第 17 届 CPHOS 物理竞赛联考（复赛模拟赛）

理论答案

本文件于 2023 年 9 月 4 日 18: 00 首次发布，最后更新于 2023 年 9 月 5 日 00: 16 。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见文件末尾。

答题卡上传	阅卷
2023/9/1 12:00 - 2023/9/4 18:00	2023/9/5 08:00 - 2023/9/10 18:00

非正式成绩	成绩申诉	正式成绩
2023/9/11 08:00	2023/9/11 09:00 - 2023/9/11 16:00	2023/9/11 20:00

一、（40 分）

解：（1）沿弹簧建立自然坐标ξ，设ξ处弹簧距顶端距离为x，则由胡克定律拉力为：

$$F = k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} \tag{1}$$

又

$$F = (1-\xi)mg \tag{2}$$

由式（1）（2）可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} = \frac{mg}{k}(1-\xi) \tag{3}$$

对式（3）积分得

$$x = \frac{mg}{2k}(2\xi - \xi^2) \tag{4}$$

所以x处所受张力为

$$F = \sqrt{m^2g^2 - 2kmgx} \tag{5}$$

（2）

（2.1）根据题设，下落过程中对弹簧整体使用动量定理，下落距离为y时有

$$mg\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\xi m v) \tag{6}$$

其中

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

$$\xi = 1 - \sqrt{1 - \frac{2ky}{mg}} \tag{8}$$

由式（6）（7）（8）可得

$$mg\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(m(1-\sqrt{1-\frac{2ky}{mg}})\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \tag{9}$$

直接积分可得

$$mgt\mathrm{d}t=m(1-\sqrt{1-\frac{2ky}{mg}})\mathrm{d}y \tag{10}$$

再次积分可得

$$t=\sqrt{\frac{2y}{g}+\frac{2m}{3k}\left(1-\frac{2ky}{mg}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2m}{3k}} \tag{11}$$

令

$$y=\frac{mg}{2k} \tag{12}$$

得下落总用时

$$t_{\text{total}}=\sqrt{\frac{m}{3k}} \tag{13}$$

（2.2）由式（10）（12）得末速度

$$v_{\text{end}}=gt \tag{14}$$

代入t_{total}得

$$v_{\text{end}}=\sqrt{\frac{m}{3k}}g \tag{15}$$

初态势能为

$$E_{p_0}=\int_0^1\left(-mgx+\frac{F^2}{2k}\right)\mathrm{d}\xi \tag{16}$$

代入式（4）积分得

$$E_{p_0}=-\frac{m^2g^2}{6k} \tag{17}$$

而末态重力势能

$$E_p=-\frac{m^2g^2}{2k} \tag{18}$$

机械能损失

$$\Delta E=-\left(E_p+\frac{1}{2}mv_{\text{end}}^2-E_{p_0}\right) \tag{19}$$

由式（15）（17）（18）（19）得

$$\Delta E=\frac{m^2g^2}{6k} \tag{20}$$

评分标准：本题满分 40 分。
第（1）问 10 分：（1）（2）（3）（4）（5）式 2 分；
第（2）问 30 分：
第（2.1）小问 16 分：（6）（7）（8）（9）（10）（11）（12）（13）式 2 分；
第（2.2）小问 14 分：（14）（15）（16）（17）（18）（19）（20）式 2 分；

二、（50 分）

解：（1）B 部分中心轴的曲率半径 R：

$$R=\frac{d}{2\theta}=9.549\ cm \tag{1}$$

质心相对高度：

$$h=\frac{2L\left[\frac{L}{2}\sin\theta+R(1-\cos\theta)\right]+\left[2\int_0^\theta R(1-\cos\varphi)\,Rd\varphi\right]}{d+2L}$$
$$=\frac{L^2\sin\theta+\frac{Ld}{\theta}(1-\cos\theta)+\frac{d^2}{2\theta^2}(\theta-\sin\theta)}{d+2L}=5.110\ cm \tag{2}$$

（2）

（2.1）将整个物体垂直中轴切成无数个圆柱形的小薄片，根据形变的形式可知，每一个薄片旋转产生的角动量:

$$d\vec{J}=\frac{1}{2}\rho\pi r^4\omega d\vec{s} \tag{3}$$

($\vec{s}$指中轴线的位矢)

总角动量：

$$\vec{J}=\frac{1}{2}\rho\pi r^4\omega\left(2L\cos\theta+\frac{d}{\theta}\sin\theta\right)\boldsymbol{e_x}=1.667\times10^{-2}\omega\ \ kg\cdot m^2\cdot s^{-1} \tag{4}$$

