec{B}=B\hat{z}$（其中$\hat{z}$是z方向的单位矢量）。设在此惯性系内有一个质量为m、带电量为$q>0$的质点在平面$z=0$中运动，其位置矢量记为$\vec{r}(t)$，速度矢量记为$\vec{v}'$。所有讨论都只考虑电磁力并且忽略相对论效应。

（1）请写出矢量形式的质点运动方程。

（2）洛伦兹力项的形式让我们联想到科里奥利力，本问尝试探究二者之间的关联。

（2.1）假设空间中存在一转动非惯性系，考察该非惯性系下的一个质点。用$\vec{v}'$表示质点相对转动参考系的速度，用$\vec{\Omega}$及$\dot{\vec{\Omega}}$表示非惯性系的角速度和角加速度。认为不同的参考系原点始终重合，则在该非惯性系下质点受到的惯性力有哪几种？分别写出它们的名称和矢量表达式。

（2.2）求一个合适的角速度$\vec{\omega}$，使得在该角速度转动的非惯性参考系下，质点受到的科里奥利力与（1）中质点受到的洛伦兹力不论形式上还是数值上完全等同。

（3）上述讨论启发我们把磁场所在的惯性系S看成一个转动非惯性系K'，将洛伦兹力等效为非惯性系下质点受到的科里奥利力，从而可以转换到与K'相对应的惯性系K（K'与K的原点始终重合）中讨论任何可能遇到的问题——这样做有时是方便的。完成从K'到K的参考系变换，给出K系中矢量形式的质点运动方程。

提示：从惯性系转换到非惯性系，运动方程中需要引入惯性力——这里是从非惯性系转换到惯性系，运动方程中应当减去惯性力。

（4）利用以上方法解决以下问题：保持原题干条件，额外给出电场$\vec{E}$对应的电势分布

$$V=\frac{1}{2}\frac{k}{q}r^2 \tag{2.1}$$

其中k是常数，$r=|\vec{r}|$，质点在这样的电磁场中做半径为R的匀速圆周运动。

（4.1）在原惯性系S中求匀速圆周运动的角速度$\dot{\theta}$。

（4.2）在匀速圆周运动的平面内给质点一个径向的小扰动，在（3）中所说的K系中求径向小振动的角频率。

解：（1）矢量形式的质点运动方程为

$$m\ddot{\vec{r}}=q\left(\vec{E}+\vec{v}'\times\vec{B}\right) \tag{1}$$

带入$\vec{E}=-\nabla V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$或$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$也算对。

（2.1）还有 3 种：

惯性离心力（或离心力）

$$\vec{F}_C=-m\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)=-m\Omega^2\vec{r} \tag{2}$$

切向惯性力

$$\vec{F}_\tau=-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r} \tag{3}$$

科里奥利力（或科氏力）

$$\vec{F}_{Cor}=-2m\vec{\Omega}\times\vec{v}' \tag{4}$$

由于认为不同参考系原点始终重合，这里没有平动惯性力，也没有区分$\vec{r}$和$\vec{r}'$，但如果把（2）（3）中的$\vec{r}$写成$\vec{r}'$也算对；不写“$\vec{F}_C=$”，“$\vec{F}_\tau=$”和“$\vec{F}_{Cor}=$”不算错

（2.2）令

$$q\vec{v}'\times\vec{B}\equiv 2m\vec{v}'\times\vec{\Omega} \tag{5}$$

显然可以取

$$\vec{\Omega}=\frac{q}{2m}\vec{B} \tag{6}$$

（3）注意到

$$-q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{1}{2}q\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}\times\vec{r}\right)=-\frac{1}{2}q\dot{\vec{B}}\times\vec{r}=-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r} \tag{7}$$

这里没有$\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}$项是因为应该先求出$\vec{r}$处的$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$（此时$\vec{r}$不是质点的位矢）再代入运动方程（此时$\vec{r}$才是质点的位矢）

把（5）（7）代入（1），S系即K'系中矢量形式的运动方程可以写为

$$m\ddot{\vec{r}}=-q\nabla V-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}--2m\vec{\Omega}\times\vec{v}'$$

$$=-q\nabla V+m\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)-m\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}--2m\vec{\Omega}\times\vec{v}' \tag{8}$$

变换参考系，减去惯性力得到K系中矢量形式的运动方程

$$m\ddot{\vec{r}}=-q\nabla V+m\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)=-q\nabla V-m\Omega^2\vec{r} \tag{9}$$

这里同样没有区分$\vec{r}$和$\vec{r}'$（特别注意左边的加速度）

（4.1）理所当然地取θ增大方向为$\dot{\theta}$的正方向，在极坐标系中写出运动方程

$$m\left(-R\dot{\theta}^2\right)=-q\frac{k}{q}R+qR\dot{\theta}B \tag{10}$$

解得

$$\dot{\theta}=-\omega\pm\sqrt{\omega^2+\frac{k}{m}}=-\frac{qB}{2m}\pm\sqrt{(\frac{qB}{2m})^2+\frac{k}{m}} \tag{11}$$

（4.2）设K系中极坐标的角度为φ，则

$$\dot{\varphi}_0=\dot{\theta}+\Omega \tag{12}$$

其中，$\dot{\varphi}_0$是径向扰动前的角速度

径向扰动后，取$r=R+\delta$，K系中极坐标系下的运动方程为

$$m\left(\ddot{\delta}-(R+\delta)\dot{\varphi}^2\right)=-k(R+\delta)-m\omega^2(R+\delta) \tag{13}$$

由于扰动是径向的，角动量守恒

$$mR^2\dot{\varphi}_0=m(R+\delta)^2\dot{\varphi} \tag{14}$$

考虑到$|\delta|\ll R$，把（14）代入（13）并取一级近似得到小振动方程

$$\ddot{\delta}+4{\dot{\varphi}_0}^2\delta=0 \tag{15}$$

小振动角频率即为

$$\omega=2|\dot{\varphi}_0|=2\sqrt{\left(\frac{qB}{2m}\right)^2+\frac{k}{m}} \tag{16}$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 2 分；

第（2）问 12 分：

第（2.1）小问 7 分：回答“3”占 1 分，三种惯性力的名称各 1 分，表达式各 1 分；

第（2.2）小问 5 分：（5）式 2 分，（6）式 3 分；

第（3）问 8 分：（7）（9）式各 3 分，（8）式 2 分；

第（4）问 18 分：

第（4.1）小问 6 分：（10）式 3 分，（11）式 3 分；

第（4.2）小问 12 分：（12）（16）式各 3 分，（13）（14）（15）式各 2 分。

三、（60 分）冰淇淋双球的瓦解

【请将各答案写在对应答题卡区域，否则作答无效】

小明爱吃冰淇淋双球，不幸的是上面一个冰淇淋球开始滚落，现建立模型讨论这个问题。如图3.1所示，空间中固定一个绝对粗糙的大球体，其半径为R。大球上放置一个均匀小球，半径为$r<R$，质量为m。重力加速度为g。我们使用球坐标系，约定大球球心为原点，极轴$\theta=0$竖直向上。假设某一时刻小球球心位于(R,θ,φ)，且具有角速度$\vec{\omega}=\omega_r\hat{r}+\omega_\theta\hat{\theta}+\omega_\varphi\hat{\varphi}$。设摩擦力$\vec{f}=f_\theta\hat{\theta}+f_\varphi\hat{\varphi}$，支持力$\vec{N}=N\hat{r}$。

