

第 16 届 CPHOS 物理竞赛联考

理论试题参考答案及评分标准

考试时间：2023 年 8 月 10-20 日

命题人：杨岱旭 王 驰 高铭泽

李沐恒 郎程超 吴彦玺

审题人：杨岱旭 王 驰 高铭泽

李沐恒 郎程超 吴彦玺 王梓人 李瀚奕

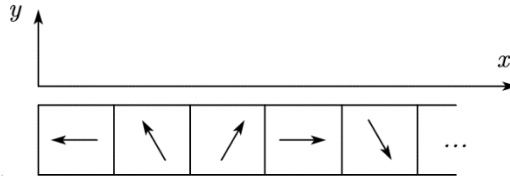
一、(40 分) 磁悬浮列车

本题考察一种磁悬浮的实现，即感应轨道悬挂技术。考虑图示磁悬浮列车的简化模型。

如图所示，我们将永磁体在 $y = 0$ 的平面上沿 x 方向依次排列开，无限延伸，其在 z 方向可以看作是均匀的。这些永磁体可以看作是一个个小磁针，其摆放方向呈周期性变化，每一个磁针相比于前边一个转过了 θ 角度（弧度制），相邻两个小磁针的间隔为 a 。已知空间中的磁场分布

$$\begin{cases} B_x = B_0(y) \sin kx \\ B_y = B_0(y) \cos kx \end{cases}$$

且已知 $B_0(0) = B_0$ 。



(1) 试求出 $B_0(y)$ 和 k 的具体表达式。提示：利用磁场的散度为零。

下面考虑一个边长为 b 的正方形线圈，其电阻为 R ，自感为 L ，质量为 m ，在高度 y 处以速度 v 近似匀速地沿 x 正方向掠过该装置的上方（线圈的法向沿 y 轴方向），由于掠过的速度较快，其受力可以对时间取平均得到受力的有效值。

(2) 求出该线圈可以平衡的高度 y_0 。

(3) 求出线圈沿 x 方向的有效加速度 a_x 。

(4) 存在特定的线圈长度 b ，无论怎样增大磁场也实现不了磁悬浮，试求出这些特定的值。

解：(1) 由于对称性， $B_z = 0$ ，已知磁感应强度的散度为零

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

具体地，代入题干给出的磁场分布的表达式，得到方程

$$\frac{dB_0(y)}{dy} = -kB_0(y) \quad (2)$$

结合 $B_0(0) = B_0$ ，得到

$$B_0(y) = B_0 e^{-ky} \quad (3)$$

而根据旋转角度可以看出空间周期 $\lambda = \frac{2\pi}{\theta} a$ ，则波矢

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\theta}{a} \quad (4)$$

(2) 设线圈的中心位置的坐标为 x_c , 将磁场分布中的 x 替换成 $x + vt$, 计算通过线圈的磁通量

$$\Phi = b \int_{x_c - \frac{b}{2}}^{x_c + \frac{b}{2}} B_y dx = \frac{2bB_0 e^{-ky}}{k} \sin k \frac{b}{2} \cos k(x_c + vt) \quad (5)$$

以逆时针为正的感生电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = 2vbB_0 e^{-ky} \sin k \frac{b}{2} \sin k(x_c + vt) \quad (6)$$

那么以逆时针为正的电流满足的方程为

$$\varepsilon = IR + L \frac{dI}{dt} \quad (7)$$

可以解这个方程, 也可以用交流电的知识, 得到电流

$$I = \frac{2vbB_0 e^{-ky}}{\sqrt{R^2 + (kvL)^2}} \sin k \frac{b}{2} \sin[k(x_c + vt) + \varphi] \quad \tan \varphi = -\frac{kvL}{R} \quad (8)$$

下面计算 y 方向线圈的受力

$$F_y = Ib \left[-B_x \left(x_c + \frac{b}{2} \right) + B_x \left(x_c - \frac{b}{2} \right) \right] = -\frac{4vb^2 B_0^2 e^{-2ky}}{\sqrt{R^2 + (kvL)^2}} \sin^2 k \frac{b}{2} \sin[k(x_c + vt) + \varphi] \cos k(x_c + vt) \quad (9)$$

因为运动速度较快, 所以对时间取平均值得到有效受力

$$\overline{F_y} = \frac{2kv^2 L b^2 B_0^2 e^{-2ky}}{R^2 + (kvL)^2} \sin^2 k \frac{b}{2} \quad (10)$$

由受力平衡可知线圈稳定的高度

$$mg = \overline{F_y} \quad (11)$$

$$y_0 = -\frac{1}{2k} \ln \left\{ \frac{mg[R^2 + (kvL)^2]}{2kv^2 L b^2 B_0^2 \sin^2 k \frac{b}{2}} \right\} \quad (12)$$

(3) 同样的, 我们计算 x 方向的受力, 可以用功率计算

$$P = \overline{F_x} v \quad (13)$$

又有

$$P = \frac{1}{2} I_0^2 R \quad (14)$$

其中的 I_0 为电流的幅值, 从而

$$\overline{F_x} = -\frac{2vRb^2 B_0^2 e^{-2ky}}{R^2 + (kvL)^2} \sin^2 k \frac{b}{2} \quad (15)$$

加了负号的原因是楞次定律, 可以分析出来是作的阻力, 那么

$$ma_x = \overline{F_x} \quad (16)$$

代入 y 的表达式, 得到 x 方向的加速度为

$$a_x = -\frac{g\theta vL}{aR} \quad (17)$$

(4) 很容易分析得到无法悬浮的条件

$$\sin k \frac{b}{2} = 0 \quad (18)$$

即

$$b = \frac{2n\pi}{\theta} a \quad n = 1, 2, 3 \dots \dots \quad (19)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 9 分：(1) 式 3 分，(2) (3) (4) 式各 2 分；

第 (2) 问 17 分：(5) (6) (7) (9) (10) (11) (12) 式各 2 分，(8) 式 3 分；

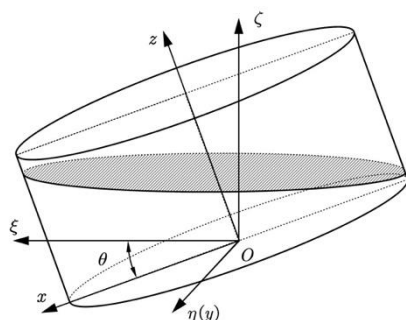
第 (3) 问 10 分：(13) (14) (15) (16) (17) 式各 2 分；