（2.2）先计算转动惯量

A、C 部分绕通过自身质心的水平轴的转动惯量为：

$$I_A=I_c=\frac{1}{4}\rho\pi r^4L(1+\cos^2\theta)+\frac{1}{12}\rho\pi r^2L^3\sin^2\theta=\ 9.166\times10^{-3}\ kg\cdot m^2 \tag{5}$$

B 部分绕通过中轴线最低点转动的转动惯量为：

$$dI=(\frac{d}{2\theta}(1-\cos\varphi))^2dm+\frac{1}{4}(1+\cos^2\varphi)r^2dm$$

积分得

$$I_B=\rho\pi r^2\frac{d^3}{8\theta^3}\left(-4\sin\theta+3\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)+\rho\pi r^4\frac{d}{8\theta}\left(3\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)=3.659\times10^{-3}\ kg\cdot m^2 \tag{6}$$

由平行轴定理：

$$I'=I_B+I_A+I_C+(m_A+m_c)\left[\frac{L}{2}\sin\theta+\frac{d}{2\theta}(1-\cos\theta)\right]^2=4.627\times10^{-2}\ kg\cdot m^2 \tag{7}$$

$$I=I'-(m_A+m_c+m_B)h^2 \tag{8}$$

可得：

$$I=\frac{1}{2}\rho\pi r^4L(1+\cos^2\theta)+\frac{1}{6}\rho\pi r^2L^3\sin^2\theta+\rho\pi r^2\frac{d^3}{8\theta^3}\left(-4\sin\theta+3\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)+$$
$$\rho\pi r^4\frac{d}{8\theta}\left(3\theta+\frac{1}{2}sin2\theta\right)+2\rho\pi r^2L\left[\frac{L}{2}\sin\theta+\frac{d}{2\theta}(1-\cos\theta)\right]^2$$
$$-\rho\pi r^2\frac{[L^2\sin\theta+\frac{Ld}{\theta}(1-\cos\theta)+\frac{d^2}{2\theta^2}(\theta-\sin\theta)]^2}{d+2L}=2.618\times10^{-2}\ kg\cdot m^2 \tag{9}$$

动量为 0： $\vec{J}+I\vec{\Omega}=0$

解得：

$$\left|\vec{\Omega}\right| = \frac{\omega r^2\left(L\cos\theta + \frac{d}{2\theta}\sin\theta\right)}{W} = 0.6367\,\omega \tag{10}$$

$$W = \frac{1}{2}r^2L(1+\cos^2\theta) + \frac{1}{6}L^3\sin^2\theta + \frac{d^3}{8\theta^3}\left(-4\sin\theta + 3\theta + \frac{1}{2}\sin2\theta\right)$$

$$+r^2\frac{d}{8\theta}\left(3\theta + \frac{1}{2}\sin2\theta\right) + 2L\left[\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{d}{2\theta}(1-\cos\theta)\right]^2$$

$$-\frac{\left[L^2\sin\theta + \frac{Ld}{\theta}(1-\cos\theta) + \frac{d^2}{2\theta^2}(\theta-\sin\theta)\right]^2}{d+2L}$$

（2.3）可用于转体的时间：

$$\tau = T - 2t = 1.6\ \mathrm{s} \tag{11}$$

临界情况下有

$$(\omega - \Omega)\tau = \pi \tag{12}$$

代入数据计算可解得：

$$\omega_{min} = 5.405\, rad \cdot s^{-1} \tag{13}$$

评分标准：本题满分 50 分。最终结果没有代入数据则不给结果分，所有数值结果最后一位可以存在误差。结果分为（2）、（4）、（9）、（10）、（13）

第（1）问 7 分：（1）式 2 分，（2）式 5 分；
第（2）问 43 分：
第（2.1）小问 7 分：（3）式 2 分，（4）式 5 分；
第（2.2）小问 24 分：（5）（6）（7）（8）（9）（10）式 4 分
（9）式算出正确结果则（5）~（9）全部给分
第（2.3）小问 12 分：（11）（12）式各 3 分，（13）式 6 分；

三、（40 分）

解：（1）由气体绝热的状态方程，有

$$PV^{\gamma} = Const \tag{1}$$

左右两侧压强差

$$\delta P = -2p_0 \times \gamma\frac{\delta x}{l_0} \tag{2}$$

可得

$$\delta F = -\left(2k + \frac{2p_0A\gamma}{l_0}\right)\delta x \tag{3}$$

所以

$$t_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k + \frac{10nRT_0A^2}{3V_0^2}}} \tag{4}$$

（2）有活塞的运动方程：

$$m\ddot{x}=-2kx-nRA\left(\frac{T_2}{V_0-Ax}-\frac{T_1}{V_0+Ax}\right) \tag{5}$$

还有两边气体的热力学定律：

$$\frac{3nR\dot{T}_1}{2}=\frac{KA(T_2-T_1)}{d}-\frac{nRT_1A}{V_0+Ax}\dot{x} \tag{6}$$

$$\frac{3nR\dot{T}_2}{2}=\frac{KA(T_1-T_2)}{d}+\frac{nRT_2A}{V_0-Ax}\dot{x} \tag{7}$$

