

# 第 17 届 CPHOS 物理竞赛联考（复赛模拟赛）

## 理论试题

本试题于 2023 年 8 月 31 日 18:00 发布，最后更新于 2023 年 8 月 31 日 18:20。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

答题卡上传

2023/9/1 12:00 - 2023/9/4 18:00

阅卷

2023/9/5 08:00 - 2023/9/10 18:00

非正式成绩

2023/9/11 08:00

成绩申诉

2023/9/11 09:00 - 2023/9/11 16:00

正式成绩

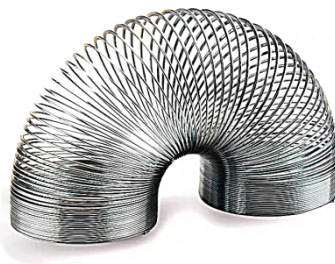
2023/9/11 20:00

### 考生须知

1. 理论试题共 **6** 页，理论答题卡共 **8** 页，答题时间 **180** 分钟，试题满分 **320** 分。
2. 请在答题卡的指定答题区域内答题，试题和草稿纸上的内容将不会作为评分参考，不可申请答题卡加页。
3. 若发现试题存在问题，请向领队（教练）反映，由其转达至相关微信群聊。
4. 试题答案及相关分析均会在官方网站 [www.cphos.cn](http://www.cphos.cn) 上发布。

### 一、（40 分）

如图所示，彩虹弹簧是生活中常见的一种玩具。假设一根质量为  $m$ ，劲度系数为  $k$  的匀质弹簧，且弹簧劲度系数足够小以至于弹簧原长相对自由悬挂时的伸长量可忽略不计，现将弹簧上端固定后竖直悬挂。（重力加速度为  $g$ ）



（1）求平衡状态下弹簧不同位置拉力与距悬挂点距离的关系。

（2）突然撤去上端的约束，假设在下落过程中，上方弹簧作非弹性碰撞后连成整体下落，下方未发生过碰撞的弹簧保持静止，直至碰撞传递至底部弹簧，弹簧恢复原长。

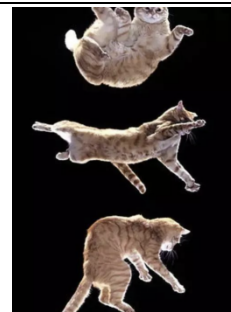
（2.1）求该过程中弹簧上端下落的距离和下落时间所满足的方程和该下落过程的总用时。

（2.2）求整个下落过程中因非弹性碰撞造成的机械能损失。

### 二、（50 分）

猫可以通过在空中转体调整姿态从而减轻自己从高处落下时受到的伤害。猫处于腾空状态时，空气阻力能提供的外力矩很小，我们可近似认为降落过程中猫的角动量是守恒的。那么猫又是如何转体的呢？本题将介绍猫在保证角动量始终为 0 的条件下进行转体的方式并提出相关的问题。

猫在转体前首先会弯曲自己的身体 (从平直状态变为弯曲), 为了简化, 我们把猫的身体分为 A、B、C 三个部分 (如图 1)。A、C 两部分是高为  $L$ , 半径为  $r$  的两块圆柱形刚体, B 部分是长为  $d$ , 半径也为  $r$  的一块圆柱体弯曲而成的物体 (原圆柱体中所有平行于高的线段全部弯曲成共轴的圆弧, 且同一段圆弧各部分应变相同, 原圆柱体的中轴线弯曲前后长度保持不变。整个表面光滑, 没有法向量的方向突变)。弯曲前猫的身体各部分密度为  $\rho$ , 弯曲后 A、C 的轴与水平方向夹角为  $\theta$ 。



已知  $L = 20\text{ cm}$ 、 $d = 10\text{ cm}$ 、 $r = 7\text{ cm}$ 、 $\theta = 30^\circ$ 、 $\rho = 1\text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ 。最终结果必须代入数据, 且保留四位有效数字。

(1) 求完成弯曲后猫的质心相对于 B 的中轴线最低点的高度  $h$ 。

(2) 动力学部分。

(2.1) 完成弯曲后, 猫的 A、C 两部分将开始旋转, B 也随之开始运动, 猫整体 (即中轴线) 转动的角速度大小  $\Omega$ , 在以  $\vec{\Omega}$  绕猫的质心点转动的参照系里 A、C 沿如图所示的方向以  $\omega$  的角速度旋转, 求此时在以  $\vec{\Omega}$  绕猫的质心点转动的参照系里猫的总角动量  $J$  (保留  $\omega$ )。