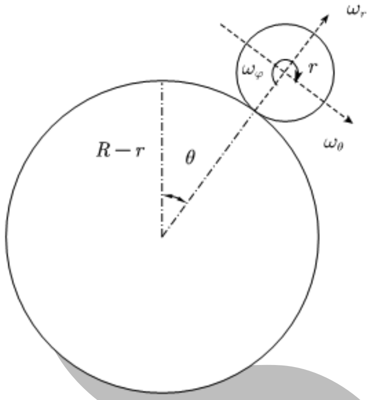


图3.1

本题第（1）问请在答题纸第 3 页作答

（1）接下来，我们求解小球的运动：

（1.1）基矢量$\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi}$依赖于小球的位置，导出基矢量随时间的变化率，用$\theta,\varphi,\dot{\theta},\dot{\varphi}$及基矢量表达。

（1.2）根据小球受力、约束，消去$\omega_\theta,\omega_\varphi$，给出小球运动的微分方程。

（1.3）找出小球的全部非平凡守恒量并加以证明。

本题第（2）问请在答题纸第 4 页作答

（2）初态，小球位于大球球顶$(R,0,0)$，角速度$\vec{\omega}=\omega_r\hat{r}$，质心相对大球静止。小球受到一个微扰，沿$\varphi=0$对应的子午线下滚。

（2.1）解出$\dot{\varphi},\dot{\theta}$以及支持力$N$关于$\theta$的函数。

（2.2）当ω_r达到一定大小后球会始终在停留在大球球面，不会脱离。解出这个临界角速度ω_{rc}，并写出当$\omega_r>\omega_{rc}$时，θ的最大值$\theta_{\max}(\omega_r)$。

（2.3）接上问，当ω_r再大一些时，微扰将不足以让小球自发离开球顶。求达到这种模式的第二临界角速度ω_{rc}'。

说明：解一将大球半径以图中所标注$\boldsymbol{R-r}$为准，解二以题干描述$\boldsymbol{R}$为准，两种答案均认可。

解一：（1）（1.1）不难求出基矢量关于时间的导数：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta}\hat{\theta}+\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{\varphi}\tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}=-\dot{\theta}\hat{r}+\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{\varphi}\tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\varphi}}{\mathrm{d}t}=-\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{r}-\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{\theta}\tag{3}$$

（1.2）质心加速度为：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\theta}\hat{\theta}+\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{\varphi}\right)$$
$$=-R\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r}+R\left(\ddot{\theta}-\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta}+R\left(\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\hat{\varphi}\tag{4}$$

由质心运动定理：

$$f_\theta+mg\sin\theta=mR\ddot{\theta}-mR\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\tag{5}$$
$$f_\varphi=mR\ddot{\varphi}\sin\theta+2mR\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\tag{6}$$
$$N=mg\cos\theta-mR\dot{\theta}^2-mR\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\tag{7}$$

考察小球相对质心的角动量变化：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2}{5}mr^2\left(\omega_r\hat{r}+\omega_\theta\hat{\theta}+\omega_\varphi\hat{\varphi}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{5}mr^2\left[\left(\dot{\omega_r}-\omega_\theta\dot{\theta}-\omega_\varphi\dot{\varphi}\sin\theta\right)\hat{r}+\left(\omega_r\dot{\theta}+\dot{\omega_\theta}-\omega_\varphi\dot{\varphi}\cos\theta\right)\hat{\theta}+\left(\omega_r\dot{\varphi}\sin\theta+\omega_\theta\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\omega_\varphi}\right)\hat{\varphi}\right]\quad(8)$$

由力矩的定义：

$$\vec{M}=(-r\hat{r})\times\vec{f}=rf_\varphi\hat{\theta}-rf_\theta\hat{\varphi}\tag{9}$$

由纯滚约束：

$$R\dot{\theta}-r\omega_\varphi=0\tag{10}$$

$$R\dot{\varphi}\sin\theta+r\omega_\theta=0\tag{11}$$

以及角动量定理：

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\tag{12}$$

代入，最终可以解得

$$\dot{\omega}_r=0\tag{13}$$

$$2r\omega_r\dot{\theta}-7R\ddot{\varphi}\sin\theta-14R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta=0\tag{14}$$

$$2r\omega_r\dot{\varphi}\sin\theta-7R\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta+7R\ddot{\theta}=5g\sin\theta\tag{15}$$

（1.3）由（13）式，我们显然有：

$$\omega_r=\text{Const.}\tag{16}$$

将（14）式乘以$-\sin\theta$，可以得到：

$$-2r\omega_r\dot{\theta}\sin\theta+7R\ddot{\varphi}\sin^2\theta+14R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta=0\tag{17}$$

也就是：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2r\omega_r\cos\theta+7R\dot{\varphi}\sin^2\theta\right)=0\tag{18}$$

这说明：

$$2r\omega_r\cos\theta+7R\dot{\varphi}\sin^2\theta=\text{Const.}\tag{19}$$

此为第二个守恒量。
接下来证明能量守恒：

$$E=\frac{1}{5}mr^2\omega_r^2+\frac{7}{10}mR^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)+mgR\cos\theta\tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{7}{5}mR^2\left(\dot{\theta}\ddot{\theta}+\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\sin^2\theta+\dot{\theta}\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)-mgR\dot{\theta}\sin\theta\tag{21}$$

代入并结合（14）与（15）式：

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=mR\dot{\theta}\sin\theta\left(g-\frac{2}{5}r\omega_r\dot{\varphi}+\frac{7}{5}R\dot{\varphi}^2\cos\theta\right)+\frac{7}{5}mR^2\sin\theta\left(\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\sin\theta+\dot{\theta}\dot{\varphi}^2\cos\theta\right)-mgR\dot{\theta}\sin\theta$$

$$=mR\dot{\varphi}\sin\theta\left(-\frac{2}{5}r\omega_r\dot{\theta}+\frac{14}{5}R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta+\frac{7}{5}R\ddot{\varphi}\sin\theta\right)=0\tag{22}$$

故能量守恒。（注：直接说明摩擦力不做功代替（22）式，也可以）
故我们可得到三个守恒量：

$$\omega_r;\ E;\ 2r\omega_r\cos\theta+7R\dot{\varphi}\sin^2\theta$$

（注：其余的各种形式，只要是独立的三个量，且由以上三个量进行代数运算得到，均可被视为有效的答案）
（2.1）由守恒量$2r\omega_r\cos\theta+7R\dot{\varphi}\sin^2\theta$以及初态：

$$2r\omega_r\cos\theta+7R\dot{\varphi}\sin^2\theta=2r\omega_r\tag{23}$$

由机械能守恒：

$$\frac{7}{10}R\left(\dot{\theta}^2+\frac{4r^2\omega_r^2(1-\cos\theta)^2}{49R^2\sin^2\theta}\right)=g(1-\cos\theta) \tag{24}$$

解得：

$$\dot{\varphi}=\frac{2r\omega_r(1-\cos\theta)}{7R\sin^2\theta} \tag{25}$$

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{10g}{7R}(1-\cos\theta)-\frac{4r^2\omega_r^2(1-\cos\theta)^2}{49R^2\sin^2\theta}} \tag{26}$$

由（8）式可得：

$$N=mg\cos\theta-\frac{10mg}{7}(1-\cos\theta)=mg\left(\frac{17}{7}\cos\theta-\frac{10}{7}\right) \tag{27}$$

（2.2）临界状态下有

$$\theta_{\max}(\omega_{rc})=\arccos\frac{10}{17} \tag{28}$$

当$\theta=\theta_{\max}$时$\dot{\theta}=0$，也就是：

$$\frac{10g}{7R}(1-\cos\theta_{\max})-\frac{4r^2\omega_r^2(1-\cos\theta_{\max})^2}{49R^2\sin^2\theta_{\max}}=0 \tag{29}$$