（3）

（3.1）从某一时刻到活塞停止，体系熵的变化量

$$\delta S=\frac{\delta Q_p}{T} \tag{8}$$

可以认为在任意时刻，有

$$\delta Q=-\delta E_{k_{max}} \tag{9}$$

即有

$$S=S_0-\frac{mv^2}{2T_0} \tag{10}$$

又有绝热过程

$$TV^{\gamma-1}=Const \tag{11}$$

知

$$\frac{\delta T}{T_0}=-\frac{2\delta V}{3V_0}=\frac{2A\Delta x}{3V_0} \tag{12}$$

且有

$$\frac{1}{2}\left(2k+\frac{10nRT_0A^2}{3V_0^2}\right)(\Delta x)^2=\frac{1}{2}mv^2 \tag{13}$$

可知

$$S=S_0-\frac{9V_0^2\left(2k+\frac{10nRT_0A^2}{3V_0^2}\right)}{32T_0^3A^2}(\Delta T_{max})^2 \tag{14}$$

（3.2）由于熵的增加是由热传导导致的，知

$$\dot{S}=\frac{\partial Q_p}{\partial t}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)=\frac{\frac{KA}{T_0^2}(T_2-T_1)^2}{d} \tag{15}$$

有对周期平均：

$$\bar{\dot{S}}=\frac{KA}{2T_0^2d}\Delta T_{max}^2 \tag{16}$$

又

$$\bar{\dot{S}}=-\frac{9V_0^2\left(2k+\frac{10nRT_0A^2}{3V_0^2}\right)}{16T_0^3A^2}\Delta T_{max}\times(\Delta \dot{T}_{max}) \tag{17}$$

故

$$\frac{9V_0^2d\left(2k+\frac{10nRT_0A^2}{3V_0^2}\right)}{8T_0KA^3}(\Delta \dot{T}_{max})=-\Delta T_{max} \tag{18}$$

半衰期为

$$t=\frac{9V_0^2d\left(2k+\frac{10nRT_0A^2}{3V_0^2}\right)}{8T_0KA^3}ln2 \tag{19}$$

评分标准：本题满分 40 分。
第（1）问 8 分：（1）（2）（3）（4）式各 2 分，
第（2）问 8 分：（5）式 4 分，（6）（7）式各 2 分。
第（3）问 24 分：
第（3.1）问 12 分，（8）（9）（10）（12）（13）（14）式各 2 分；
第（3.2）问 12 分，（15）（16）（17）（19）式各 3 分。

四、（40 分）

解：（1）直接代入可得：

$$i\hbar\left(\frac{1}{2}\frac{\partial n_{s1}}{\partial t}+in_{s1}\frac{\partial \phi_1}{\partial t}\right)=k\sqrt{n_{s1}n_{s2}}e^{i(\phi_2-\phi_1)}+qVn_{s1} \tag{1}$$

$$i\hbar\left(\frac{1}{2}\frac{\partial n_{s2}}{\partial t}+in_{s2}\frac{\partial \phi_2}{\partial t}\right)=k\sqrt{n_{s1}n_{s2}}e^{i(\phi_1-\phi_2)}-qVn_{s2} \tag{2}$$

比较实部和虚部：

$$\frac{\partial n_{s1}}{\partial t}=-\frac{\partial n_{s2}}{\partial t}=\frac{2k}{\hbar}\sqrt{n_{s1}n_{s2}}\sin(\phi_2-\phi_1) \tag{3}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t}=-\frac{qV}{\hbar}-\frac{k}{\hbar}\sqrt{\frac{n_{s2}}{n_{s1}}}cos(\phi_2-\phi_1) \tag{4}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t}=\frac{qV}{\hbar}-\frac{k}{\hbar}\sqrt{\frac{n_{s2}}{n_{s1}}}cos(\phi_2-\phi_1) \tag{5}$$

根据$|n_{s1}-n_{s2}|\ll n_s$可得$n_{s1}\approx n_{s2}\approx n_s$：

$$\omega=\frac{\partial(\phi_2-\phi_1)}{\partial t}=\frac{2qV}{\hbar} \tag{6}$$

积分有$\phi_2-\phi_1=\phi_0+\omega t$

$$j_c=2q\frac{\partial n_{s1}}{\partial t}=\frac{4kq}{\hbar}n_s\sin(\phi_0+\omega t) \tag{7}$$