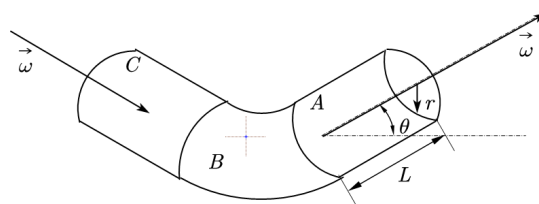


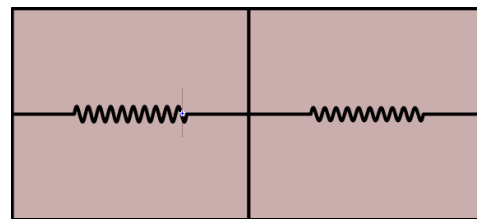
图 1

(2.2) 为了满足猫的总角动量为 0 的条件, 猫的整体必定会发生转动以抵消 (2.1) 中运动所产生的角动量, 求猫整体转动的角速度大小  $\Omega$  (用  $\omega$  表示)。

(2.3) 假设猫初始时刻背朝下且平直, 它有总共  $T = 2\text{ s}$  的时间把自己调整成背朝上且平直的状态, 且猫的一次弯曲 (从平直状态变成弯曲或者从弯曲状态变成平直) 需要耗时  $t = 0.2\text{ s}$  的时间, 求猫所需的最小的  $\omega$ 。

### 三、(40 分)

如图, 在封闭绝热的长方体气缸内, 有一面积为  $A$ , 质量为  $m$ , 厚度为  $d$ , 导热系数为  $K$  的活塞。活塞与气缸光滑的紧密接触, 活塞中央部位两端分别连接两个同样的弹簧, 弹簧的劲度系数为  $k$ , 质量不计。初始时刻, 两侧气体体积各为  $V_0$ , 其内部均充满摩尔数为  $n$  的、初温为  $T_0$  的单原子理想气体, 弹簧为原长。现在我们来考虑以下问题:



(1) 不考虑活塞左右两气室热传导, 求出活塞的微振动的周期  $t_1$ 。

(2) 请写出关于左侧气温  $T_1$ , 右侧气温  $T_2$ , 活塞向右位移  $x$  的动力学方程。

提示: 不一定是微振动

(3) 下面认为导热系数  $K$  很小, 导致活塞的振幅慢慢衰减, 活塞的振动认为是微振动。

(3.1) 活塞静止不动后体系的熵为  $S_0$ , 写出体系熵的表达式, 用活塞在最大位移的两侧温度差  $\Delta T_{\max}$  表示, 保留至  $\Delta T$  的最低非零阶。

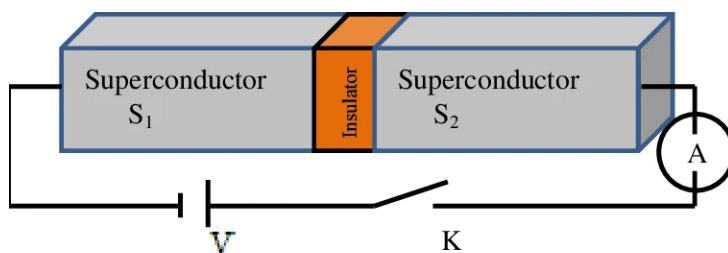
(3.2) 接上问, 体系的熵增来源于热传导, 据此计算单位时间熵增的时间平均值, 用活塞在最大位移的两侧温度差  $\Delta T_{\max}$  表示。求出活塞振动振幅衰减到原来的一半的时间。

提示: 傅里叶热传导定律

$$\frac{dQ}{dt dS} = -K \frac{dT}{dz} \quad (1)$$

## 四、(40 分)

约瑟夫森结 (Josephson junction), 或称为超导隧道结。这种结一般是由两块超导体夹以某种很薄的势垒层而构成的结构, 其中势垒层的厚度远小于电子对的相干长度。一种较为典型的约瑟夫森结的结构是 S(超导体)—I(半导体或绝缘体)—S(超导体), 简称 SIS。在 SIS 之中超导电子对可以利用隧道效应, 穿过势垒层到达另一侧的超导体。