解得：

$$\omega_r=\sqrt{\frac{35gR\sin^2\theta_{\max}}{2r^2(1-\cos\theta_{\max})}}=\sqrt{\frac{35gR}{2r^2}(1+\cos\theta_{\max})} \tag{30}$$

代入得：

$$\omega_{rc}=\sqrt{\frac{945gR}{34r^2}}\approx 5.272\frac{\sqrt{gR}}{r} \tag{30}$$

另外我们也有：

$$\theta_{\max}(\omega_r)=\arccos\left(\frac{2r^2\omega_r^2}{35gR}-1\right) \tag{31}$$

（2.3）第二临界对应$\theta_{\max}=0$，也即：

$$\frac{2r^2{\omega'_{rc}}^2}{35gR}-1=1 \tag{32}$$

解得：

$$\omega'_{rc}=\frac{\sqrt{35gR}}{r}\approx 5.916\frac{\sqrt{gR}}{r} \tag{33}$$

解二：（1）（1.1）不难求出基矢量关于时间的导数：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\theta}\hat{\theta}+\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{\varphi} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}=-\dot{\theta}\hat{r}+\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{\varphi} \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\varphi}}{\mathrm{d}t}=-\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{r}-\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{\theta} \tag{3}$$

（1.2）质心加速度为：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=(R+r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\theta}\hat{\theta}+\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{\varphi}\right)$$

$$=-(R+r)\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r}+(R+r)\left(\ddot{\theta}-\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta}+(R+r)\left(\ddot{\varphi}\sin\theta+2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\hat{\varphi}\tag{4}$$

由质心运动定理：

$$f_\theta+mg\sin\theta\ =m(R+r)\ddot{\theta}-m(R+r)\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\tag{5}$$

$$f_\varphi=m(R+r)\ddot{\varphi}\sin\theta+2m(R+r)\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\tag{6}$$

$$N=mg\cos\theta-m(R+r)\dot{\theta}^2-m(R+r)\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\tag{7}$$

考察小球相对质心的角动量变化：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2}{5}mr^2\left(\omega_r\hat{r}+\omega_\theta\hat{\theta}+\omega_\varphi\hat{\varphi}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{5}mr^2\left[\left(\dot{\omega}_r-\omega_\theta\dot{\theta}-\omega_\varphi\dot{\varphi}\sin\theta\right)\hat{r}+\left(\omega_r\dot{\theta}+\dot{\omega}_\theta-\omega_\varphi\dot{\varphi}\cos\theta\right)\hat{\theta}+\left(\omega_r\dot{\varphi}\sin\theta+\omega_\theta\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\omega}_\varphi\right)\hat{\varphi}\right]\tag{8}$$

由力矩的定义：

$$\vec{M}=(-r\hat{r})\times\vec{f}=rf_\varphi\hat{\theta}-rf_\theta\hat{\varphi}\tag{9}$$

由纯滚约束：

$$(R+r)\dot{\theta}-r\omega_\varphi=0\tag{10}$$

$$(R+r)\dot{\varphi}\sin\theta+r\omega_\theta=0\tag{11}$$

以及角动量定理：

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\tag{12}$$

代入，最终可以解得

$$\dot{\omega}_r=0\tag{13}$$

$$2r\omega_r\dot{\theta}-7(R+r)\ddot{\varphi}\sin\theta-14(R+r)\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta=0\tag{14}$$

$$2r\omega_r\dot{\varphi}\sin\theta-7(R+r)\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta+7(R+r)\ddot{\theta}=5g\sin\theta\tag{15}$$

（1.3）由（13）式，我们显然有：

$$\omega_r=\mathrm{Const.}\tag{16}$$

将（14）式乘以$-\sin\theta$，可以得到：

$$-2r\omega_r\dot{\theta}\sin\theta+7(R+r)\ddot{\varphi}\sin^2\theta+14(R+r)\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta=0\tag{17}$$

也就是：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2r\omega_r\cos\theta+7(R+r)\dot{\varphi}\sin^2\theta\right)=0\tag{18}$$

这说明：

$$2r\omega_r\cos\theta+7(R+r)\dot{\varphi}\sin^2\theta=\mathrm{Const.}\tag{19}$$

此为第二个守恒量。

接下来证明能量守恒：

$$E=\frac{1}{5}mr^2\omega_r^2+\frac{7}{10}m(R+r)^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)+mg(R+r)\cos\theta\tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{7}{5}m(R+r)^2\left(\dot{\theta}\ddot{\theta}+\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\sin^2\theta+\dot{\theta}\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)-mg(R+r)\dot{\theta}\sin\theta\tag{21}$$

代入并结合（14）与（15）式：

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=m(R+r)\dot{\theta}\sin\theta\left(g-\frac{2}{5}r\omega_r\dot{\varphi}+\frac{7}{5}(R+r)\dot{\varphi}^2\cos\theta\right)$$

$$+\frac{7}{5}m(R+r)^2\sin\theta\left(\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\sin\theta+\dot{\theta}\dot{\varphi}^2\cos\theta\right)-mg(R+r)\dot{\theta}\sin\theta$$

$$= m(R+r)\dot{\varphi}\sin\theta\left(-\frac{2}{5}r\omega_r\dot{\theta}+\frac{14}{5}(R+r)\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta+\frac{7}{5}(R+r)\ddot{\varphi}\sin\theta\right)=0 \tag{22}$$

故能量守恒。（注：直接说明摩擦力不做功代替（22）式，也可以）

故我们可得到三个守恒量：

$$\omega_r;\ E;\ 2r\omega_r\cos\theta+7(R+r)\dot{\varphi}\sin^2\theta$$

（注：其余的各种形式，只要是独立的三个量，且由以上三个量进行代数运算得到，均可被视为有效的答案）

（2.1）由守恒量$2r\omega_r\cos\theta+7(R+r)\dot{\varphi}\sin^2\theta$以及初态：

$$2r\omega_r\cos\theta+7(R+r)\dot{\varphi}\sin^2\theta=2r\omega_r \tag{23}$$

由机械能守恒：

$$\frac{7}{10}(R+r)\left(\dot{\theta}^2+\frac{4r^2\omega_r^2(1-\cos\theta)^2}{49(R+r)^2\sin^2\theta}\right)=g(1-\cos\theta) \tag{24}$$

解得：

$$\dot{\varphi}=\frac{2r\omega_r(1-\cos\theta)}{7(R+r)\sin^2\theta} \tag{25}$$

$$\dot{\theta}=\sqrt{\frac{10g}{7(R+r)}(1-\cos\theta)-\frac{4r^2\omega_r^2(1-\cos\theta)^2}{49(R+r)^2\sin^2\theta}} \tag{26}$$

由（8）式可得：

$$N=mg\cos\theta-\frac{10mg}{7}(1-\cos\theta)=mg\left(\frac{17}{7}\cos\theta-\frac{10}{7}\right) \tag{27}$$

（2.2）临界状态下有

$$\theta_{\max}(\omega_{rc})=\arccos\frac{10}{17} \tag{28}$$

当$\theta=\theta_{\max}$时$\dot{\theta}=0$，也就是：

$$\frac{10g}{7(R+r)}(1-\cos\theta_{\max})-\frac{4r^2\omega_r^2(1-\cos\theta_{\max})^2}{49(R+r)^2\sin^2\theta_{\max}}=0 \tag{29}$$