（2）

（2.1）类似可知：

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t}=-\frac{qV_0}{\hbar}(1+\mu\cos\omega_1 t)-\frac{k}{\hbar}\sqrt{\frac{n_{s2}}{n_{s1}}}cos(\phi_2-\phi_1) \tag{8}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t}=\frac{qV_0}{\hbar}(1+\mu\cos\omega_1 t)-\frac{k}{\hbar}\sqrt{\frac{n_{s2}}{n_{s1}}}cos(\phi_2-\phi_1) \tag{9}$$

积分得：

$$j=j_c\sin\left(\phi_0+\omega_0 t+\frac{\mu\omega_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right) \tag{10}$$

展开得：

$$\frac{j}{j_c}=\sin(\phi_0+\omega_0 t)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{\mu\omega_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right)^{2k}+$$
$$\cos(\phi_0+\omega_0 t)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{\mu\omega_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right)^{2k+1}+\sin(\phi_0+\omega_0 t) \tag{11}$$

要求$\langle\frac{j}{j_c}\rangle\neq 0$

根据提示可得：

$$\omega_0=n\omega_1,\ n\in\mathbb{Z}^+ \tag{12}$$

（2.2）取 $\omega_0=n\omega_1$，$n\in\mathbb{Z}^+$

$$\frac{\langle j\rangle}{j_c}=\frac{\omega_1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}}\left(\begin{array}{c}\sin(\phi_0+n\omega_1 t)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{\mu\omega_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right)^{2k}+\\ \cos(\phi_0+n\omega_1 t)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{\mu\omega_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right)^{2k+1}+\sin(\phi_0+n\omega_1 t)\end{array}\right)dt \tag{13}$$

$$\frac{\langle j\rangle}{j_c}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(\mu n)^{2k}\langle\sin(\phi_0+n\theta)(\sin\theta)^{2k}\rangle+$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\mu n)^{2k+1}\langle\cos(\phi_0+n\theta)(\sin\theta)^{2k+1}\rangle \tag{14}$$

$$\langle\sin(n\theta)\,(\sin\theta)^k\rangle\begin{cases}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^k}C_k^{\frac{n+k}{2}}, & n,k\text{为奇数},\mathrm{n}\leq\mathrm{k}\\ 0, others\end{cases} \tag{15}$$

$$\langle\cos(n\theta)\,(\sin\theta)^k\rangle\begin{cases}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^k}C_k^{\frac{n+k}{2}}, & n,k\text{为偶数},\mathrm{n}\leq\mathrm{k}\\ 0, others\end{cases} \tag{16}$$

n 为奇数，

$$f(n,\mu,\phi_0)=\sum_{k=\frac{n-1}{2}}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+\frac{n+1}{2}}C_{2k+1}^{k+\frac{n+1}{2}}}{(2k+1)!\cdot 2^{2k+1}}(\mu n)^{2k+1}\sin(\phi_0) \tag{17}$$

n 为偶数，

$$f(n,\mu,\phi_0)=\sum_{k=\frac{n}{2}}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+\frac{n}{2}}C_{2k}^{k+\frac{n}{2}}}{(2k)!\cdot 2^{2k}}(\mu n)^{2k}\sin(\phi_0) \tag{18}$$

$$f\left(3,\frac{1}{9},\frac{\pi}{6}\right)\approx -3.83131\times 10^{-4} \tag{19}$$

$$f\left(2,\frac{1}{4},\frac{\pi}{3}\right)\approx 2.65039\times 10^{-2} \tag{20}$$

前 4 位正确即可

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 14 分：（1）（2）式 1 分，（3）（4）（5）式 2 分，（6）（7）式 3 分；

第（2）问共 26 分：

第（2.1）小问 8 分：（8）（9）（12）式 1 分，（11）式 2 分，（10）式 3 分；
第（2.2）小问 18 分：（13）（14）式 1 分，（19）（20）式 2 分，（15）（16）（17）（18）式 3 分。