第 (4) 问 4 分：(18) (19) 式各 2 分。

二、(50 分) 柠檬水的迷思

考虑一杯柠檬水。漂浮于水平面上的柠檬片，可能会受外界扰动而开始振动。本题即考察在充分大的水面上，柠檬片的振动。

如图，把柠檬片视为一个半径为 R ，厚度为 h ，密度为 ρ 的均质圆柱体，放在密度为 ρ_L 的液体表面。液体表面积充分大，也充分深。忽略液体表面张力以及各种可能的能量耗散。建立图示固连于柠檬片的坐标系 $O - xyz$ ，考虑这个柠檬片绕平行于 y 轴的水平轴转动，并且其上底面始终在液面以上，下底面始终在液面以下。将某时刻转动角度记为



θ ，设 $\alpha = \frac{\rho}{\rho_L}$ ($\alpha < 1$)，重力加速度为 g 。

(1) 若柠檬片受力平衡时，其底面与液面平行，讨论以下问题：

(1.1) 柠檬片此时浸入液体的深度 h_0 。(本问最终结果请用 h, α 表示。)

(1.2) 使柠檬片绕水平轴转动 θ ，且保持其受力平衡。请求出柠檬片受到的力矩与 θ 之间的关系 (即求出 $M = M(\theta)$)。

(1.3) 在柠檬片平衡状态下，给其一个充分小的绕 y 轴的力矩，柠檬片对此扰动稳定，求 R 取值范围。(本问不要求讨论临界点情形。最终结果请用 h, α 表示。)

(1.4) 在 (1.3) 所求得条件下，前述扰动可激发柠檬片振动，试求解柠檬片振动周期。(本问不要求讨论临界点情形。最终结果请用 R, h, α, g 表示。)

(2) 在 (1.3) 所求得条件不能满足时，柠檬片可能采取哪些平衡状态？请用 α, h, R 表示各个 θ 的取值，讨论各平衡状态稳定性，并且用 h, α 表示各个解存在时 R 的取值范围。

解：(1) (1.1) 受力平衡：

$$F_B = mg \quad (1)$$

其中

$$\begin{cases} m = \pi \rho R^2 h \\ F_B = \pi \rho_L g R^2 h_0 \end{cases} \quad (2)$$

进而得到

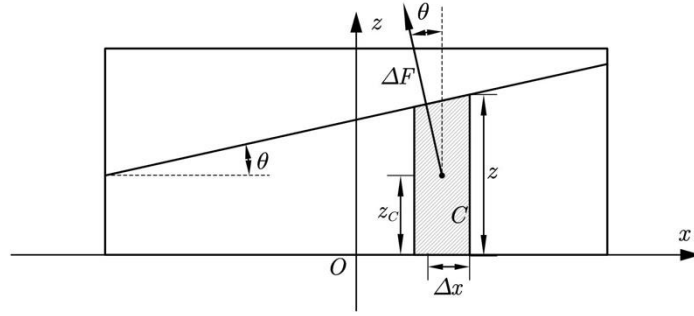
$$h_0 = \alpha h \quad (3)$$

(1.2) 依照题意，可知此时在 $Oxyz$ 坐标系内，液面的方程为

$$z = \alpha h + x \tan \theta \quad (4)$$

考察 $x \sim x + \Delta x$ 之间的柠檬片微元，受到的浮力大小为

$$\Delta F = 2 \rho_L g \sqrt{R^2 - x^2} \Delta x \quad (5)$$



进一步地，在相对质心静止的平动参考系内考察柠檬片转动。前述浮力对力矩 y 分量的贡献为

$$\Delta M = -\Delta F \left(-\left(\frac{1}{2}h - z_C\right) \sin\theta + x \cos\theta \right) \quad (6)$$

其中， $z_C = \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}(\alpha h + x \tan\theta)$ 。积分，求得合力矩（易知重力对力矩无贡献）：

$$M = - \int_{-R}^{-R} 2\rho_L g \sqrt{R^2 - x^2} (\alpha h + x \tan\theta) \left(-\frac{1}{2}(1-\alpha)h \sin\theta + x \left(\frac{1}{2} \sin\theta \tan\theta + \cos\theta \right) \right) dx \quad (7)$$

$$M = \frac{1}{8} \pi \rho_L g R^2 (4\alpha(1-\alpha)h^2 \sin\theta - R^2(2 + \tan^2\theta) \sin\theta) \quad (8)$$

(1.3) 我们考虑

$$\frac{dM}{d\theta} = \frac{1}{8} \pi \rho_L g R^2 (4\alpha(1-\alpha)h^2 \cos\theta - R^2(2 \cos\theta + \cos\theta \tan^2\theta + 2 \tan^2\theta \sec\theta)) \quad (9)$$

稳定平衡要求 $\frac{dM}{d\theta}|_{\theta=0} < 0$ ，从而有

$$\frac{dM}{d\theta}|_{\theta=0} = \frac{1}{4} \pi \rho_L g R^2 (2\alpha(1-\alpha)h^2 - R^2) < 0 \quad (10)$$

得到

$$R > \sqrt{2\alpha(1-\alpha)}h \quad (11)$$

(1.4) 角动量定理：我们考虑把力矩近似到 θ 一阶

$$M \doteq -\frac{1}{4} \pi \rho_L g R^2 (R^2 - 2\alpha(1-\alpha)h^2) \theta$$

从而写成

$$-\frac{1}{4} \pi \rho_L g R^2 (R^2 - 2\alpha(1-\alpha)h^2) \theta = \left(\frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m h^2 \right) \ddot{\theta} \quad (12)$$

其中 $m = \pi \rho R^2 h$ ，进而直接得到周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h(3R^2 + h^2)}{3\alpha g(R^2 - 2\alpha(1-\alpha)h^2)}} \quad (13)$$