解得：

$$\omega_r=\sqrt{\frac{35g(R+r)\sin^2\theta_{\max}}{2r^2(1-\cos\theta_{\max})}}=\sqrt{\frac{35g(R+r)}{2r^2}(1+\cos\theta_{\max})} \tag{30}$$

代入得：

$$\omega_{rc}=\sqrt{\frac{945g(R+r)}{34r^2}}\approx 5.272\frac{\sqrt{g(R+r)}}{r} \tag{30}$$

另外我们也有：

$$\theta_{\max}(\omega_r)=\arccos\left(\frac{2r^2\omega_r^2}{35g(R+r)}-1\right) \tag{31}$$

（2.3）第二临界对应$\theta_{\max}=0$，也即：

$$\frac{2r^2{\omega'_{rc}}^2}{35g(R+r)}-1=1 \tag{32}$$

解得：

$$\omega'_{rc}=\frac{\sqrt{35g(R+r)}}{r}\approx 5.916\frac{\sqrt{g(R+r)}}{r} \tag{33}$$

评分标准：本题满分 60 分。

第（1）问 37 分：

第（1.1）小问 6 分：（1）（2）（3）式各 2 分；

第（1.2）小问 18 分：（4）（5）（6）（7）（8）（13）（14）（15）式各 2 分，（10）（11）式各 1 分；

第（1.3）小问 13 分：（16）（17）（19）（20）（22）式各 2 分，（18）式 3 分。（守恒量的 16、19、20 三式可以替换为其余形式，分值均为一个 2 分）

第（2）问 23 分：

第（2.1）问 9 分：（23）式 2 分，（24）式 1 分，（25）（26）（27）式 2 分；

第（2.2）问 10 分：（28）（29）（30）（31）（32）式 2 分；

第（2.3）问 4 分：（33）（34）式 2 分。

四、（40 分）

在一块薄板的一面涂上一层化学性质活泼的涂层，该涂层会与O_2发生反应。认为反应后O_2附着在板上，而未反应的部分则与板发生完全弹性碰撞。设氧气分子每次碰在涂层上发生反应的概率为q。O_2分子的质量为m，空气温度为T，重力加速度为g。为方便考虑，假设空气仅由O_2组成，数密度n。

已知，在初始时，将板涂层朝上静止释放，此时板具有向上的加速度$0.5g$。但它不会一直向上加速运动，事实上，板向上的速度会有一个最大值。对此，A、B 两同学有不同看法。

A 认为：板向上运动，受空气阻力，加速被抑制；

B 认为：板吸收O_2，自重增加，加速度减小。

请你通过计算这两种观点下板向上运动的最大速度v_{max}来评价这两种观点，当你考虑一种效应时，不妨忽略另一种效应，并描述出板大致的运动情况。

提示：你无需考虑O_2的分布受重力的影响，对本题而言$q \ll 1$，板的运动速度$v \ll \sqrt{\frac{k_BT}{m}}$。

已知理想气体分子的麦克斯韦速度分布及速率分布为

$$f(v_x)\mathrm{d}v_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}}\,\mathrm{e}^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT}}\mathrm{d}v_x \tag{4.1}$$

$$F(v)\mathrm{d}v = 4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}\mathrm{d}v \tag{4.2}$$

可能用到的积分公式：

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{4.3}$$

解：由加速度为$\frac{g}{2}$，得到：

$$\frac{1}{2}Mg = -Mg + F_{gas} \tag{1}$$

式中F_{gas}为气体所给的合力

$$\begin{aligned} F_{gas} &= \left(nkT - n\int_0^\infty f(v_x)(2-q)mv_x^2\mathrm{d}v_x\right)S \\ &= \frac{1}{2}qnkTS \end{aligned} \tag{2}$$

考虑 A 和 B 两种情况：

对于 A，考虑空气阻力。

重新计算压强，记：$\bar{v}=\sqrt{\frac{\pi kT}{8m}}$ ，以下计算保留到 $\frac{v}{\bar{v}}$ 的一阶项。下方受到压力：

$$F_1=Sn\int_0^{\infty}f(v_x)2m(v_x-v)^2\mathrm{d}v_x$$
$$=nkTS-nmv\bar{v}S \tag{3}$$

同理上方压力为

$$F_2=\frac{2-q}{2}(nkTS+nmv\bar{v}S) \tag{4}$$

由受力平衡得到

$$F_1-F_2=mg \tag{5}$$

解得

$$v_{\max}=\frac{q}{4-q}\sqrt{\frac{\pi kT}{8m}} \tag{6}$$

对于 B，考虑质量增加。吸附质量$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=qS\cdot\frac{1}{4}n\bar{v}\cdot m$为常数，记作$\alpha$。则

$$M(t)=M_0+\alpha t \tag{7}$$

动力学方程：

$$\frac{1}{2}qnkTS-Mg=\frac{\mathrm{d}(Mv)}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

积分得到

$$v=\frac{(M_0-\alpha t)gt}{2(M_0+\alpha t)} \tag{9}$$

得到过程中速度最大值

$$v=\frac{16(3+2\sqrt{2})}{3\pi}\bar{v}$$
$$=\frac{16(3+2\sqrt{2})}{3\pi}\sqrt{\frac{\pi kT}{8m}} \tag{10}$$

由于q远小于 1，得到 A 情况为主要的制约情况。
板大致的运动为：迅速达到 A 中的速度最大值，而后缓慢减速直至反向运动。

评分标准：本题满分 40 分。
（1）式 2 分，（2）式 4 分；
看法 A 的分析共 14 分：（3）（4）（5）式各 3 分，（6）式 5 分；
看法 B 的分析共 14 分：（7）（8）（9）式各 3 分，（10）式 5 分；
给出情况 A 占主导的结论 3 分（无分析过程直接给出结果不得分），大致描述板的运动 3 分。

五、（40 分）波前变换

对于光波，最开始人们从物理现象得知光传播时遇到障碍时发生偏离几何光学的传播行径。后来对其有了更深入的解释，采用标量复振幅来近似描述光场，将衍射的本质归结于波前形式的改变。

惠更斯原理指出，对于传播中的波，可取任何波面，看作是次波源；次波源产生的次波叠加，可以推出波以后的传播行为。理论上，具体的计算需有基尔霍夫积分公式给出。但是，这条原理其实暗含了“唯一性原理”：如果我们猜出了一种合理的解，那么此解就是唯一正

确的解。

本题约定相位为$\varphi=\vec{k}\cdot\vec{r}$ ，时间因子不影响，故忽略。

（1）先探讨一些常见光现象的波面相位分布，取波面为xOy平面。

（1.1）如图5.1所示，设光波波长为λ，约定平面上坐标原点的相位为φ_0；x轴平行于纸面，y轴垂直于纸面。图5.2中标识了等相位面在xOz平面的投影，平面波等相位面与x轴的夹角为θ，球面波的波源位于$(0,0,-l)$。分别写出平面波和发散球面波（不考虑傍轴条件）在波面上的相位分布，最终答案使用$x,y,\lambda,\varphi_0,l,\theta$表示。

