

# 第 18 届 CPHOS 物理竞赛联考

## 理论答案

本文件于 2023 年 9 月 29 日 18:00 首次发布，最后更新于 2023 年 10 月 3 日 19:59。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见文件末尾。

答题卡上传

2023/9/29 12:00 - 2023/10/3 18:00

阅卷

2023/10/4 08:00 - 2023/10/7 20:00

非正式成绩

2023/10/8 08:00

成绩申诉

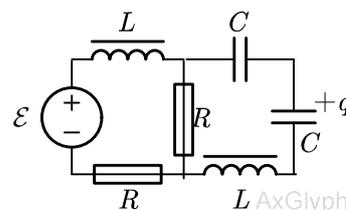
2023/10/8 09:00 - 2023/10/8 18:00

正式成绩

2023/10/9 20:00

### 一、(40分) 暂态电路

电路和其中各元件参量如图所示。电源电动势  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos^2 \omega t$  电路中电阻大小均为  $R$ ，电感大小均为  $L$ ，电容大小均为  $C$ ，且有  $\omega L = \frac{R}{2}$ ， $\frac{1}{\omega C} = 2R$ 。  $t = 0$  时，各支路电流均为 0，各电容均无电荷。所有答案均用  $\varepsilon_0, \omega, R$  表示；所有数值结果保留四位有效数字。



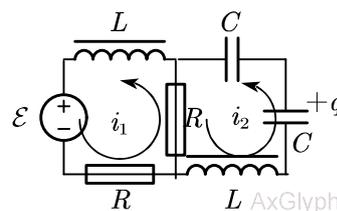
(1) 考虑稳态，在时间趋于无穷后，该电路只剩下稳定的直流解与交流解的叠加。试求此时电容上极板带电量  $q_2(t)$ 。

(2) 事实上，稳态解不能描述全部的物理过程，因此我们要考虑暂态。

(2.1) 试具体论述稳态解不满足初始条件。

(2.2) 将  $q(t)$  分为稳态解  $q_2(t)$  与暂态解  $Q_2(t)$ ，即  $q = q_2 + Q_2$ 。写出暂态解满足的方程，以及在  $t = 0$  时刻，暂态解需要满足的条件。

(2.3) 代入  $\omega = 1\text{s}^{-1}$ ， $\varepsilon_0 = 1\text{V}$ ， $R = 1\Omega$ ，数值求解  $q(t)$ ；并求出  $q(3\text{s})$  的值。



解：

(1) 方法一：

电源的电动势可以分解为：

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (1 + \cos 2\omega t) \quad (1)$$

如图所示，将回路中电流设为两个回路电流  $i_1, i_2$  的叠加。

先计算直流部分。这时，没有电流通过电容；电感分压为零。因此：

$$i_1 = \frac{\varepsilon_0}{4R}, \quad i_2 = 0 \quad (2)$$

电容上的电压为：

$$U_q = \frac{1}{2} i_1 R = \frac{\varepsilon_0}{8} \quad (3)$$

故电荷量为:

$$q = CU_q = \frac{\varepsilon_0}{16\omega R} \quad (4)$$

再计算交流部分。首先求得各元件阻抗:

$$\begin{cases} X_L = 2j\omega L = jR \\ X_C = \frac{1}{2j\omega C} = -jR \end{cases} \quad (5)$$

其中j为虚数单位。再对两个回路列回路方程:

$$\begin{cases} (jR + 2R)i_1 - Ri_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 e^{j2\omega t} \\ -Ri_1 + (-jR + R)i_2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

解得:

$$\begin{cases} i_1 = \left(\frac{3}{10} - \frac{j}{10}\right) \frac{\varepsilon_0}{R} e^{j2\omega t} \\ i_2 = \left(\frac{1}{5} + \frac{j}{10}\right) \frac{\varepsilon_0}{R} e^{j2\omega t} \end{cases} \quad (7)$$

因此可以求得电容上的电压:

$$U_q = X_C i_2 = \left(\frac{1}{10} - \frac{j}{5}\right) \varepsilon_0 e^{j2\omega t} \quad (8)$$