(2) 我们考虑 $R < \sqrt{2\alpha(1-\alpha)}h$ 的情形：此时令 $M = 0$ ，在 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 范围可以得到

$$\theta = 0, \arctan \frac{\sqrt{4\alpha(1-\alpha)h^2 - 2R^2}}{R} \quad (14)$$

$\theta = 0$ 这一解总存在。记 $\theta_0 = \arctan \frac{\sqrt{4\alpha(1-\alpha)h^2 - 2R^2}}{R}$ ，我们关注到

$$\begin{cases} \frac{dM}{d\theta}|_{\theta=0} = \frac{1}{4}\pi\rho_L g R^2 (2\alpha(1-\alpha)h^2 - R^2) > 0 \\ \frac{dM}{d\theta}|_{\theta=\theta_0} = -\frac{1}{2}\pi\rho_L g R (2\alpha(1-\alpha)h^2 - R^2)\sqrt{4\alpha(1-\alpha)h^2 - R^2} < 0 \end{cases} \quad (15)$$

从而确定 $\theta = 0$ 为不稳定平衡, $\theta = \theta_0$ 为稳定平衡。 $\theta = \theta_0$ 这个解存在要求

$$R \tan \theta_0 < (1-\alpha)h \quad (16.1)$$

$$R \tan \theta_0 < \alpha h \quad (16.2)$$

由此得到

$$R^2 > \frac{(5\alpha-1)(1-\alpha)}{2}h^2 \quad (17.1)$$

$$R^2 > \frac{\alpha(4-5\alpha)}{2}h^2 \quad (17.2)$$

对于 $\alpha \leq \frac{1}{5}$, (17.1) 式总成立。而对于 $\alpha > \frac{1}{5}$, (17.1) 与本文题目条件共同给出要求

$$\max\left\{\frac{(5\alpha-1)(1-\alpha)}{2}h^2, \frac{\alpha(4-5\alpha)}{2}h^2\right\} < R^2 < 2\alpha(1-\alpha)h^2 \quad (18)$$

综上, 在 $R < \sqrt{2\alpha(1-\alpha)}h$ 前提下, $\theta = 0$ 这一平衡位置始终存在, 且总为不稳定平衡。而对

于 $\theta = \theta_0 = \arctan \frac{\sqrt{4\alpha(1-\alpha)h^2 - R^2}}{R}$ 这一平衡位置, 若存在则必定为稳定平衡。这一平衡位置不

存在, 当且 $1 > \alpha > \frac{1}{2}$ 且 $R \leq \sqrt{\frac{(5\alpha-1)(1-\alpha)}{2}}h$ 或者 $\frac{1}{2} > \alpha > 0$ 且 $R \leq \sqrt{\frac{\alpha(4-5\alpha)}{2}}h$ 。

评分标准: 本题满分 50 分。

第 (1) 问 32 分:

第 (1.1) 问 6 分: (1) (2) (3) 式 2 分;

第 (1.2) 问 10 分: (4) (8) 式 3 分, (5) (6) 式 2 分

第 (1.3) 问 8 分: (9) (10) 式 2 分, (11) 式 4 分;

第 (1.4) 问 8 分: (11) 式 4 分, (12) (13) 式 2 分;

第 (2) 问 18 分: (15) (16) 式 4 分, (17) (18) 式 2 分, R 取值范围的讨论 4 分;

三、(60 分) 天体运动新解

天体运动问题是最古老的力学问题之一。各种天体通过万有引力相互作用, 我们因此看到了各种不同的星系团, 星系团中包括了各种恒星系、恒星以及行星。本题通过全新的方法求解天体运动问题, 从而加深对于平方反比力独特性质的认识。

考虑一个行星绕一个恒星的运动, 设行星质量为 m , 恒星质量为 M , 认为 $M \gg m$, 从而可以忽略恒星的运动。以恒星为原点建立极坐标系 (r, φ) , 基矢分别为 \vec{e}_r , \vec{e}_φ 。

首先我们尝试寻找守恒量。众所周知在天体运动中存在角动量 J 和能量 E 两个守恒量, 但我们将继续寻找额外的守恒量。

(1) (1.1) 求出一个具有速度量纲的守恒量 \vec{w} , 用行星的速度矢量 \vec{v} , 基矢 \vec{e}_φ , 角动量大小 J 和其他已知量和普适常量表示。提示: 考虑速度矢量 \vec{v} 和基矢 \vec{e}_φ 随极角 φ 的变化。

(1.2) 计算速度在 \vec{e}_φ 方向上的投影, 从而得到行星运动的轨迹方程, 并求出轨道离心率 e 和守恒量 w 的关系

接下来我们在速度空间中继续研究行星的运动。在速度空间中建立直角坐标 v_x, v_y , 并假设 $v_x(\varphi = 0) = 0$ 。

(2) (2.1) 证明: 行星的速度在速度空间的轨迹为圆, 并求出圆心坐标和圆的半径, 用轨道

离心率 e ，角动量大小 J 表示。

(2.2) 论述椭圆轨道、抛物线轨道和双曲线轨道各自在速度空间中的特点(包括圆的半径和坐标原点与圆的位置关系)。

接下来利用我们已知的两个守恒量，考虑在平方反比力基础上的微扰，设引力势能 $U = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$ ， α, β 都大于 0 且 β 为小量。我们仿照上一小问的方法，通过研究 $\dot{r} - \frac{1}{r}$ 空间中的轨迹来计算行星轨道的进动角。

(3)(3.1) 求行星在 $\dot{r} - \frac{1}{r}$ 空间中的轨迹。为简化表达式，可引入参量 C, ε ，其中 $C^2 = \frac{J^2}{2m} + \beta$ ， $\varepsilon^2 = E + \frac{\alpha^2}{4C^2}$ 。

(3.2) 接上问，将 \dot{r} 和 $\frac{1}{r}$ 分别设成 $\sin f(t)$ 和 $\cos f(t)$ 的简谐振动形式， $f(t)$ 为关于 t 的函数。试求出 f 和极角 φ 的关系，并计算出行星运动的轨迹方程和一个周期内的进动角。

解：(1.1) 角动量大小

$$J = mr^2\dot{\varphi} \quad (1)$$

行星的动力学方程

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r \quad (2)$$

考虑速度矢量 \vec{v} 随极角 φ 的变化，

$$\frac{d\vec{v}}{d\varphi} = -\frac{GMm}{J} \vec{e}_r \quad (3)$$

考虑基矢 \vec{e}_r 随极角 φ 的变化，

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = -\vec{e}_\varphi \quad (4)$$