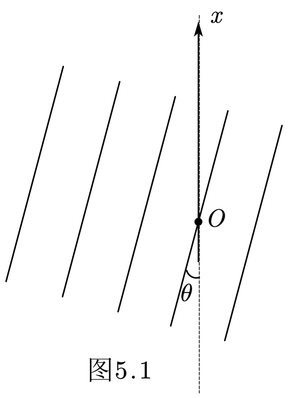


图5.1

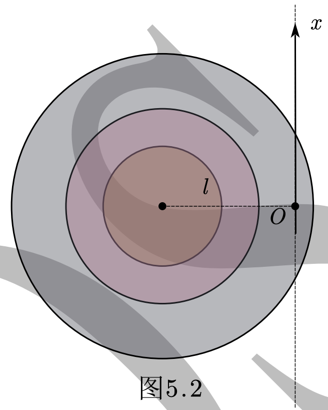


图5.2

（1.2）如图5.3所示，考虑一个薄透镜，折射率为n，左侧曲率半径为r_1（圆心在右为正），右侧曲率半径为r_2（圆心在左为正），在透镜左侧光轴上距离光心u处放置一个点光源，紧贴透镜右侧、垂直于光轴的平面为波面。计算傍轴条件下波面的相位分布，不需要考虑透镜的半径有限带来的影响。

（1.3）在（1.2）的基础上，我们得出了透镜后波面的相位分布，忽略振幅分布可能带来的影响，分析透镜后光的传播形式，据此推理薄透镜的成像公式。

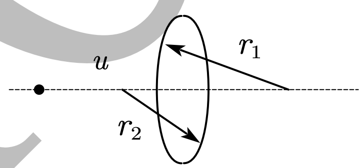


图5.3

（2）光栅的衍射场

对于部分光学元件，其工作区间为一个足够薄的屏，对于透过屏的光，其复振幅将乘上一个透射率因子。屏函数$\tilde{t}(x,y)$即可完全描述此类元件的全部特性：透射率$\tilde{t}=\frac{\tilde{U}_{out}}{\tilde{U}_{in}}$。注意透射率可以是复数，表示附加一个相位。

试想光均匀垂直地照在屏上，若能把透过屏的波面复振幅写成若干平面波复振幅的叠加，根据“唯一性原理”，屏后的光场就恰为这些平面波。

接下来，我们将研究光栅的衍射效应。光栅的屏函数是周期性的，例如一维光栅的空间周期为d，其屏函数可以表述为

$$\tilde{t}(x)=\tilde{t}(x+md),m=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{5.1}$$

在式（5.1）的基础上，傅立叶级数理论指出，屏函数总可表述为

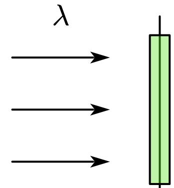


图5.4

$$\tilde{t}(x)=t_0+\Sigma_{n\neq0}\tilde{t}_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f_n x},f_n=nf_1=\frac{n}{d}(n\in Z^+) \tag{5.2}$$

同时，利用

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x = 0 \tag{5.3}$$

其中m是任意整数。依式（5.3）和一些数学计算，就可以得出所有的展开系数$\widetilde{t_n}$。

（2.1）如图5.4，考虑一束波长为λ，振幅为A_0的平面波，在其传播方向上放置有一块余弦光栅，屏函数（透射率）表达式为

$$\tilde{t}(x,y) = t_0 + t_1\cos(2\pi fx + \varphi_0) \tag{5.4}$$

请写出光栅后平面波不同成分的振幅与传播方向（即与光栅法线的夹角）。

（2.2）考虑一个矩形相位光栅，空间周期为d，在某个周期内屏函数为

$$\tilde{t}(x) = \begin{cases} 1, |x| < \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{1}{2}, \dfrac{a}{2} < |x| < \dfrac{d}{2} \end{cases} \tag{5.5}$$

一束波长为λ，振幅为A_0的平面波垂直地照在光栅上，请写出光栅后平面波不同成分的振幅与传播方向。

解：（1）（1.1）对于平面波，相位分布为

$$\varphi(x,y) = \varphi_0 - kx\sin\theta = \varphi_0 - \frac{2\pi x\sin\theta}{\lambda} \tag{1}$$

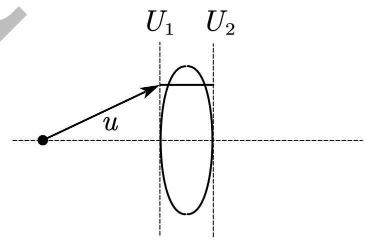
对于球面波，相位分布为

$$\varphi(x,y) = \varphi_0 + k\left(\sqrt{l^2+x^2+y^2} - l\right) = \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}\left(\sqrt{l^2+x^2+y^2} - l\right) \tag{2}$$

在傍轴情况下可作近似

$$\varphi(x,y) \approx \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{x^2+y^2}{2l} = \varphi_0 + \frac{\pi}{\lambda l}(x^2+y^2) \tag{3}$$

（1.2）因为是考虑傍轴情况，所以$u \gg \sqrt{x^2+y^2}$。我们的目标是计算U_2平面上的相位分布进而推测后方的光场，可以分步进行先计算U_1平面上的相位分布。



$$\varphi_1(x,y) = k\frac{x^2+y^2}{2u} \tag{4}$$

在U_1平面与U_2平面之间，由于是傍轴情况，$\cos\theta$在近似后为二阶小量可以略去，于是可以将中间过程用平行于光轴的光路来做近似处理。

$$\varphi_2(x,y) = \varphi_1(x,y) + k\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)(1-n) \tag{5}$$

化简后得

$$\varphi_2 = k\frac{x^2+y^2}{2}\left(\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)(1-n) + \frac{1}{u}\right) \tag{6}$$

通过观察不难得出这个相位分布形式正是球面波，而像点的坐标也已经得出，设像点在透镜右侧距离透镜为v，可以得出

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)(1-n) + \frac{1}{u} = -\frac{1}{v} \tag{7}$$

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)(n-1)=\frac{1}{f} \tag{8}$$

（2）（2.1）

$$U=\tilde{t}A_0=(t_o+t_1\cos(2\pi fx+\varphi_0))A_0=t_0A_0+t_1\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)}}{2}A_0$$

$$=t_0A_0+\frac{1}{2}t_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)}A_0+\frac{1}{2}t_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\pi fx+\varphi_0)}A_0 \tag{9}$$

对应（1.1）中平面波的表达式，可以发现此处正是三个平面波的叠加。分别为

0 级平面波：

$$U_0=t_0A_0 \tag{10}$$

+1 级平面波：

$$\frac{2\pi\sin\theta_{+1}}{\lambda}x=2\pi fx \tag{11}$$

如果$f\lambda\leqslant 1$

$$U_{+1}=\frac{t_1}{2}A_0\ ,\ \theta_{+1}=\arcsin(f\lambda) \tag{12}$$

如果$f\lambda>1$，则会产生隐失波。 (13)

-1 级平面波：

$$\frac{2\pi\sin\theta_{-1}}{\lambda}x=-2\pi fx \tag{14}$$

如果$f\lambda\leqslant 1$

$$U_{-1}=\frac{t_1}{2}A_0\ ,\ \theta_{-1}=\arcsin(f\lambda) \tag{15}$$

如果$f\lambda>1$，则会产生隐失波。 (16)

（2.2）

屏函数周期为d，使用指数法来对全局屏函数进行傅里叶分解，即

$$\tilde{t}=t_0+\sum_{n\neq 0}t_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n\frac{1}{d}x} \tag{17}$$

利用基的正交性，我们可以通过在一个周期内做积分来提取某个系数t_i，正交性具体如下：

$$\int_0^{\frac{1}{f}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi mfx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{i}2\pi mf}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi m}-1)=0,\ m\text{为非零整数} \tag{18}$$

故

$$\frac{1}{d}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}\tilde{t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi mfx}\mathrm{d}x=t_m \tag{19}$$