以及复数形式的电荷:

$$q = CU_q = \left(\frac{1}{20} - \frac{j}{10}\right) \frac{\varepsilon_0}{\omega R} e^{j2\omega t} \quad (9)$$

再改写为实数形式:

$$q = \left(\frac{1}{20} \cos 2\omega t + \frac{1}{10} \sin 2\omega t\right) \frac{\varepsilon_0}{\omega R} \quad (10)$$

稳态解是直流项与交流项的叠加,

$$q_2 = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{20} \cos 2\omega t + \frac{1}{10} \sin 2\omega t\right) \frac{\varepsilon_0}{\omega R} \quad (11)$$

方法二:

电源的电动势可以分解为:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_0(1 + \cos 2\omega t) \quad (12)$$

如图所示, 可以将电阻R右端和R一起等效为阻抗Z。

在直流情况下, 电容C相当于断路, 电感L相当于短路, 因此

$$Z_1 = R$$

由串联电路的分压:

$$U_R = \frac{\frac{\varepsilon_0}{2} Z_1}{Z_1 + R} = \frac{\varepsilon_0}{4} \quad (13)$$

因此电容上的电压为:

$$U_q = \frac{u_R}{2} = \frac{\varepsilon_0}{8} \quad (14)$$

故电荷量为:

$$q = CU_q = \frac{\varepsilon_0}{16\omega R} \quad (15)$$

在交流情况下, 首先求得各元件阻抗:

$$\begin{cases} X_L = 2j\omega L = jR \\ X_C = \frac{1}{2j\omega C} = -jR \end{cases} \quad (16)$$

其中  $j$  为虚数单位。因此等效阻抗为

$$Z_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{X_L + 2X_C}} = \frac{(1-j)}{2}R \quad (17)$$

由串联电路的分压

$$U_R = \frac{\frac{\varepsilon_0}{2}e^{j2\omega t}Z_2}{Z_2 + R + X_L} = \frac{1-2j}{10}\varepsilon_0e^{j2\omega t} \quad (18)$$

因此可以求得电容上的电压:

$$U_q = \frac{U_RX_C}{2X_C + X_L} = \left(\frac{1}{10} - \frac{j}{5}\right)\varepsilon_0e^{j2\omega t} \quad (19)$$

以及复数形式的电荷:

$$q = CU_q = \left(\frac{1}{20} - \frac{j}{10}\right)\frac{\varepsilon_0}{\omega R}e^{j2\omega t} \quad (20)$$

再改写为实数形式:

$$q = \left(\frac{1}{20}\cos 2\omega t + \frac{1}{10}\sin 2\omega t\right)\frac{\varepsilon_0}{\omega R} \quad (21)$$

稳态解是直流项与交流项的叠加,

$$q_2 = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{20}\cos 2\omega t + \frac{1}{10}\sin 2\omega t\right)\frac{\varepsilon_0}{\omega R} \quad (22)$$

(2)

(2.1) 当  $t = 0$  时, 计算电荷量:

$$q = \frac{9}{80}\frac{\varepsilon_0}{\omega R} \neq 0 \quad (23)$$

由此可知, 其不满足电荷初始为 0 的初始条件。

(2.2) 列出回路方程组

$$\begin{cases} L\frac{di_1}{dt} + 2Ri_1 - Ri_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0(1 + \cos 2\omega t) \\ \frac{2q}{C} + L\frac{di_2}{dt} + Ri_2 - Ri_1 = 0 \\ \dot{q} = i_2 \end{cases} \quad (24)$$

则电荷量  $q$  满足:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0(1 + \cos 2\omega t) = \frac{L^2}{R}\frac{d^3q}{dt^3} + 3L\frac{d^2q}{dt^2} + 3R\frac{dq}{dt} + \frac{4q}{C} \quad (25)$$

利用  $q = q_2 + Q_2$ , 并将 (11) 式代入 (14) 式, 可得:

$$\ddot{Q}_2 + 6\omega\dot{Q}_2 + 12\omega^2Q_2 + 32\omega^3Q_2 = 0 \quad (26)$$

(2.3) 在 (15) 式中令  $Q_2 = e^{\lambda\omega t}$ , 得到特征方程:

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 32 = 0 \quad (27)$$

它的三个复数解分别为:

$$\lambda_1 = -4.885, \lambda_{2,3} = -0.5578 \pm 2.498j$$

$Q_2$  满足三阶常系数齐次线性微分方程, 其通解为:

$$Q_2 = Ae^{\lambda_1\omega t} + e^{\operatorname{Re}(\lambda_2)\omega t}(B\cos(\operatorname{Im}(\lambda_2)\omega t) + C\sin(\operatorname{Im}(\lambda_2)\omega t)) \quad (28)$$

其中  $A, B, C$  为常数。

当  $t = 0$  时, 对稳态解求导:

$$q_2 = \frac{9}{80} \frac{\varepsilon_0}{\omega R}, \dot{q}_2 = \frac{1}{5} \frac{\varepsilon_0}{R}, \ddot{q}_2 = -\frac{1}{5} \frac{\omega \varepsilon_0}{R}$$

分析初态可知, 电荷和电流为 0, 即  $q = 0, \dot{q} = 0$ ; 由于在左端回路上电阻没有分压, 故右端回路上电感没有分压, 即  $\ddot{q} = 0$ 。可以得到初始条件

$$Q_2 = -\frac{9}{80} \frac{\varepsilon_0}{\omega R}, \dot{Q}_2 = -\frac{1}{5} \frac{\varepsilon_0}{R}, \ddot{Q}_2 = \frac{1}{5} \frac{\omega \varepsilon_0}{R} \quad (29)$$

将 (17) 式代入初始条件, 数值计算解得:

$$Q_2 = \left( -0.03045e^{-4.885\omega t} - e^{-0.5578\omega t} (0.08205\cos(2.498\omega t) + 0.1579\sin(2.498\omega t)) \right) \frac{\varepsilon_0}{\omega R} \quad (30)$$

故最终得到:

$$\begin{aligned} q &= q_2 + Q_2 \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\omega R} \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{20} \cos 2\omega t + \frac{1}{10} \sin 2\omega t - 0.03045e^{-4.885\omega t} \right. \\ &\quad \left. - e^{-0.5578\omega t} (0.08205\cos(2.498\omega t) + 0.1579\sin(2.498\omega t)) \right) \end{aligned} \quad (31)$$

代入数值, 得:

$$q(t = 3s) = 0.04941 \frac{\varepsilon_0}{\omega R} = 0.04941 \text{ C} \quad (32)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 15 分:

方法一: (1) 式 2 分, (2) (3) 式 1 分, (4) 式 2 分, (5) 式 1 分, (6) (7) 式各 2 分, (8) (9) (10) (11) 式各 1 分;

方法二: (12) 式 2 分, (13) (14) 式 1 分, (15) 式 2 分, (16) 式 1 分, (17) (18) 式各 2 分, (19) (20) (21) (22) 式各 1 分;

第 (2) 问 25 分:

第 (2.1) 小问 2 分: (23) 式 2 分;

第 (2.2) 小问 8 分: (24) (25) 式各 3 分, (26) 式 2 分;

第 (2.3) 小问 15 分: (27) 式 1 分, (28) (29) 式 2 分, (30) 式 5 分, (31) 式 2 分, (32) 式 3 分。

二、(40 分) 滚雪球与悠悠球

(1) 如图 (1), 雪球为一个质量均匀分布的球体, 处在一个铺满雪的倾角为  $\theta$  的斜面上, 在重力作用下向下滚动。过程中, 雪的密度  $\rho$  恒定不变。

(1.1) 认为雪面足够粗糙且雪球半径近似不变, 给出雪球下落的加速度  $a$ ;

(1.2) 事实上, 虽然雪面十分光滑, 但雪球会越滚越大, 这是因为冰受到压力时熔点降低, 会有部分冰融化成水之后再粘连在雪球上 (当然, 冰的表面本身就会带有一层水)。近似地, 我们认为雪球与地面的接触为圆且面积  $S = \pi \alpha^2 R^2$ , 雪球会吸积路径上一层厚度为  $h$  的雪, 假设吸积到的雪立刻均匀分布到球面上。试求关于雪球质量随时间的函数  $m(t)$ , 认为雪球初始大小很小, 可以忽略。