五、（40 分）

（1）

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}k(x^2+y^2) \tag{1}$$

（2）根据定义：

$$P_x=m\dot{x} \tag{2}$$
$$P_y=m\dot{y} \tag{3}$$

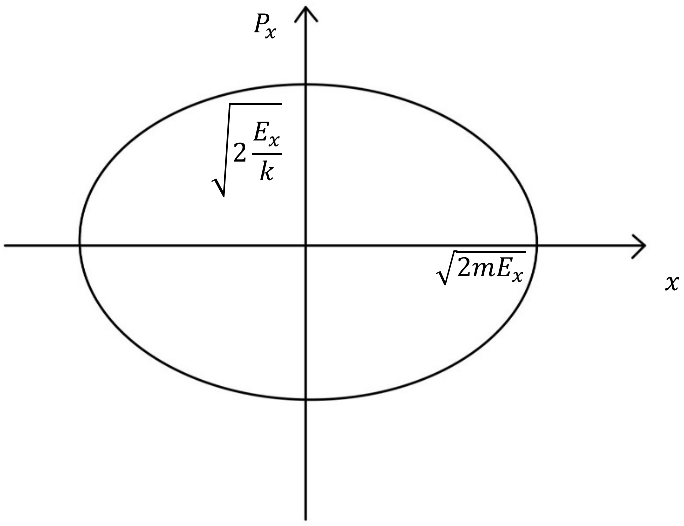
总能量为：

$$E=\frac{P_x^2+P_y^2}{2m}+\frac{1}{2}k(x^2+y^2) \tag{4}$$

（3）

$$E_x=\frac{P_x^2}{2m}+\frac{1}{2}kx^2 \tag{5}$$

在相图上画出来如下：



（4）量子化条件为：

$$\oint P_x \mathrm{d}x=n_x h,\oint P_y \mathrm{d}y=n_y h \tag{6}$$

得到：

$$\pi\cdot\sqrt{2mE_x}\cdot\sqrt{2\frac{E_x}{k}}=n_x h \tag{7}$$

$$\pi\cdot\sqrt{2mE_y}\cdot\sqrt{2\frac{E_y}{k}}=n_y h \tag{8}$$

得到：

$$E = E_x + E_y = (n_x + n_y)\frac{h\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi} \tag{9}$$

（5）

$$E = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + \frac{P_r^2}{2m} \tag{10}$$

（6）

先计算θ方向，θ方向量子化条件为：

$$\int_0^{2\pi} P_\theta \mathrm{d}\theta = n_\theta h \tag{11}$$

所以得到：

$$P_\theta = \frac{n_\theta h}{2\pi} \tag{12}$$

带入能量表达式，得到：

$$P_r = \sqrt{2mE - mkr^2 - \frac{n_\theta^2 h^2}{4\pi^2 r^2}} \tag{13}$$

r方向量子化条件为：

$$\oint P_r \mathrm{d}r = n_r h \tag{14}$$

记$2mE - mkr^2 - \frac{n_\theta^2 h^2}{r^2}$的零点分别为$r_1 < r_2$，可以写作：

$$2mE - mkr^2 - \frac{n_\theta^2 h^2}{4\pi^2 r^2} = mk\frac{(r^2 - r_1^2)({r_2}^2 - r^2)}{r^2} \tag{15}$$

于是量子化条件可以写作：

$$2\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{mk}\frac{\sqrt{(r^2 - r_1^2)({r_2}^2 - r^2)}}{r}\mathrm{d}r = n_r h \tag{16}$$

根据积分公式得到：

$$\sqrt{mk}\frac{(r_2 - r_1)^2}{2}\pi = n_r h \tag{17}$$

而r_1^2, r_2^2满足韦达定理：

$$r_1^2 r_2^2 = \frac{n_\theta^2 h^2}{4\pi^2 km} \tag{18}$$

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{2E}{k} \tag{19}$$

得到：

$$(r_2 - r_1)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 = \frac{2E}{k} - \frac{n_\theta h}{\pi\sqrt{mk}} \tag{20}$$

得到

$$E = (2n_r + n_\theta)\frac{h\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi} \tag{21}$$

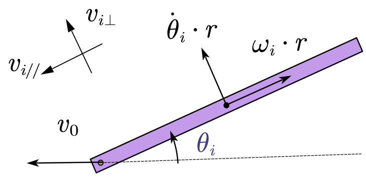
评分标准：本题满分 40 分；

评分细则待出题人给出。

六、（60 分）

解：（1）由于整个箱子作匀速直线运动，故四个竖直转轴的速度相同。而每一个竖直轴都只影响它对应轮子的运动，因此四个轮子的运动方程是独立的，只需要对其中一个分析，通过换指标就可以得到其他轮子的运动。

运动关联如图：（图中各速度叠加是轮子上与地面接触点的速度，由纯滚条件，应得0）



则有：

$$\omega_i \cdot r = v_0 \cdot \cos\theta_i \tag{1}$$

$$\dot{\theta}_i \cdot r = -v_0 \cdot \sin\theta_i \tag{2}$$

式（2）分离变量得：

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\sin\theta_i} = -\frac{v_0}{r}\mathrm{d}t \tag{3}$$

积分得：

$$\tan\frac{\theta_i}{2} = \tan\frac{\theta_{i0}}{2}\cdot\exp\left(-\frac{v_0 t}{r}\right) \tag{4}$$

其中$i = 1,2,3,4$。

解得

$$\theta_i = 2\arctan\left(\tan\frac{\theta_{i0}}{2}e^{-\frac{v_0}{r}t}\right) \tag{5}$$