本题中我们假设超导体中的载流子是超导电子对, 电荷量为  $-2q$ , 其中  $q$  代表电子的电荷量的绝对值  $e$

(1) 考虑一个简化模型, 如上图。为约瑟夫森结施加恒定电压  $V$ , 如果闭合开关  $K$ , 那么将会有微小电流穿过势垒层 (设电流正方向为  $S_1$  流向  $S_2$ )。设  $S_1$  部分超导电子对的波函数为  $\psi_1(t) = \sqrt{n_{s1}(t)}e^{i\phi_1(t)}$ ,  $S_2$  部分超导电子对的波函数为  $\psi_2(t) = \sqrt{n_{s2}(t)}e^{i\phi_2(t)}$ 。其中  $n_{s1}(t)$ ,  $n_{s2}(t)$  表示  $S_1$ ,  $S_2$  部分总的超导电子对数。 $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  满足如下的两个方程:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = qV\psi_1 + k\psi_2 \quad (1)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -qV\psi_2 + k\psi_1 \quad (2)$$

设  $2n_s = n_{s1} + n_{s2}$ , 且在本题考虑的时间范围内  $|n_{s1} - n_{s2}| \ll n_s$ , 证明电流  $j$  可以表示为  $j = j_c \sin(\phi_0 + \omega t)$  的形式, 其中  $\phi_0$  为与系统初始条件相关的常数, 令  $\omega = \frac{2qV}{\hbar}$  并求  $j_c$ ,  $j_c$  用  $k, q, V, \hbar, n_s$  表示, 且  $j_c, \omega$  为正。

提示: 波函数  $\psi$  的模方  $|\psi|^2$  代表电子对的数密度。

(2) 设  $V = V_0(1 + \mu \cos \omega_1 t)$ ,  $\omega_0 = \frac{2qV_0}{\hbar} \neq 0$

(2.1) 若  $j$  中含有直流分量, 求  $\omega_0, \omega_1$  之间满足的关系。(提示: 展开为泰勒级数, 无需讨论  $\phi_0$  满足的条件)

(2.2) 若  $\omega_0, \omega_1$  满足 (2.1) 中的关系, 求电流  $j$  的直流分量  $\langle j \rangle$  (即平均值) 和  $j_c$  的比值  $f(n, \mu, \phi_0) = \frac{\langle j \rangle}{j_c}$ 。可以保留为无穷级数的形式。(其中  $n = \frac{\omega_0}{\omega_1}$  且  $t = 0$  时,  $j = j_c \sin \phi_0$ )

代入并给出  $f\left(2, \frac{1}{4}, \frac{\pi}{3}\right) f\left(3, \frac{1}{9}, \frac{\pi}{6}\right)$  的值, 结果保留 4 位有效数字。

提示: 设  $m$  为正整数, 则:

$$\sin^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \left( C_{2m}^m + 2 \sum_{k=1}^m (-1)^k C_{2m}^{m+k} \cos(2kx) \right) \quad (3)$$

$$\sin^{2m+1} x = \frac{1}{2^{2m}} \left( \sum_{k=0}^m (-1)^k C_{2m+1}^{m+k+1} \sin((2k+1)x) \right) \quad (4)$$

其中  $C_a^b$  是组合数:  $C_a^b = \frac{a!}{b!(a-b)!}$ 。

## 五、（40 分）

旧量子论是出现于 1900 年至 1925 年之间的量子理论。虽然并不很完整或一致，这些启发式理论是对于经典力学所做的最初始的量子修正。下面，我们从经典力学出发，计算旧量子论的量子力学。

我们考虑一个在二维各向同性谐振子势  $V(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$  中运动的粒子，质量为  $m$ ，不考虑相对论效应。

（1）在经典力学中，拉格朗日量的定义为  $L = T - V$ ，其中  $T$  是粒子动能， $V$  是势能，用  $x, \dot{x}, y, \dot{y}$  来表达  $L$ ；

（2）在经典力学中，广义动量的定义为：

$$P_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, P_y \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$$