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \tilde{t} e^{-i2\pi mfx}\mathrm{d}x = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi mfx}\mathrm{d}x + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi mfx}\mathrm{d}x + \int_{-\frac{d}{2}}^{-\frac{a}{2}} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi mfx}\mathrm{d}x = \frac{\sin\left(m\pi\frac{a}{d}\right)}{2\pi m\frac{1}{d}}$$

$$t_m = \frac{\sin\left(m\pi\frac{a}{d}\right)}{2m\pi} = \frac{a}{2d}\frac{\sin\alpha_m}{\alpha_m},\quad \alpha_m = m\pi\frac{a}{d}\text{且}m\neq 0 \tag{20}$$

$$t_0 = \frac{1}{d}\left(a + \frac{1}{2}(d = a)\right) = \frac{a+d}{2d} \tag{21}$$

所以矩形光栅后方光场由无数个平面波叠加而成，对于 0 级平面波，

$$U_0 = \frac{a+d}{2d}A_0 \tag{22}$$

对于$\pm i$级平面波，

$$U_{\pm i} = \frac{a}{2d}\frac{\sin(\alpha_i)}{\alpha_i}A_0\text{，}\alpha_i = \frac{i\pi a}{d}\text{且}i\neq 0 \tag{23}$$

如果$f_i\lambda = \dfrac{i\lambda}{d} \leqslant 1$，则该平面波存在且$\theta_i = \arcsin\left(\dfrac{i\lambda}{d}\right)$ (24)

如果$f_i\lambda = \dfrac{i\lambda}{d} > 1$，则该平面波实质上为隐失波，只能穿透光栅波长量级。 (25)

由此可见，高频的信号是无法对后方光场产生影响的，故若是真实物体的光学成像，那么物体的高频信息便会在传播过程中模糊或者丢失，从而出现失真的情况。

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 12 分：

第（1.1）小问 4 分：（1）（2）式各 2 分；

第（1.2）小问 8 分：（4）（6）式各 2 分；（8）式 4 分；

第（2）问 28 分：

第（2.1）小问 10 分：（9）（10）（12）（15）式各 2 分；（12）（15）式各 3 分；

第（2.2）小问 18 分：（17）（19）式各 2 分；（18）（20）式各 3 分；（21）（25）式各 1 分；（22）（23）（24）式各 2 分。

六、（40 分）物理学的种种概念被广泛运用于炼丹的各个领域中。生成模型f的概念是，从某种简单分布（如高斯分布、均匀分布等）采样的$w\sim N_{trivial}$，经过生成模型的变换$w' = f(w)$之后，整体遵循某种有意义的目标分布$w'\sim N_{target}$。

下面，我们研究一种以高维泊松流（即高维电场线）为基础的生成模型。

（1）给出$N+1$维空间中距离某带电量Q的点电荷$\vec{R}$处的电场。假设高维空间中仍满足高斯定律：

$$\oiint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{6.1}$$

已知$N+1$维空间中半径为1的球表面积为S_{N+1}。

下面，取$\varepsilon_0 = 1$。考虑一个$N+1$维空间中$x_{N+1} = 0$所给出的N维平面，该平面上靠近原点处有电荷分布$p_0(x_1, x_2, \dots, x_N)$。考察这些电荷的电场线在$x_{N+1} > 0$的空间中延伸到半径$R\to\infty$的球面上。因为球面趋向于无穷大，这些电场线可看作是均匀分布的。

（2）如果在该球面上采样一个点W（$x_{N+1} > 0$），沿着通过W点的电场线向内走，直到到达$x_{N+1} = 0$处的点$W'\left(x'_{w,1}, x'_{w,2}, \dots, x'_{w,N}, 0\right)$。请证明，如果采样点$W$时是在球面上按照面积均

匀采样的，那么W'遵循的分布$p'_W = p_0$。

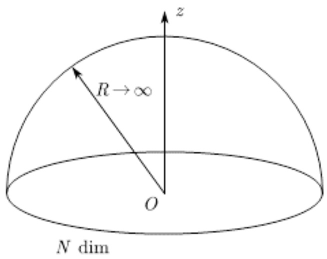


图6.1

如果神经网络以空间中的某个点的坐标为输入，输出此处的电场线（方向），我们就可以用该神经网络实现：在球面均匀采样点，根据电场线反方向的指引，到达$x_{N+1}=0$的平面，而终点的分布满足目标分布（即训练集分布），从而实现一个基于高维泊松流的生成模型。

（3）具体实现时，我们应该恰当地选择R的大小，以防止多极展开带来的、除了零阶点电荷项以外的高阶项使得电场线在球面上并不是均匀通过的。我们可以通过平移原点使得一阶项（即偶极子项）为零。

（3.1）现在，如果将p_0看作是由一系列带电量相等的点电荷产生的，每一只点电荷的坐标可以写作

$$\vec{x_i} = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN}, 0), \sum \vec{x}_i = \vec{0} \tag{6.2}$$

已知场点$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N+1})$是在球面（$||y|| = R$）上均匀采样的，求其**电势**的二阶展开项$\Phi_2$平方的期望值与零阶项$\Phi_0$平方的大小之比。进一步地，如果$\vec{y}$是在上述球面上均匀采样的，要求该处电场与点电荷电场相差不大，由此给出上述R需要满足的条件。已知空间维度为$N+1$维，这些点电荷分布满足$avg_x\left(||\vec{x}||^4\right) = M^4$，（$avg$表示求平均值）点电荷共有$N^*$个。已知$N, N^* \gg 1$。计算时，**认为这些点电荷分布是很集中的**，即，你可以认为对于x的求和，其和平方的期望等于平方期望的和。

（3.2）如果要生成 CIFAR-10 的图片，已知图片维度为$N = 3072$，$N^* = 50000$, 且已经归一化使得$M = 1$，给出R需要满足的条件。

参考资料：

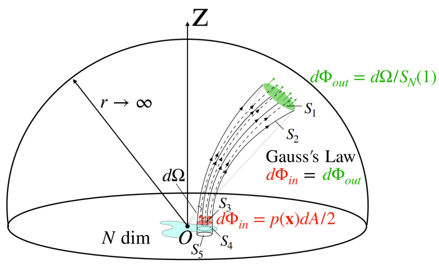
Xu, Yilun et al. "Poisson Flow Generative Models." *ArXiv* abs/2209.11178 (2022): n. pag。

注：论文中推导与本题略有不同。

解：（1）由对称性易知：

$$\vec{E} = \frac{Q}{R^N S_{N+1}\varepsilon_0}\hat{R} \tag{1}$$

（2）考察通量。易知：



$$\mathrm{d}\Phi_{out} = ||E(\omega)||R^N \mathrm{d}\Omega \tag{2}$$
$$\mathrm{d}\Phi_{\text{in}} = p(x)\mathrm{d}A/2 \tag{3}$$

通量守恒，易得：

$$p(x)\mathrm{d}A = 2||E(\Omega)||R^N \mathrm{d}\Omega \tag{4}$$

因为球处电场近乎于点电荷所发出的，所以等号右侧这一项实际上是正比于立体角。从而命题得证。

（3.1）

$$\Phi \propto \frac{1}{\left\|\vec{y}-\vec{x}\right\|^{N-1}} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i\, \partial x_j} = -\frac{(N-1)\delta_{ij}}{\left\|\vec{y}-\vec{x}\right\|^{N+1}} + (N^2-1)\frac{(y_i-x_i)(y_j-x_j)}{\left\|\vec{y}-\vec{x}\right\|^{N+3}} \tag{6}$$