联立，并积分，得到

$$\vec{v} = \vec{w} + \frac{GMm}{J} \vec{e}_\varphi \quad (5)$$

故守恒量

$$\vec{w} = \vec{v} - \frac{GMm}{J} \vec{e}_\varphi \quad (6)$$

(1.2) 计算速度 \vec{v} 在 \vec{e}_φ 方向上的投影：

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_\varphi = v_\varphi = w \cos \varphi + \frac{GMm}{J} \quad (7)$$

$$v_\varphi = \frac{J}{mr} \quad (8)$$

联立，得

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \text{ 其中 } p = \frac{J^2}{GMm^2} e = \frac{wJ}{GMm} \quad (9)$$

(2.1) 由 $v_x(\varphi = 0) = 0$ 得

$$\vec{w} = \frac{GMme}{J} \vec{e}_y \quad (10)$$

将(6)式变形，得

$$(\vec{v} - \vec{w})^2 = \left(\frac{GMm}{J}\right)^2 \quad (11)$$

最终得到速度空间的轨迹方程

$$v_x^2 + \left(v_y - \frac{GMme}{J}\right)^2 = \left(\frac{GMm}{J}\right)^2 \quad (12)$$

由此可见, 行星在速度空间的轨迹为圆, 圆心坐标为 $(0, \frac{GMme}{J})$, 半径为 $\frac{GMm}{J}$

(2.2) 椭圆轨道的圆心纵坐标小于半径, 坐标原点在圆内。

抛物线轨道的圆心纵坐标等于半径, 坐标原点在圆上。

双曲线轨道的圆心纵坐标大于半径, 坐标原点在圆外。

(3.1) 能量守恒

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} \quad (13)$$

整理, 代入题干所给参量, 得

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{C}{r} - \frac{\alpha}{2C}\right)^2 = \varepsilon^2 \quad (14)$$

(3.2) 为了满足(14)式的守恒条件, 设

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\dot{r} = \varepsilon \sin f(t) \quad (15)$$

$$\frac{C}{r} - \frac{\alpha}{2C} = \varepsilon \cos f(t) \quad (16)$$

(16) 式对时间求导, 得

$$\frac{C}{r^2}\dot{r} = \varepsilon \dot{f} \sin f(t) \quad (17)$$

再将(15)式代入, 得

$$\frac{C}{r^2} = \dot{f} \sqrt{\frac{m}{2}} \quad (18)$$

与(1)式联立, 得到

$$\frac{mC\dot{\phi}}{J} = \dot{f} \sqrt{\frac{m}{2}} \quad (19)$$

$$\frac{df}{d\phi} = \sqrt{\frac{2mC^2}{J^2}} \quad (20)$$

$$f = \sqrt{\frac{2mC^2}{J^2}}\phi + \gamma \quad (21)$$

其中 γ 为积分常数, 再代入(16)式, 得到轨道方程

$$r = \frac{2C^2}{\alpha + 2\varepsilon C \cos(\omega\phi + \gamma)} \quad (22)$$

其中

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{2m\beta}{J^2}} \quad (23)$$

一个周期内的进动角

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{1}{\omega} - 1\right) \quad (24)$$

代入小量近似, 得

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi\beta m}{J^2} \quad (25)$$

评分标准: 本题满分 60 分。

第 (1.1) 问 12 分: (1) (2) (3) (4) (5) (6) 式各 2 分;

第 (1.2) 问 8 分: (7)(8) 式各 2 分, (9) 式 4 分;

第 (2.1) 问 10 分: (10) (11) 式各 3 分, (12) 式 2 分, 圆心坐标和半径 2 分;

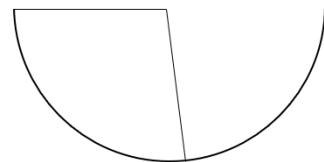
第 (2.2) 问 4 分: 比较圆心纵坐标和圆的半径大小关系 2 分, 说明原点与圆的位置关系 2 分;

第 (3.1) 问 6 分: (13) (14) 式各 3 分;

第 (3.2) 问 20 分: (15) (16) 式各 1 分, (17) (18) (19) (20) (21) (22) (23) (24) (25)

四、(40 分) 磁场引起的振动衰减

在一空间中存在水平方向的匀强磁场 B 。在垂直于磁场的竖直平面中有一个半圆环, 单位长度电阻为 ρ , 半径为 R 。半圆环一端与圆心相连, 圆心与另一细导体棒相连。导体棒长为 R , 质量为 m , 电阻为 r_0 (r_0 与 ρR 的数量级相同), 与圆环接触但没有力作用。现导体棒从与竖直方向夹角为 θ_0 处释放开始振荡 ($\theta \ll 1$)



试求使导体棒发生振动的条件与在经过 T 时间后, 导体棒的振幅。

解: 记在 θ 处的角速度为 $\dot{\theta}$, 磁通量为

$$\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)BR^2 \quad (1)$$

电动势为

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{2}BR^2\dot{\theta} \quad (2)$$

所以导体棒电流大小为

$$I = \frac{-\varepsilon}{r_0 + \rho R\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{BR^2}{2\left(r_0 + \rho R\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right)}\dot{\theta} \quad (3)$$

导体棒所受磁场带来的力矩为

$$M = \int B I r \cdot dr = \frac{1}{2}BR^2 \cdot I = \frac{B^2R^4}{4\left(r_0 + \rho R\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right)}\dot{\theta} \approx \frac{B^2R^4}{4\left(r_0 + \frac{\pi}{2}\rho R\right)}\dot{\theta} \quad (4)$$

导体棒对圆心 (即棒的一端) 的转动惯量为

$$J = \frac{1}{3}mR^2 \quad (5)$$

导体棒对圆心的重力矩为

$$M = -\frac{1}{2}mgR\theta \quad (6)$$

由圆心处对导体棒的角动量定理, 可得

$$\frac{1}{3}mR^2\ddot{\theta} + \frac{B^2R^4}{4\left(r_0 + \rho R\frac{\pi}{2}\right)}\dot{\theta} + \frac{1}{2}mgR\theta = 0 \quad (7)$$