(2) 如图 (2), 悠悠球在重力作用下下落, 悠悠球的中心筒是一层半径为  $R$  的薄圆柱壳, 缠绕着质量线密度为  $\lambda$  的细线, 现在将线的一端固定在天花板上, 并下放一小段线, 使线竖直紧贴着左侧的墙壁, 随后自由释放悠悠球。已知初始时刻, 筒及绕在其上的线的总质量为  $m_0$ , 且此时线的另一端在筒上相对于接触点的角位置为顺时针转过  $\theta_0$ 。

(2.1) 当圆筒旋转至另一端在筒上相对于接触点的角位置为如图所示的 $\theta$ 角时, 试给出筒的速度 $v(\theta)$ ;

(2.2) 特别地, 在 $m_0 = 10\pi\lambda R$ ,  $\theta_0 = 0$ 时, 给出筒心的加速度 $a(\theta)$ , 并计算  $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时的速度和加速度数值, 保留四位有效数字。

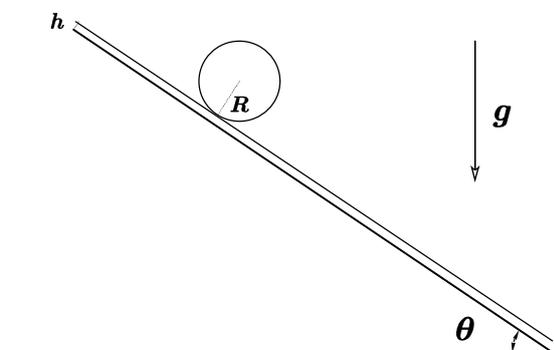


图 (1) 雪球下滚示意图

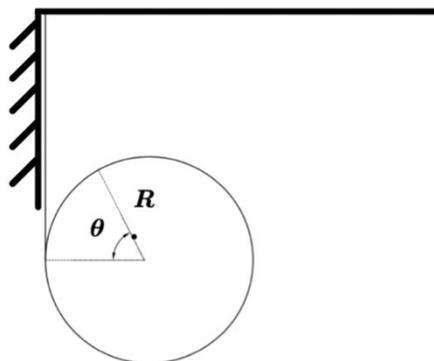


图 (2) 悠悠球下落示意图

解:

(1.1) 对雪球列动力学方程

$$mg\sin\theta - f = ma \quad (1)$$

$$fR = \frac{2}{5}mR^2\beta \quad (2)$$

由纯滚条件

$$\beta R = a \quad (3)$$

解得

$$a = \frac{5}{7}g\sin\theta \quad (4)$$

(1.2) 由动量定理

$$mg\sin\theta = \frac{d}{dt}mv \quad (5)$$

而雪球对路上雪的吸积

$$\frac{dm}{dt} = 2\rho\alpha R hv \quad (6)$$

又有

$$m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (7)$$

结合初始条件解得

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho \left( \sqrt{\frac{\alpha g h \sin\theta}{8\pi}} t \right)^3 \quad (8)$$

(注意: 由于体系没有转动, 接触点存在相对速度, 与接触到的雪发生类似完全非弹性碰撞的过程, 导致能量不守恒)

(2.1)方法一: 设筒向下位移为 $x$ , 而此时绳子末端的角位置为 $\theta$

由绳子不可伸长

$$x = R(\theta - \theta_0) \quad (9)$$

而剩余质量

$$m = m_0 - \lambda g R(\theta - \theta_0) \quad (10)$$

则相对初始位置绳与筒的重力势能表达式

$$\begin{aligned} U &= -(m + \lambda R\theta)gx + \int_0^\theta -\lambda g R(-x + R\sin\theta)d\theta - \frac{1}{2}\lambda g x^2 \\ &= -m_0 g R(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2}\lambda g R^2(\theta - \theta_0)^2 + \lambda g R^2(\cos\theta - 1) \end{aligned} \quad (11)$$