其中$i = 1,2,3,4$。

（2）仍然使用前一问的速度分析。设第i个轮子上与地面接触处相对地面的速度在平行/垂直于轮子平面的分量为$v_{i//}, v_{i\perp}$。则有：

$$v_{i//} = v_0 \cdot \cos\theta_i - \omega_i \cdot r \tag{6}$$

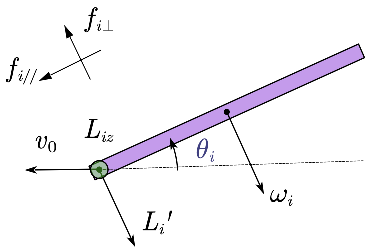
$$v_{i\perp} = v_0 \cdot \sin\theta_i + \dot{\theta}_i \cdot r \tag{7}$$

摩擦力与相对速度反向。由此可得摩擦力沿平行/垂直于轮子平面的分量：

$$f_{i//} = -\frac{v_0 \cdot \cos\theta_i - \omega_i \cdot r}{\sqrt{v_0^2 + \omega_i^2 r^2 + \dot{\theta}_i^2 r^2 - 2v_0\omega_i r \cdot \cos\theta_i + 2v_0\dot{\theta}_i r \cdot \sin\theta_i}} f_0 \tag{8}$$

$$f_{i\perp} = -\frac{v_0 \cdot \sin\theta_i + \dot{\theta}_i \cdot r}{\sqrt{v_0^2 + \omega_i^2 r^2 + \dot{\theta}_i^2 r^2 - 2v_0\omega_i r \cdot \cos\theta_i + 2v_0\dot{\theta}_i r \cdot \sin\theta_i}} f_0 \tag{9}$$

由于箱子是惯性系，不妨在箱子系考虑轮子的动力学问题。以竖直轴与轮子的切点为参考点，计算轮子在箱子系的角动量，它等于轮子质心对参考点的角动量加轮子对质心的角动量。后者可以选取惯量主轴方便地计算。



$$L_{iz}=mr^2\dot{\theta}_i+\frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}_i=\frac{5}{4}mr^2\dot{\theta}_i \tag{10}$$

$$L_i'=0+\frac{1}{2}mr^2\omega_i=\frac{1}{2}mr^2\omega_i \tag{11}$$

下面列角动量定理。对z轴:

$$\frac{\mathrm{d}L_{iz}}{\mathrm{d}t}=f_{i\perp}r \tag{12}$$

代入各量可得：

$$\ddot{\theta}_i=-\frac{4f_0}{5mr}\frac{v_0\cdot\sin\theta_i\ +\dot{\theta}_i\cdot r}{\sqrt{v_0^2+\omega_i^2r^2+\dot{\theta}_i^2r^2-2v_0\omega_ir\cdot\cos\theta_i+2v_0\dot{\theta}_ir\cdot\sin\theta_i}} \tag{13}$$

至于L_i'的角动量定理，则要换到轮子的质心平动系去考虑。此时惯性力矩之和为0。轮子除了受到地面的摩擦力带来的力矩，还受到来自水平轴的扭矩，轮子的公转通过这个扭矩传动给水平轴。而扭矩只能垂直于水平轴方向，因此不影响L_i'的角动量定理。（但由于这个题忽略了各轴的质量以及摩擦，这个扭矩其实是0）。L_i'的变化只由地面摩擦力决定。

$$\frac{\mathrm{d}L_i'}{\mathrm{d}t}=-f_{i//}r \tag{14}$$

代入各量可得：

$$\dot{\omega}_i=\frac{2f_0}{mr}\frac{v_0\cdot\cos\theta_i-\omega_i\cdot r}{\sqrt{v_0^2+\omega_i^2r^2+\dot{\theta}_i^2r^2-2v_0\omega_ir\cdot\cos\theta_i+2v_0\dot{\theta}_ir\cdot\sin\theta_i}} \tag{15}$$

式（13）（15）即为所求微分方程，其中$i=1,2,3,4$。

（3）本问给了对称的初始条件，故在运动的过程中将始终保持关系：$\theta_1=\theta_3=-\theta_2=-\theta_4$，且在所考察得运动过程中（箱子不翻且保持纯滚）箱子的方向始终不变。也就是说四个竖直轴的速度仍然保持相同，因此仍然可以仅对一个轮子分析。纯滚的速度关联仍然可以用式（1）（2）描述，只是要将其中的常数速度v_0替换成任意的速度v。换一种形式，把ω_i,v都用θ_i表示：

$$v=-\frac{\dot{\theta}_i\cdot r}{\sin\theta_i} \tag{16}$$

$$\omega_i=-\frac{\dot{\theta}_i}{\tan\theta_i} \tag{17}$$

式（16）两边乘$\mathrm{d}t$得：

$$v\mathrm{d}t=-\frac{r\cdot\mathrm{d}\theta_i}{\sin\theta_i} \tag{18}$$

这说明箱子沿斜面向下滚的距离只和角度有关。这是纯滚约束所导致的线位移和角位移之间的关系。积分得：

$$x=\int_0^t v\mathrm{d}t=r\ln\left(\frac{\tan\frac{\theta_{i0}}{2}}{\tan\frac{\theta_i}{2}}\right) \tag{19}$$