标准的阻尼振动形式，代入试探解

$$\theta = \theta_0 e^{\lambda t} \quad (8)$$

得到

$$\frac{1}{3}mR^2\lambda^2 + \frac{B^2R^4}{4\left(r_0 + \rho R\frac{\pi}{2}\right)}\lambda + \frac{1}{2}mgR = 0 \quad (9)$$

当参数满足 (10) 式时，导体棒发生振动

$$\frac{3g}{2R} > \frac{3B^2R^2}{8m\left(r_0 + \frac{\pi}{2}\rho R\right)}^2 \quad (10)$$

解得特征根为

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3B^2R^2}{8m\left(r_0 + \frac{\pi}{2}\rho R\right)} \pm i\sqrt{\frac{3g}{2R} - \left(\frac{3B^2R^2}{8m\left(r_0 + \frac{\pi}{2}\rho R\right)}\right)^2} \quad (11)$$

记

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2R} - \left(\frac{3B^2R^2}{8m\left(r_0 + \frac{\pi}{2}\rho R\right)}\right)^2}$$

代入初始条件

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 \quad (12)$$

解得角度随时间的关系为

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{3B^2R^2}{8m\left(r_0 + \frac{\pi}{2}\rho R\right)}t} (\cos \omega t + A \sin \omega t) \quad (13)$$

代入初始条件

$$\dot{\theta}|_{t=0} = 0 \quad (14)$$

解得

$$A = \frac{\frac{3B^2R^2}{8m\left(r_0 + \frac{\pi}{2}\rho R\right)}}{\sqrt{\frac{3g}{2R} - \left(\frac{3B^2R^2}{8m\left(r_0 + \frac{\pi}{2}\rho R\right)}\right)^2}} \quad (15)$$

在经过 T 时间以后，其振幅为

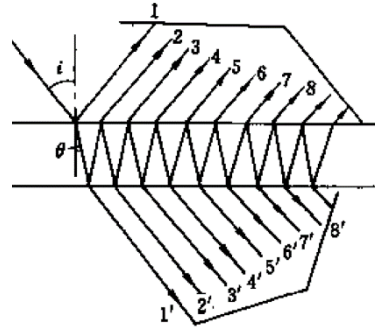
$$\theta' = \frac{\theta_0 e^{-\frac{3B^2R^2}{8m\left(r_0 + \frac{\pi}{2}\rho R\right)}T}}{\sqrt{1 - \frac{2R}{3g}\left(\frac{3B^2R^2}{8m\left(r_0 + \frac{\pi}{2}\rho R\right)}\right)^2}} \quad (16)$$

评分标准：本题满分 40 分。

(1) (2) (3) 式 2 分，(4) 式 3 分，(5) (6) 式 2 分，(7) (9) 式 4 分，(10) 式 5 分；
(11) 式 3 分，(13) 式 2 分，(14) 式 1 分，(15) 式 2 分，(16) 式 6 分。

五、(40 分) 磁致旋光 F-P 腔

首先我们介绍一下磁致旋光效应，指在外加磁场 \vec{B} 的作用下，原本一些各向同性的介质变成旋光性物质，当一个线偏振光沿磁场方向传播时，其出射光仍为线偏振光，但是其偏振面会发生旋转。而磁致旋光的特性是不可逆性，即当一束光线往返通过一磁场区时，其偏转角加倍。我们发现偏转角 ϕ 正比于磁场 B 和介质长度 l ，即 $\phi = VBl$ 其中比例系数 V 称作 Verder 系数，其因介质而异。



现在我们将旋光物质注入一个标准 F-P 腔内，介质平均折射率为 n ，长度为 l ，Verder 系数为 V ，外加磁感应强度大小为 B 。

现在我们垂直入射一个真空中波长为 λ 的线偏振光于其中，即只考虑 $\theta = 0$ 的情况，入射光强为 I_0 ，F-P 腔的界面光强反射率为 R 。已知斯托克斯倒逆关系 $tt' + r^2 = 1$ 和 $r + r' = 0$ ，其中 t, t', r, r' 分别为从空气入射到介质和从介质入射到空气中复振幅的透射系数和反射系数。

(1) 试求透射光强 I_t 的表达式。

(2) 假设除了 I_0, R 之外的变量都可变，给出让透射光强最大的条件。然后讨论若 F-P 腔腔长因工艺原因有微小偏差 δl ，试求此偏差最大值的表达式，我们要求在原先的最大透射条件下，光强不降为原来的一半以下。

(3) 本问我们认为磁场强度很小，以至于光往返一个来回后，偏振面转动的角度远小于 1 (弧度制下)，试依据此条件，将透射光强的表达式简化保留至 B 的最低阶近似项。然后我们考虑在最大透射的条件下，为保证光强值不降为无磁场时的一半以下，试求 B 的最大值。

解：(1) 我们记相位差

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2nl = \frac{4\pi}{\lambda} nl \quad (1)$$

记往返一次偏振面转动的角度为

$$\theta = 2VlB \quad (2)$$

方法一：接下来我们以第一次出射光为相位零点，以其偏振方向设为 x 轴，与传播方向垂直且与 x 轴垂直的方向设为 y 轴，记振幅透射率为 t, t' ，反射率 r' 。这里我们先不采用复振幅的方法，写出

$$E_x = E_0 tt' (\cos(-\omega t) + r'^2 \cos(\delta - \omega t) \cos \theta + r'^4 \cos(2\delta - \omega t) \cos 2\theta + \dots) \quad (3)$$

$$E_y = E_0 tt' (0 + r'^2 \cos(\delta - \omega t) \sin \theta + r'^4 \cos(2\delta - \omega t) \sin 2\theta + \dots) \quad (4)$$

让我们引入一种全新的复振幅

$$\vec{E} = E_x + iE_y = E_0 tt' (\cos(-\omega t) + r'^2 \cos(\delta - \omega t) e^{i\theta} + r'^4 \cos(2\delta - \omega t) e^{2\theta} + \dots) \quad (5)$$

让我们处理这个求和我们令

$$\cos(\delta - \omega t) = \text{Re}_j \{ e^{j(\delta - \omega t)} \} \quad (6)$$