绳子与筒的总动能可考虑两部分：先考虑绳子完全缠绕的动能

$$T_1 = (m + \lambda R\theta)R^2\dot{\theta}^2 \quad (12)$$

而实际绳子在  $0 - \theta$  没有缠绕，这部分附加动能

$$T_2 = \int_0^\theta \frac{1}{2}\lambda R \left( (\dot{x} - R\cos\phi\dot{\theta})^2 + (R\sin\phi\dot{\theta})^2 \right) d\phi \quad (13)$$

总动能为两项动能之差，整理得

$$T = T_1 - T_2 = (m_0 + \lambda R(\theta_0 - \theta + \sin\theta))R^2\dot{\theta}^2 \quad (14)$$

利用能量守恒  $T = -\Delta U$ ，化简整理得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R} \cdot \frac{\frac{m_0}{\lambda R}(\theta - \theta_0) + \cos\theta_0 - \cos\theta - \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^2}{\frac{m_0}{\lambda R} + \theta_0 - \theta + \sin\theta} \quad (15)$$

所以

$$v(\theta) = R\dot{\theta} = \sqrt{gR \frac{\frac{m_0}{\lambda R}(\theta - \theta_0) + \cos\theta_0 - \cos\theta - \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^2}{\frac{m_0}{\lambda R} + \theta_0 - \theta + \sin\theta}} \quad (16)$$

方法二：

利用动力学方法求解。设筒向下位移为  $x$ ，而此时绳子末端的角位置为  $\theta$ ，相对于悬挂点  $O$ ，受到重力力矩：

$$M_G = m_1 g R - \int_0^\theta \lambda g R d\phi \cdot R(1 - \cos\phi) \quad (17)$$

其中  $m_1 = m_0 + \lambda R\theta_0$  是绳子完全缠绕时的总质量， $\int_0^\theta \lambda g R d\phi \cdot R(1 - \cos\phi)$  表示  $0 - \theta$  处绳子导致多算的力矩。

此外，系统水平方向动量

$$p_y = \int_\theta^{2\pi} \lambda R d\phi R \dot{\theta} \sin\phi = -\lambda R^2 \dot{\theta} (1 - \cos\theta) \quad (18)$$

随时间变化，因此系统整体受到墙壁的支持力作用，墙壁提供的力矩为

$$M_N = -NR\theta = -\frac{dp_y}{dt} R\theta \quad (19)$$

接下来，分两个部分计算体系相对悬点  $O$  的角动量。悠悠球筒的角动量为

$$J_1 = 2(m_1 - 2\pi\lambda R)R^2\dot{\theta} \quad (20)$$

而缠绕在悠悠球上的绳子的角动量为

$$\begin{aligned}\vec{J}_2 &= \int_{\theta}^{2\pi} \lambda R d\phi \cdot (\vec{v}(\theta) \times \vec{r}(\theta)) \\ &= \int_{\theta}^{2\pi} \lambda R d\phi \cdot ((\dot{x} - R\dot{\theta} \cos \phi, R\dot{\theta} \sin \phi) \times (R\theta - R \sin \phi, R(1 - \cos \phi))) \\ &= \lambda R^3 \dot{\theta} (4\pi - \theta + 2 \sin \theta - \theta \cos \theta) e_z\end{aligned}\quad (21)$$

体系的总角动量为两部分之和

$$J = J_1 + J_2 = 2m_1 R^2 \dot{\theta} + \lambda R^3 \dot{\theta} (2 \sin \theta - \theta \cos \theta - \theta) \quad (22)$$

利用角动量定理, 系统总体的角动量变化率等于重力和支持力力矩的和

$$\frac{dJ}{dt} = M_G + M_N \quad (23)$$

带入表达式得到关于 $\theta$ 的微分方程

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (2m_1 R^2 \dot{\theta} + \lambda R^3 \dot{\theta} (2 \sin \theta - \theta \cos \theta - \theta)) &= \\ m g R - \lambda g R^2 \theta + \lambda g R^2 \sin \theta + \lambda R^3 \theta \frac{d}{dt} (\dot{\theta} (1 - \cos \theta)) &\end{aligned}\quad (24)$$