先算任意位形下箱子加轮子的动能：(四个轮子动能相同，故用同一个θ_i表示)

$$E_k(\theta_i,v)=\frac{1}{2}Mv^2+4\times\frac{1}{2}m\left(v^2+\dot{\theta}_i^2r^2+2v\dot{\theta}_ir\sin\theta_i\right)+4\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\omega_i^2+\frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}_i^2\right) \tag{20}$$

纯滚没有能量损失，能量守恒方程：

$$E_k(\theta_i,v)-E_k(\theta_{i0},0)=(M+4m)gx\sin\alpha+4mgr(\cos\theta_0-\cos\theta)\sin\alpha \tag{21}$$

代入各量解得：

$$\dot{\theta}^2=\frac{2g}{r}\frac{\sin\alpha\sin^2\theta}{M+6m-5m\sin^2\theta}\left((M+4m)\ln\frac{\tan\frac{\theta_0}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}+4m(\cos\theta_0-\cos\theta)\right) \tag{22}$$

其中$\theta=\theta_1=\theta_3=-\theta_2=-\theta_4$。开根号之后的正负号需要另外讨论，最终得

（i）当$\theta_0\in(0,\pi)$时：

$$\dot{\theta}=-\sqrt{\frac{2g}{r}\frac{\sin\alpha\sin^2\theta}{M+6m-5m\sin^2\theta}\left((M+4m)\ln\frac{\tan\frac{\theta_0}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}+4m(\cos\theta_0-\cos\theta)\right)} \tag{23}$$

（ii）当$\theta_0\in(-\pi,0)$时:

$$\dot{\theta}=+\sqrt{\frac{2g}{r}\frac{\sin\alpha\sin^2\theta}{M+6m-5m\sin^2\theta}\left((M+4m)\ln\frac{\tan\frac{\theta_0}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}+4m(\cos\theta_0-\cos\theta)\right)} \tag{24}$$

（iii）当$\theta_0=0$时，始终有：

$$\dot{\theta}=0 \tag{25}$$

其中$\theta=\theta_1=\theta_3=-\theta_2=-\theta_4$。

评分标准：本题满分 60 分。

第（1）问 8 分：（1）（2）式各 2 分，（5）式 4 分。最终答案与（5）式等价也给分。

第（2）问 26 分：（6）（7）（8）（9）（10）（11）式各 2 分，（12）（14）式各 2 分，（13）（15）式各 5 分

第（3）问 26 分：（16）（17）（23）（24）（25）式各 2 分，（19）（20）（21）（22）式 4 分。

七、(50 分）

解：（1）当一束振幅为 1 的光从上方空间入射时，反射光振幅为r_1，透射光振幅为t_1。由于光路可逆，故从膜内入射到分界面振幅为t_1的光并同时从上方空间入射到分界面振幅为r_1的光，最终叠加后应当在上方空间出射振幅为 1 的光，而膜内无出射光。故有

$$t_1t_1'+r_1^2=1 \tag{1}$$

$$t_1r_1'+t_1r_1=0 \tag{2}$$

由此可得

$$t_1t_1'=1-r_1^2 \tag{3}$$

$$r_1'=-r_1 \tag{4}$$

（2）由折射定律

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{5}$$

相邻两束反射光之间的光程差为

$$\delta L = \frac{2n_2 h}{\cos\theta_2} - 2n_1 h \tan\theta_2 \sin\theta_1 \tag{6}$$

利用（5）式消去θ_2可得

$$\delta L = 2h\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_1} \tag{7}$$

相位差

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta L = \frac{4\pi h}{\lambda}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_1} \tag{8}$$

（3）利用复数表示相位，设入射光的振幅为 $\tilde{A}$，则第一束反射光的振幅为

$$\widetilde{A_1} = r_1\tilde{A} \tag{9}$$

第$k(k>1)$束反射光的振幅为

$$\widetilde{A_k} = \tilde{A} r_2 t_1 t_1' e^{i\delta\varphi}\left(r_1' r_2 e^{i\delta\varphi}\right)^{k-2} \tag{10}$$

总反射光的振幅为

$$\begin{aligned}\widetilde{A_R} &= \Sigma_{k=1}^{\infty}\widetilde{A_k} \\ &= \tilde{A}\left(r_1 + \Sigma_{k=1}^{\infty} r_2 t_1 t_1' e^{i\delta\varphi}\left(r_1' r_2 e^{i\delta\varphi}\right)^{k-1}\right) \\ &= \tilde{A}\left(r_1 + \frac{r_2 t_1 t_1' e^{i\delta\varphi}}{1 - r_1' r_2 e^{i\delta\varphi}}\right)\end{aligned} \tag{11}$$