将系统的总能量  $E$  用  $x, P_x, y, P_y$  来表达；

（3）因为在总能量的表达式中， $x$  方向和  $y$  方向是互相独立的，所以数学上有：

$$E(x, P_x, y, P_y) = E_x(x, P_x) + E_y(y, P_y)$$

而  $E_x, E_y$  分别是守恒量，在  $x - P_x$  图上画出轨道，可以包含  $m, k, E_x$ ；

（4）上面画出的图被称作相图，而轨道被称作相轨，在旧量子论中，量子化条件为任何一对广义坐标和广义动量所对应的相图的面积都是普朗克常数的整数倍，也就是：

$$\oint P dq = n_q h$$

据此求出谐振子的量子化能级，可以包含  $h, k, m, n_x, n_y$ ；

（5）下面采用另一种广义坐标  $(r, \theta)$  进行计算，求出总能量的表达式  $E(r, P_r, \theta, P_\theta)$ ；

（6）根据量子化条件，求出谐振子的能级，可以包含  $h, k, m, n_\theta, n_r$ 。

可能用到的积分公式：

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{(r^2 - r_1^2)(r_2^2 - r^2)}}{r} dr = \frac{\pi(r_2 - r_1)^2}{4}$$

## 六、（60 分）

如今大部分行李箱的轮子采用了“万向轮”的设计，如图 1。每个万向轮有一个水平转轴和一个竖直转轴。水平转轴让轮子转起来，竖直转轴则可以调整轮子的方向。这种万向轮的设计和汽车的轮子不同，它的竖直转轴和水平转轴异面垂直，如图 2 所示。这种设计让使用者只需要通过推动箱子就能使四个轮子转到合适的角度。



图 1



图 2

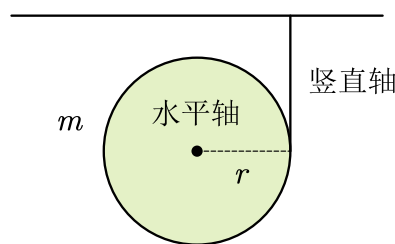


图 3

现在我们如此对万向轮建模：轮子视为半径为  $r$ ，质量为  $m$  的匀质薄圆盘。竖直轴与水

平轴的距离也为 $r$ ，如图 3。竖直轴和水平轴的质量和摩擦均不计。箱体视为质量为 $M$ ，三边长分别为 $a, b, c$ 的匀质实心长方体。手拉杆质量不计。四个轮子的竖直轴接在箱底的四个角上，如图 4。

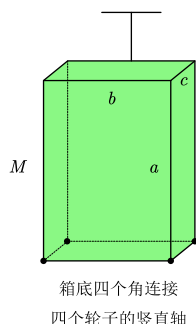


图 4

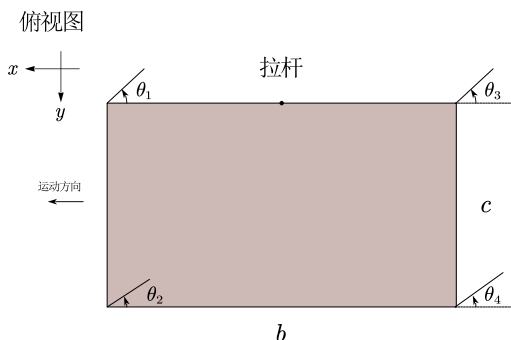
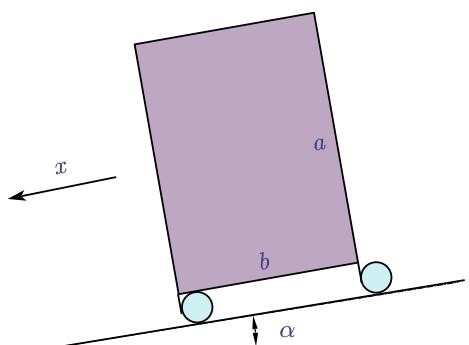


图 5

下面规范参数的选取。如图 5，规定四个轮子和 $+x$ 方向的夹角为正方向。记四个轮子的自转角速度为 $\omega_{1,2,3,4}$ ，其正方向的选取标准为：当 $\theta_{1,2,3,4} = 0$ 时， $\omega_{1,2,3,4}$ 的正方向为 $+y$ 方向。这个正方向会跟着 $\theta_{1,2,3,4}$ 绕竖直轴转。