注意其中的复数 j 的含义与 i 相同，但我们为了区分而用了不同的字母，而这里求实部也只对 j 的复数求其实部，所以

$$e^{-i\omega t} + r'^2 e^{j(\delta-\omega t)} e^{i\theta} + r'^4 e^{j(2\delta-\omega t)} e^{2\theta} + \dots = \frac{e^{-j\omega t}}{1 - r'^2 e^{j\delta} e^{i\theta}} \quad (7)$$

所以

$$\tilde{E} = E_0 t t' R e_j \left\{ \frac{e^{-j\omega t}}{1 - r'^2 e^{j\delta} e^{i\theta}} \right\} = E_0 t t' \frac{\cos \omega t (1 - r'^2 e^{i\theta} \cos \delta) + \sin \omega t r'^2 e^{i\theta} \sin \delta}{1 - 2r'^2 e^{i\theta} \cos \delta + r'^4 e^{i2\theta}} \quad (8)$$

而光强还要对时间求平均值, 有 $I_t = \overline{\tilde{E} \tilde{E}^*}$, 最后求得结果为, 其中 I_0 为入射光强

$$I_t = \frac{(1-R)^2 (1 - 2R \cos \theta \cos \delta + R^2)}{1 - 4R \cos \theta \cos \delta + 2R^2 \cos 2\theta + 4R^2 \cos^2 \delta - 4R^3 \cos \theta \cos \delta + R^4} I_0 \quad (9)$$

方法二: 接下来, 我们首先计算一个圆偏振光在 F-P 腔中的透射情况, 其实和线偏振光没有什么不同, 记反射系数 r 和 r' , 透射系数为 t 和 t' , 记入射的复振幅为 E_0 , 那么透射复振幅

$$E_t = E_0 e^{i\frac{\delta}{2}} t t' (1 + r'^2 e^{i\delta} + (r'^2 e^{i\delta})^2 + \dots) = \frac{E_0 e^{i\frac{\delta}{2}} t t'}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \quad (3')$$

结合斯托克斯倒逆关系

$$t t' + r'^2 = 1 \quad (4')$$

得到透射光强

$$I_t = E_t E_t^* = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)} \quad (5')$$

其中 $I_0 = E_0^2$, 而对于有旋光的 F-P 腔, 我们将振幅 E_0 线偏振光分为振幅分别是 $\frac{1}{2} E_0$ 的左旋和右旋偏振光。在考虑到对于圆偏振光相位差对应的就是偏振面的旋转, 那么在叠加上旋光效应, 其实就是将相位差分别换成 $(\delta + \theta)$ 和 $(\delta - \theta)$, 那么透射光强为

$$I_{tl} = \frac{\frac{1}{4} E_0^2}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{\delta + \theta}{2} \right)} \quad (6')$$

$$I_{tr} = \frac{\frac{1}{4} E_0^2}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{\delta - \theta}{2} \right)} \quad (7')$$

线偏振光有

$$I_0 = \frac{1}{2} E_0^2 \quad (8')$$

所以得到了透射光强

$$I_t = \frac{1}{2} I_0 \left[\frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{\delta + \theta}{2} \right)} + \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \left(\frac{\delta - \theta}{2} \right)} \right] \quad (9')$$

可以证明两种方法的结果是等价的。

(2) 透射光强最大的条件很容易想到, 第一种情况, 一个周期内相位和偏振面都恢复

$$\theta = 2k\pi \Rightarrow B = \frac{k\pi}{v l} \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (10)$$

$$\frac{\delta}{2} = k\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2}{k}nl \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (11)$$

第二种情况，一个周期内相位和偏振面都反向

$$\theta = k\pi \Rightarrow B = \frac{k\pi}{2Vl} \quad k = 1, 3, 5 \dots \quad (12)$$

$$\frac{\delta}{2} = \frac{k}{2}\pi \Rightarrow \lambda = \frac{4}{k}nl \quad k = 1, 3, 5 \dots \quad (13)$$

将(9)在极大值附近作小量展开：

$$I_t = \frac{\left((1-R)^2 + R \left(\varepsilon_\delta^2 + \varepsilon_\theta^2 - \frac{1}{12}\varepsilon_\delta^4 - \frac{1}{12}\varepsilon_\theta^4 - \frac{1}{2}\varepsilon_\delta^2\varepsilon_\theta^2 \right) \right) (1-R)^2}{(1-R)^4 + 2R(1-R)^2(\varepsilon_\delta^2 + \varepsilon_\theta^2) + (\varepsilon_\delta^4 + \varepsilon_\theta^4) \left(\frac{R}{6}(-1-R^2+8R) \right) - R(1+R^2)\varepsilon_\delta^2\varepsilon_\theta^2} I_0 \quad (14)$$

其中的

$$\varepsilon_\delta = \frac{4\pi}{\lambda}n\delta l, \varepsilon_\theta = 2VB\delta l \quad (15)$$

当光强减弱到一半时

$$(1-R)^4 = R^2(\varepsilon_\delta^2 - \varepsilon_\theta^2)^2 \quad (16)$$

所以我们得到偏移量的最大值

$$\delta l = \frac{1-R}{2\sqrt{R}\sqrt{\left| \left(\frac{2\pi}{\lambda}n \right)^2 - (VB)^2 \right|}} \quad (17)$$

(3) 我们只需要把透射光强(10)式展开到 θ 的 2 阶项即可，不是很容易地得到

$$I_t = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \left(1 - \frac{R^2 \cos \delta + \cos \delta + 2R \cos^2 \delta - 4R}{(1-2R \cos \delta + R^2)^2} R \theta^2 \right) \quad (18)$$

最大透射条件下

$$I_t = I_0 \left[1 - \frac{R}{(1-R)^2} \theta^2 \right] \quad (19)$$

当 $I_t(B_{max}) = \frac{1}{2}I_0$ 时，有

$$B_{max} = \frac{1-R}{2\sqrt{2}lV\sqrt{R}} \quad (20)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 18 分：(1) (2) 式各 1 分；方法一：(3) (4) (5) (6) (7) (8) 式各 2 分，(9) 式 4 分；方法二对应式子分值相同；