利用斯托克斯倒逆关系化简得

$$\widetilde{A_R} = \frac{\tilde{A}\left(r_1 + r_2 e^{i\delta\varphi}\right)}{1 + r_1 r_2 e^{i\delta\varphi}} \tag{12}$$

总反射光光强

$$\begin{aligned}I_R &= \widetilde{A_R}\widetilde{A_R^*} \\ &= I_0\frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2\cos\delta\varphi}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2\cos\delta\varphi}\end{aligned} \tag{13}$$

（4）利用能量守恒，有

$$(I_0 - I_R)\cos\theta_1 = I_T\cos\theta_3 \tag{14}$$

根据折射定律，有

$$n_2\sin\theta_2 = n_3\sin\theta_3 \tag{15}$$

联立两式解得总透射光光强

$$I_T = \frac{n_3\cos\theta_1}{\sqrt{n_3^2 - n_1^2\sin^2\theta_1}}\cdot\frac{(1-r_1^2)(1-r_2^2)}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2\cos\delta\varphi} \tag{16}$$

（5）I_R可变形为

$$\begin{aligned}I_R &= I_0\frac{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2\cos\delta\varphi}{1 + r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2\cos\delta\varphi} \\ &= I_0\frac{(r_1^2 + r_2^2)\left(\cos^2\frac{\delta\varphi}{2} + \sin^2\frac{\delta\varphi}{2}\right) + 2r_1 r_2\left(\cos^2\frac{\delta\varphi}{2} - \sin^2\frac{\delta\varphi}{2}\right)}{(1 + r_1^2 r_2^2)\left(\cos^2\frac{\delta\varphi}{2} + \sin^2\frac{\delta\varphi}{2}\right) + 2r_1 r_2\left(\cos^2\frac{\delta\varphi}{2} - \sin^2\frac{\delta\varphi}{2}\right)} \\ &= I_0\frac{(r_1 + r_2)^2\cos^2\frac{\delta\varphi}{2} + (r_1 - r_2)^2\sin^2\frac{\delta\varphi}{2}}{(1 + r_1 r_2)^2\cos^2\frac{\delta\varphi}{2} + (1 - r_1 r_2)^2\sin^2\frac{\delta\varphi}{2}}\end{aligned} \tag{17}$$

将r_1和r_2代入得到

$$I_R=I_0\frac{(n_1-n_3)^2\cos^2\frac{\delta\varphi}{2}+\left(\frac{n_1n_3}{n_2}-n_2\right)^2\sin^2\frac{\delta\varphi}{2}}{(n_1+n_3)^2\cos^2\frac{\delta\varphi}{2}+\left(\frac{n_1n_3}{n_2}+n_2\right)^2\sin^2\frac{\delta\varphi}{2}} \tag{18}$$

当$I_R=0$时，由于薄膜两侧折射率不同，$n_1\neq n_3$，则有

$$\frac{n_1n_3}{n_2}-n_2=0 \tag{19}$$

$$\cos\frac{\delta\varphi}{2}=0 \tag{20}$$

因此有

$$n_2=\sqrt{n_1n_3} \tag{21}$$

$$n_2h=\left(\frac{1}{4}+\frac{m}{2}\right)\lambda, m=0,1,2,\ldots \tag{22}$$

$$\delta\varphi=(2m+1)\pi, m=0,1,2,\ldots \tag{22 *}$$

评分标准：本题满分 50 分。

第（1）问 6 分：说明如何利用光路可逆推导的思路 2 分，（1）（2）式 2 分；

若思路错误或伪证本小问不得分，但不影响后续小问得分。利用光路可逆思路进行证明但具体光路与参考答案不同的，若证明过程正确也可得满分。其余证明方式若正确但未利用光路可逆的思路，本问得 3 分。

第（2）问 10 分：（5）（6）式 2 分，（7）（8）式 3 分；

第（3）问 14 分：（9）（12）式 2 分，（10）（11）式 3 分，（13）式 4 分；

第（4）问 8 分：（15）式 2 分，（14）（16）式 3 分；

第（5）问 12 分：（17）（18）（19）（20）（21）式 2 分，（22）或（22*）式 2 分。

版权信息

命题人

蒋弘杰 张建明 张 源 戴正宇 侯宗岳 陈浩楠 甄林睿

审题人

朱信霖 肖子奡 向滢澔 王子岳 赵瀚宏 肖亦铖

联系方式

微信公众号

CPHOS

官方网站

www.cphos.cn

CPHOS 论坛

邮箱

service@cphos.cn

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考