由二阶展开式可得：

$$\Phi = \Phi_0 \times \left(1 + \frac{N-1}{2N^*} \times \sum_x \frac{(N+1) < x,y >^2 - x^2y^2}{\left\|y\right\|^4}\right) \tag{7}$$

即：

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_0} = \frac{N-1}{2N^*} \times \sum_x \frac{(N+1) < x,y >^2 - x^2y^2}{\left\|y\right\|^4} \tag{8}$$

容易知道，该式的期望值为 0。

显然$-x^2y^2$项的方差为 0。于是，上式的方差全部由$< x,y >^2$项贡献。下面，我们对一个单独的x考虑这一项的方差。由对称性，我们只需要考虑$x = \left(\left\|x\right\|, 0,0,\ldots,0\right)$的情况；于是有：

$$E_y[(< x,y >^2)^2] = E_y\left[\left(y_1^2 - \frac{\left\|y\right\|^2}{N+1}\right)^2\right] \times \left\|x\right\|^4 \tag{9}$$

$$E_y\left[y_1^4 - \left(\frac{\left\|y\right\|^2}{N+1}\right)^2\right] = \left\|y\right\|^4 \times \left(\frac{\int_0^\pi \cos^4\theta \sin^{N-1}\theta \mathrm{d}\theta}{\int_0^\pi \sin^{N-1} \mathrm{d}\theta} - \frac{1}{(N+1)^2}\right) \tag{10}$$

从而得到：

$$E_y[(< x,y >^2)^2] \approx \left\|x\right\|^4 \left\|y\right\|^4 \times \frac{2}{N^2} \tag{11}$$

也即：

$$E_y\left[\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_0}\right)^2\right] = \frac{\sum \left\|x\right\|^4 / N^*}{2\left\|y\right\|^4} N^2 = \frac{M^4 N^2}{2\left\|y\right\|^4} \tag{12}$$

从而可以得到R需要满足的条件：

$$R \gg \frac{M\sqrt{N}}{\sqrt[4]{2}} \sim M\sqrt{N} \tag{13}$$

（3.2）代入数据易得：

$$R \gg 47 \tag{14.1}$$

或（省略分母中的$\sqrt[4]{2}$）：

$$R \gg 55 \tag{14.2}$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 5 分：（1）式各 5 分；

第（2）问 10 分：（2）（3）式各 3 分，解释说明 4 分；

第（3）小问 25 分：

第（3.1）小问 20 分：（5）式 2 分，（6）式 4 分，（7）或（8）式写一个即得 4 分，（9）式

2 分，（11）式 4 分，（13）式 4 分。

第（3.2）小问 5 分：（14.1）式或（14.2）式写一个即得 5 分；其他量级正确的答案可得 3 分。

七、（60 分）二维晶格对光的散射

本题研究二维晶格对光的散射。我们简单认为晶体仅有同一种原子构成，原子可以视为点粒子。在晶体中，原子周期性地排列，其中最小的重复单元称为晶胞。考虑一种二维晶体，其晶胞是由两个常矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$构成的平行四边形，其每个顶点各有一个原子。因此，选取其中一个原子为坐标原点，则晶体中的任一原子的位置可以表示为$\vec{r}_0 = n_1\vec{a} + n_2\vec{b}$，其中$n_1$和$n_2$是任意整数。

一束圆频率为ω，波矢为$\vec{k}$的平面电磁波，入射到该晶体，电磁波传播方向在晶体平面内。仅原子可以对电磁波进行散射，忽略电磁波对原子运动的影响，整体来看，相当于电磁波在晶格中发生了衍射。以下问题仅考虑衍射波的波矢仍处于二维晶体所在平面的情况。

（1）考虑原子固定不动的情形。电磁波受原子散射后圆频率不变，仅方向发生改变。设散射后的电磁波波矢为$\vec{k}'$。

（1.1）计算衍射主极大的衍射波矢方向$\vec{k}'$、$\vec{k}$ 、$\vec{a}$和$\vec{b}$应满足的方程。

（1.2）定义倒格矢$\vec{G} = \vec{k}' - \vec{k}$，已知（1.1）小问中方程的解可以写作

$$\vec{G} = m_1\vec{h}_1 + m_2\vec{h}_2 \tag{7.1}$$

其中m_1和m_2是任意整数，试求$\vec{h}_1$和$\vec{h}_2$（二者顺序可交换），结果用$\vec{a}$、$\vec{b}$和$\hat{e}_z$表示，$\hat{e}_z$是方向垂直于二维晶体所在平面的单位矢量。

（2）我们对主极大的光强进行进一步的研究，考虑对应某个主极大衍射方向的倒格矢$\vec{G}$。假设每个原子对衍射光复振幅贡献的模长均为A，共计有N个原子参与了衍射。

（2.1）对于每个原子都静止的情况，直接写出衍射主极大的光强I_0。

（2.2）实际上，原子都在平衡位置附近进行热运动。设原子质量为m，原子在平衡位置附近运动时的势能为

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\Omega^2(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 \tag{7.2}$$

其中$\vec{r}_0$为原子平衡位置的位置矢量。设晶体温度为T，认为每个原子的热运动都是独立的，满足玻尔兹曼分布，忽略多普勒效应，求主极大相对光强I/I_0随温度T的变化。

（3）此问研究格波对衍射光的影响。忽略原子的热运动和多普勒效应，但晶体中存在机械波，其振幅为$\vec{u}_0$。对于格点位置为$\vec{r}_n$的原子，其相对格点的位移随时间t的变化关系为

$$\vec{u}_n(\vec{r}_n, t) = \vec{u}_0 e^{i(\vec{q}\cdot\vec{r}_n - \omega_0 t)} \tag{7.3}$$

其中$\vec{q}$和ω_0为已知常量。

（3.1）由于格波的影响，衍射光的振幅会与$\vec{u}_0$有关，在主极大附近可以观察到一些次极大。当$|\vec{u}_n| \ll |\vec{r}_n|$时，将衍射光的复振幅对$\vec{u}_0$进行展开并保留到一阶，计算次极大所对应的衍射波矢$\vec{k'}$以及角频率$\omega'$。

（3.2）实验上常用中子散射研究声子色散关系。假设该二维晶体的晶胞形状为正方形，即

$$\vec{a} = a\hat{e}_x, \vec{b} = b\hat{e}_y \tag{7.4}$$

已知$a = b = 2\pi \times 0.1\ \mathrm{nm}$。控制$\vec{q}$沿$y$轴方向，固体理论指出

$$|\vec{q}| < \frac{\pi}{a} \tag{7.5}$$

同时假设色散关系线性，即

$$\omega_0 = |\vec{q}|v \tag{7.6}$$

v为晶体内弹性波波速。

现有动能为$E_0 = 5.00\ \mathrm{eV}$的中子流沿x轴入射到晶体。测得xy平面内一处次极大的方向与x轴夹角为$\phi = 16.73°$，散射后中子动能变为$E' = 7.90\ \mathrm{eV}$。试求解晶体内弹性波波速v。已知：中子质量$m_n = 939.6\ \mathrm{MeV/c^2}$，真空光速$c = 2.998\times10^8\ \mathrm{m/s}$，元电荷$e = 1.602\times10^{-19}\ \mathrm{C}$，约化普朗克常数$\hbar = 1.055\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$。