第 (2) 问 14 分：(10) (11) (12) (13) 式各 1 分，(14) 式 4 分，(15) (16) (17) 式各 2 分；

第 (3) 问 8 分：(18) 式 4 分，(19) (20) 式各 2 分。

六、(50 分) 热机

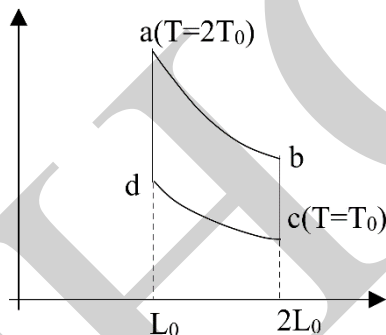
一个底面积为 S 的密闭圆柱形筒内装有 N 个单原子分子，分子的质量为 m ，分子数密度随高度的分布满足玻尔兹曼分布，即 $p(z) \propto e^{-\frac{E_p(z)}{kT}}$ ，式中 $E_p(z)$ 为重力势能， k 为玻尔兹曼常量， T 为温度。圆筒的顶部是一个可以无摩擦沿着轴线方向自由运动的活塞，活塞底面到圆筒内部底面的距离记作 L ，圆筒具有良好的气密性，现将圆筒底面固定在水平面上。重力加速度为 g 。

(1) 求出气体的内能。

(2) 绝热缓慢拉动活塞，求出气体的绝热方程。

(3) 用 N 个分子的该气体完成奥托循环 $abcd$ ，如图所示， ab 与 cd 为绝热过程， bc 和 da 为两个等容过程， a 点与 c 点的坐标已经标出，已知 $\frac{mgL_0}{kT_0} = \frac{2}{5}$ (无需考虑该热机的可行性)，求气体在各个阶段的非零的吸热量及一个循环的总做功，以及整个循环的效率。

可能用到的数学公式： $xd\left(\frac{1}{e^x-1}\right) = d\left(\frac{x}{e^x-1}\right) - \frac{e^{-x}dx}{1-e^{-x}}$



解：(1) 设距离底面 z 处的气体分子数密度为

$$n = A \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) \quad (1)$$

式中 A 为待定常数。由于总粒子数为 N ，故有

$$A = \frac{N/S}{\int_0^L e^{-\frac{mgz}{kT}} dz} = \frac{Nmg}{kTS} \frac{1}{1 - e^{-\frac{mgL}{kT}}} \quad (2)$$

单原子分子气体的动能为

$$U_k = \frac{3}{2} NkT \quad (3)$$

重力势能为

$$U_p = \int_0^L ASmgze^{-\frac{mgz}{kT}} dz = NkT \frac{1 - \left(1 + \frac{mgL}{kT}\right) e^{-\frac{mgL}{kT}}}{1 - e^{-\frac{mgL}{kT}}} = NkT - \frac{NmgL}{e^{\frac{mgL}{kT}} - 1} \quad (4)$$

总内能为

$$U = U_k + U_p = N \left(\frac{5}{2} kT - \frac{mgL}{e^{\frac{mgL}{kT}} - 1} \right) \quad (5)$$

(2) 在 L 处的压强为

$$p = n(L)kT = \frac{Nmg}{S \left(e^{\frac{mgL}{kT}} - 1 \right)} \quad (6)$$

绝热过程满足

$$dU + pdV = N \left[\frac{5}{2} k dT - d \left(\frac{mgL}{e^{\frac{mgL}{kT}} - 1} \right) + \frac{mg dL}{e^{\frac{mgL}{kT}} - 1} \right] = 0 \quad (7)$$

经过简单的数学处理, 可以得到

$$\frac{5}{2} \frac{dT}{T} = \frac{mgL}{kT} d \left(\frac{1}{e^{\frac{mgL}{kT}} - 1} \right) = d \left(\frac{\frac{mgL}{kT}}{e^{\frac{mgL}{kT}} - 1} \right) - d \ln \left(1 - e^{-\frac{mgL}{kT}} \right) \quad (8)$$

$$\frac{5}{2} \ln T + \ln \left(1 - e^{-\frac{mgL}{kT}} \right) - \frac{\frac{mgL}{kT}}{e^{\frac{mgL}{kT}} - 1} = \text{Const} \quad (9)$$

(3) 先求出 b 点和 d 点的温度, 根据绝热方程 (9):

$$\frac{5}{2} \ln \frac{2T_0}{T_b} + \ln \frac{\left(1 - e^{-\frac{1}{5}} \right)}{\left(1 - e^{-\frac{4T_0}{5T_b}} \right)} - \frac{1}{5 \left(e^{\frac{1}{5}} - 1 \right)} = - \frac{4T_0}{5T_b \left(e^{\frac{4T_0}{5T_b}} - 1 \right)} \quad (10)$$

$$\frac{5}{2} \ln \frac{T_0}{T_d} + \ln \frac{\left(1 - e^{-\frac{4}{5}} \right)}{\left(1 - e^{-\frac{2T_0}{5T_d}} \right)} - \frac{4}{5 \left(e^{\frac{4}{5}} - 1 \right)} = - \frac{2T_0}{5T_d \left(e^{\frac{2T_0}{5T_d}} - 1 \right)} \quad (11)$$

解得:

$$T_b = 1.272T_0, \quad T_d = 1.563T_0 \quad (12)$$

每个点的内能为:

$$U_a = 3.193NkT_0 \quad (13)$$

$$U_b = 2.267NkT_0 \quad (14)$$

$$U_c = 1.847NkT_0 \quad (15)$$

$$U_d = 2.536NkT_0 \quad (16)$$

根据热力学第一定律可得:

$$W = 0.238NkT_0 \quad (17)$$

$$Q_{da} = U_a - U_d = 0.658NkT_0 \quad (18)$$

$$Q_{bc} = U_c - U_b = -0.420NkT_0 \quad (19)$$

效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_{da}} = 36.2\% \quad (20)$$

评分标准: 本题满分 50 分。

第 (1) 问 14 分: (3) 式 2 分, (1) (2) (4) (5) 式 3 分;

第 (2) 问 16 分: (6) (7) (9) (8) 式各 4 分;

第 (3) 问 20 分: (13) (14) (15) (16) (18) (19) 式各 1 分, (17) 式 2 分, (10)