(1) 考虑箱子在外力作用下在水平面上沿 $+x$ 方向作速度为 $v_0$ 的匀速直线运动，初始四个角度分别为 $\theta_{10}, \theta_{20}, \theta_{30}, \theta_{40} \in (-\pi, \pi)$ 。假设四个轮子始终保持纯滚，与地面间没有相对滑动。求四个角度随时间的变化关系。

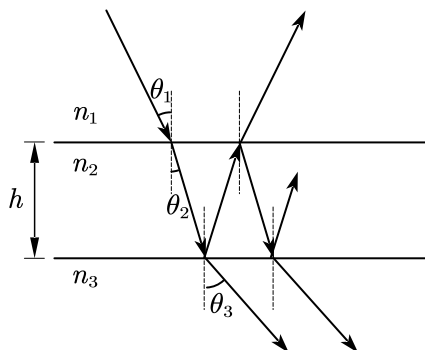
(2) 接(1)，取消纯滚的条件，假设四个轮子都一定会与地面发生相对滑动，且摩擦力大小总是恒定为 $f_0$ 。求出此时四个轮子的运动微分方程(组)，用 $\theta_{1,2,3,4}$ 、 $\omega_{1,2,3,4}$ 及其对时间的各阶导数表示。(假设， $|\dot{\theta}_i r|, |\omega_i r|$ 相比速度 $v_0$ 都相对较小，但不要做小量近似。)



(3) 现给定一个斜面，倾角为 $\alpha$ 。将箱子从斜面上某处静止释放，初始 $\theta_1 = \theta_3 = -\theta_2 = -\theta_4 = \theta_0$ 。释放的时候，箱子的 $+x$ 方向沿斜面向下。求某一瞬间四个角度的变化率，答案用此时的四个角度表示。假设在考虑的时间范围内箱子不会翻倒且四个轮子始终保持纯滚。

请注意答题卡上(1)(2)(3)问的填写位置

七、(50 分)



如图所示为一上下表面平行的厚度为 $h$ 的膜，其两侧折射率不同，其中上方空间折射率为 $n_1$ ，膜的折射率为 $n_2$ ，下方空间折射率为 $n_3$ 。现用真空中波长为 $\lambda$ 的平行光从上方空间入射，入射角 $\theta_1$ 已知，入射光在上方空间内的光强为 $I_0$ 。入射光在膜的上下表面会发生多次折射和反射，最终干涉形成总透射光和总反射光。

设图中光线自上方空间入射至膜中时，单次入射的振幅反射率为 $r_1$ ，振幅透射率为 $t_1$ ；自膜中入射到上方空间时，单次入射的振幅反射率为 $r_1'$ ，振幅透射率为 $t_1'$ ；

自膜中入射到下方空间时，单次入射的振幅反射率为 $r_2$ ，振幅透射率为 $t_2$ 。其中 $r_1$ 、 $r_2$ 已知， $r'_1$ 、 $t_1$ 、 $t'_1$ 和 $t_2$ 未知。

(1) 利用光路可逆的性质，证明斯托克斯倒逆关系

$$\begin{cases} r'_1 = -r_1 \\ t_1 t'_1 = 1 - r_1^2 \end{cases} \quad (1)$$

(2) 上方空间内，多束出射光在无穷远处干涉形成总的反射光。计算到达无穷远处的相邻两束光之间的相位差 $\delta\varphi$ ，(3) (4) 问中认为 $\delta\varphi$ 已知并在结果中保留 $\delta\varphi$ 。

(3) 计算上方空间内的多束反射光干涉后形成的总反射光光强 $I_R$ 。

(4) 计算下方空间内的多束反射光干涉后形成的总透射光光强 $I_T$ 。

(5) 若 $\theta_1 = 0$ ，此时有

$$\begin{cases} r_1 = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \\ r_2 = \frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2} \end{cases} \quad (2)$$

此时当 $n_1$ 、 $n_2$ 、 $n_3$ 和 $\lambda$ 满足什么条件时，总反射光光强为零？

### 版权信息

#### 命题人

蒋弘杰 张建明 张 源 戴正宇 侯宗岳 陈浩楠 甄林睿

#### 审题人

朱信霖 肖子晁 向滢濤 王子岳 赵瀚宏 肖亦铖

### 联系方式



微信公众号

CPHOS



官方网站

[www.cphos.cn](http://www.cphos.cn)



CPHOS 论坛

邮箱

[service@cphos.cn](mailto:service@cphos.cn)

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考