解：（1）

（1.1）任意两个原子之间的相位差都应是2π的整数倍，因此可以得出：

$$\left(\overrightarrow{k'}-\vec{k}\right)\cdot\vec{a} = 2m_1\pi \tag{1}$$

$$\left(\overrightarrow{k'}-\vec{k}\right)\cdot\vec{b} = 2m_2\pi \tag{2}$$

其中m_1, m_2是任意整数。

（1.2）求解以上方程可以采用两组特解叠加的方法。

对于$m_2 = 0$的情形：由式(2)可知，$\overrightarrow{k'}-\vec{k}$与$\vec{b}$正交，即$\overrightarrow{k'}-\vec{k}\ //\ \vec{b}\times\widehat{e_z}$。再结合（1）式：

$$\overrightarrow{k'}-\vec{k} = m_1\frac{2\pi\vec{b}\times\widehat{e_z}}{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\widehat{e_z}\right)} \tag{3}$$

对于$m_1 = 0$的情形，以此类推，得出：

$$\overrightarrow{h_1} = \frac{2\pi\vec{b}\times\widehat{e_z}}{\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\widehat{e_z}\right)} \tag{4}$$

$$\overrightarrow{h_2} = \frac{2\pi\widehat{e_z}\times\vec{a}}{\vec{b}\cdot\left(\widehat{e_z}\times\vec{a}\right)} \tag{5}$$

两个矢量对应$\overrightarrow{h_1},\overrightarrow{h_2}$的顺序可以重新排列，也可以相差正负号。

（2）

（2.1）由题意，直接写出：

$$I_0 = N^2A^2 \tag{6}$$

如果将复振幅解释为电场振幅等，为此式添加常数，亦得分；但是(2.2)问需保持一致。

（2.2）由题意，有$\overrightarrow{k'}-\vec{k} = \vec{G}$。假想原点处也有一处散射光，以此为相位零点，得出相位差：

$$\Delta\phi = \vec{G}\cdot\vec{x} \tag{7}$$

其中$\vec{x}$是原子相对格点的相位差。各个原子都是独立的。我们用$\langle\cdot\rangle$表示期望，总复振幅为：

$$U = NA\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{G}\cdot\vec{x}}\right\rangle \tag{8}$$

下面根据题意求解$\vec{x}$满足的分布。根据玻尔兹曼分布：

$$f(\vec{x}) = \left(\frac{m\omega^2}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{m\omega^2\overrightarrow{x^2}}{2k_BT}\right) \tag{9}$$

计算期望：

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{G}\cdot\vec{x}}\right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{G}\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^3\,\vec{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m\omega^2}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left[-\frac{m\omega^2}{2k_BT}\left(\vec{x}-\frac{\mathrm{i}\vec{G}k_BT}{m\omega^2}\right)^2-\frac{G^2k_BT}{2m\omega^2}\right]\mathrm{d}^3\vec{x} \\ &= \exp\left(-\frac{G^2k_BT}{2m\omega^2}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

因此得出：

$$U = NA\left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{G}\cdot\vec{x}}\right\rangle = NA\exp\left(-\frac{\overrightarrow{G^2}k_BT}{2m\omega^2}\right) \tag{11}$$

由关系$I=|U|^2$，最终得出：

$$\frac{I}{I_0} = \exp\left(-\frac{G^2k_BT}{m\omega^2}\right) \tag{12}$$

（3.1）给所有原子以某种形式的编号，原点的原子记作 0 号，记第n号原子的格点位置为$\overrightarrow{r_n}$，相对格点的位移为$\overrightarrow{u_n}$，那么写出总复振幅为：

$$U = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Sigma_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\overrightarrow{k'}-\vec{k}\right)\cdot\left(\overrightarrow{r_n}+\overrightarrow{u_n}\right)} \tag{13}$$

由题意，泰勒展开到一阶

$$U = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Sigma_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\overrightarrow{k'}-\vec{k}\right)\cdot\overrightarrow{r_n}}\left[1+\mathrm{i}\left(\overrightarrow{k'}-\vec{k}\right)\cdot\overrightarrow{u_n}\right] \tag{14}$$

零阶项对应无格波的弹性散射，我们只研究含有格波效应的一阶项

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathrm{i}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Sigma_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\overrightarrow{k'}-\vec{k}\right)\cdot\overrightarrow{r_n}}\left(\overrightarrow{k'}-\vec{k}\right)\cdot\overrightarrow{u_n} \\ &= \mathrm{i}A\left(\overrightarrow{k'}-\vec{k}\right)\cdot\overrightarrow{u_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega+\omega_0)t}\Sigma_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\overrightarrow{k'}-\vec{k}+\vec{q}\right)\cdot\overrightarrow{r_n}} \end{aligned} \tag{15}$$

由此可以看出为使各个原子之间相位差为2π的整数倍，应有

$$\overrightarrow{k'} = \vec{k}-\vec{q}+\vec{G} \tag{16}$$

同时衍射光的圆频率为

$$\omega' = \omega+\omega_0 \tag{17}$$

（3.2）中子可以视为物质波，由中子的能动量关系：

$$(\hbar k')^2c^2 + m_n^2c^4 = (\hbar\omega')^2 \tag{18}$$

$$\left(\vec{k}-\vec{q}+\vec{G}\right)^2 + \frac{m_n^2c^2}{\hbar^2} = \frac{(\omega+\omega_0)^2}{c^2} \tag{19}$$

方便起见，我们用$\mathrm{d}^{-1}=10^{11}\mathrm{m}^{-1}$作为单位。根据题目数据得知

$$\left|\vec{k}\right| = \frac{1}{\hbar c}\sqrt{(E_k+m_nc^2)^2-m_n^2c^4} = 4.910\ \mathrm{d}^{-1} \tag{20}$$

$$\left|\overrightarrow{k'}\right| = \left|\vec{k}-\vec{q}+\vec{G}\right| = \frac{1}{\hbar c}\sqrt{(E_k'+m_nc^2)^2-m_n^2c^4} = 6.171\ \mathrm{d}^{-1} \tag{21}$$

$$\frac{\omega_0}{c} = \frac{E_k'-E_k}{\hbar c} = 1.469\times10^{-4}\ \mathrm{d}^{-1} \tag{22}$$

将$\overrightarrow{k'}$作正交分解，利用偏转角$\theta=16.73°$，得到

$$k_x' = k'\cos\theta = 5.910\ \mathrm{d}^{-1} \tag{23}$$

$$k_y' = k'\sin\theta = 1.776\ \mathrm{d}^{-1} \tag{24}$$

利用$\vec{q}$沿着y方向且$|\vec{q}|<\frac{\pi}{a}=0.5\ \mathrm{d}^{-1}$，以及$\vec{G}=(n_1,n_2)\ \mathrm{d}^{-1}$，得出此次散射中

$$\vec{G} = (1,2)\ \mathrm{d}^{-1} \tag{25}$$

因此得出

$$v = \frac{\omega_0}{q} = 1.966\times10^5\ \mathrm{m/s} \tag{26}$$

本问必须严格按照题给数值，前四位有效数字正确均可。

评分标准：本题满分 60 分。

第（1）问 10 分：

第（1.1）小问 4 分：（1）（2）式各 2 分；

第（1.2）小问 6 分：（4）（5）式各 3 分；

第（2）问 17 分：

第（2.1）小问 2 分：（6）式 2 分；

第（2.2）小问 15 分：（8）（9）（10）式各 4 分，（12）式 3 分；

第（3）问 33 分：

第（3.1）小问 14 分：（13）式 4 分，（14）（15）式各 2 分，（16）（17）式各 3 分

第（3.2）小问 19 分：（18）式 3 分，（20）式 2 分，（21）（22）式各 3 分，（23）（24）式各 1 分，（25）（26）式各 3 分。