(11) (12) (20) 式各 3 分。

七、(40 分) 相对论性气体

我们已经熟知经典情形气体的统计分布, 现在考虑相对论情形下近独立气体的统计分布

以及有关结论。以下所有讨论仅针对非常稀薄的单原子分子气体。

(1) 在相对论情形下, 认为玻尔兹曼分布仍然成立, 即温度为 T 时, 粒子在动量空间 (即粒子在三个方向的动量共 3 个独立参量张成的空间) 内粒子总能量为 ε 处的概率密度正比于 $e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$ 。

考虑单个粒子静质量为 m_0 的气体, 设 $\beta = \frac{v}{c}$, 其中 v 为粒子速度, c 为光速。请证明, 相对论情况下麦克斯韦速率分布函数为

$$f(\beta) = A e^{-\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2} kT}} \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (1)$$

其中 A 为归一化常数 (不必算出来), 使分布函数满足 $\int_0^1 f(\beta) d\beta = 1$ 。

提示: 动量空间类似于 Boltzmann 速率分布中讨论的速度空间。两者在计算上的区别在于, 动量空间的微元是 $dp_x dp_y dp_z$, 而速度空间的微元是 $dv_x dv_y dv_z$ 。

(2) 为便于计算, 我们接下来考虑所有粒子速率相同的情形, 仍然设单个粒子静质量为 m_0 , 参量 $\beta = \frac{v}{c}$ 。

(2.1) 我们先考虑一维情形。N 个相对论性粒子在长为 L 、横截面积为 S 的绝热气缸中作一维运动, 粒子之间碰撞为弹性。用外力 F 缓慢向内推进活塞, 不计摩擦等能量耗散, 求此过程中 F 和 L 满足的关系式。已知初态时 $F = F_0$ 、 $L = L_0$ 。

(2.2) 然后我们考虑三维情形。N 个相对论性粒子在体积 V 中自由运动, 各粒子运动互相独立。分子速率用参量 β 表示, 请用 N, V, β 表示出气体压强 P , 并新定义温度函数 $T(\beta)$, 把气体状态方程写作 $PV = NkT$ 的形式。

(2.3) 接 (2.2)。利用新定义的温度函数表示出气体内能 $U(T)$ (温度为零时内能取为零)。

解: (1) 首先仿照麦克斯韦速率分布的推导过程, 先写出动量空间的概率微元:

$$d^3w = C e^{-\frac{\sqrt{m_0^2 c^4 + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) c^2}}{kT}} dp_x dp_y dp_z \quad (1)$$

变换至球坐标:

$$dp_x dp_y dp_z = \sin \theta p^2 dp d\theta d\varphi \quad (2)$$

对两个角度坐标积分, 得到

$$dw = 4\pi p^2 C e^{-\frac{\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}}{kT}} dp \quad (3)$$

而概率微元也可表示为

$$dw = f(\beta) d\beta \quad (4)$$

并且 p 和 β 有关系

$$p = \frac{m_0 c \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (5)$$

代入即得

$$f(\beta) = A e^{-\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2} kT}} \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (6)$$

(2)

(2.1) 首先受力 $F(L, \beta)$ 容易写出

$$F(L, \beta) = \frac{2m_0\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{N\beta c}{2L} = \frac{m_0 N \beta^2 c^2}{L\sqrt{1-\beta^2}} \quad (7)$$

由功能关系

$$-F(L, \beta) \cdot dL = d\left(\frac{Nm_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \quad (8)$$

即

$$\frac{dL}{L} + \frac{d\beta}{\beta(1-\beta^2)} = d\left(\ln \frac{\beta L}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 0 \quad (9)$$

得到

$$\frac{\beta L}{\sqrt{1-\beta^2}} = \text{Const} = C \quad (10)$$

由 (7) 式解得 (只保留有意义解)

$$\beta = \sqrt{\frac{LF}{m_0 N c^2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{LF}{2m_0 N c^2}\right)^2} - \frac{LF}{2m_0 N c^2} \right]} \quad (11)$$

代入 (10) 式消去 β 得

$$L \sqrt{\frac{LF}{m_0 N c^2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{LF}{2m_0 N c^2}\right)^2} + \frac{LF}{2m_0 N c^2} \right]} = C \quad (12)$$

代入初始条件, 消去 C , 再适当变换得

$$L^4 F^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2m_0 N c^2}{LF}\right)^2} + 1 \right] = L_0^4 F_0^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2m_0 N c^2}{L_0 F_0}\right)^2} + 1 \right] \quad (13)$$

(2.2) 入射粒子方向和垂直 $d\vec{S}$ 方向夹角 θ 到 $\theta + d\theta$ 在单位时间入射的粒子数为

$$\frac{dn(\theta)}{dt} = N \cdot \frac{\beta c dS \cos \theta}{V} \cdot \frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} \quad (14)$$

压强为单位时间粒子作用于单位面积的总冲量, 有

$$P = \int \frac{2m_0 c \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cos \theta \cdot \frac{dn(\theta)}{dS dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Nm_0 c^2 \beta^2}{V \sqrt{1-\beta^2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \quad (15)$$

积分得

$$P = \frac{Nm_0 c^2 \beta^2}{3V \sqrt{1-\beta^2}} \quad (16)$$

定义温度

$$T(\beta) = \frac{m_0 c^2 \beta^2}{3k \sqrt{1-\beta^2}} \quad (17)$$

则有

$$PV = NkT \quad (18)$$

(2.3) 令 $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = x$, 则 (17) 式可化为

$$x^2 - \frac{3kT}{m_0 c^2} x - 1 = 0 \quad (19)$$

舍去无意义解，得

$$x = \frac{3kT}{2m_0c^2} + \sqrt{\left(\frac{3kT}{2m_0c^2}\right)^2 + 1} \quad (20)$$

最后内能函数为

$$U(T) = Nm_0c^2(x - 1) = N\left(\frac{3}{2}kT + \sqrt{\left(\frac{3}{2}kT\right)^2 + m_0^2c^4 - m_0c^2}\right) \quad (21)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 12 分：(3) (4) (5) 式各 4 分；

第 (2) 问 28 分：

第 (2.1) 问 12 分：(7) (8) (10) (11) 式各 2 分，(13) 式 4 分；

第 (2.2) 问 10 分：(15) 式 3 分，(16) 式 3 分，(17) 式 4 分；

第 (2.3) 问 6 分：(20) (21) 式各 3 分。