化简整理得

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R} \cdot \frac{\frac{m_0}{\lambda R} (\theta - \theta_0) + \cos \theta_0 - \cos \theta - \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)^2}{\frac{m_0}{\lambda R} + \theta_0 - \theta + \sin \theta} \quad (25)$$

所以

$$v(\theta) = R \dot{\theta} = \sqrt{g R \frac{\frac{m_0}{\lambda R} (\theta - \theta_0) + \cos \theta_0 - \cos \theta - \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)^2}{\frac{m_0}{\lambda R} + \theta_0 - \theta + \sin \theta}} \quad (26)$$

(2.2)代入数据,得到

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R} \cdot \frac{10\pi(\theta - \theta_0) + \cos \theta_0 - \cos \theta - \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)^2}{10\pi + \theta_0 - \theta + \sin \theta} \quad (27)$$

而两边求导得到

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{2R} \left( 1 + \frac{(1 - \cos \theta) (10\pi\theta + 1 - \cos \theta - \frac{1}{2} \theta^2)}{(10\pi - \theta + \sin \theta)^2} \right) \quad (28)$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ 时, 代入:

$$v\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.026\sqrt{gR} \quad (29)$$

$$a\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5084g \quad (30)$$

评分标准: 本题满分 40 分

第 (1) 问 15 分:

(1.1) 问 8 分: (1) (2) (3) (4) 式各 2 分;

(1.2) 问 7 分: (5) (6) 式各 2 分, (8) 式 3 分;

第 (2) 问 25 分:

(2.1) 问 19 分:

方法一：(9)式1分，(10)式2分，(11)式3分，(12)(13)式各2分，(14)(15)(16)式各3分；

方法二：(17)式2分，(18)(19)(20)式各1分，(21)式3分，(22)(23)(24)式各2分，(25)式3分，(26)式2分；

(2.2)问6分：(28)(29)(30)式各2分。

三、(40分)开关门

开关门的时候门实际上不会很快关上，尤其是内部空间小而不通风的时候。现在对这样一个不通风的只有一扇门的房间进行讨论。

图1为一个房间的剖面图，圆弧为一扇恰好能打开到90度的门，门的高度和房间的高度一样为1，其它参量已经在图中给出。假设房间外连通着广阔的空间，因此房间的外面为等压的环境。假设只有一种气体，绝热系数为 $\gamma$ ，外部气压为 $p_0$ 。

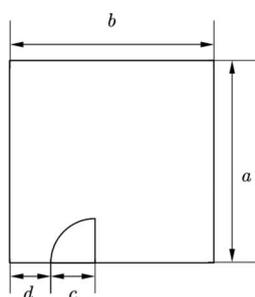


图1

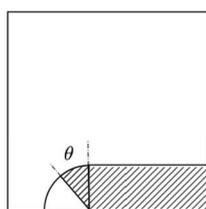


图2

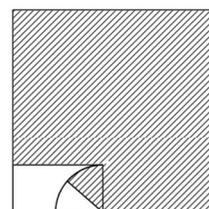


图3

(1)如图2，当门被突然拉上，假设阴影部分的气体来不及和其它部分交换，结果这部分的气体在拉上的过程中独立地绝热膨胀，其余部分的压强和外部气压一致。假设门从完全打开的状态旋转了角度 $\theta$ ，请你推导门在这时受到的来自两侧气体的压强差 $\Delta p_1$ 。

(2)如图3，当门被以缓慢的速率拉上或打开时，记其角速率为 $\omega$ ，假设阴影部分的气体在弛豫时间 $\tau \ll \frac{1}{\omega}$ 内来不及和其它部分交换(也就是说在气体在时间 $\tau$ 之前处于平衡态，并经历时长为 $\tau$ 的，不与外界发生交换的过程)，结果这部分的气体独立地等温膨胀了 $\tau$ 时间间隔，而其余部分的压强和外部气压一致。请你推导门在这时受到的来自两侧气体的压强差 $\Delta p_2$ 。

(3)假设第(1)问情况符合，门的质量均匀为 $M$ ， $\theta = 0$ 时角速度为 $\Omega$ ，求门在关上的时候的角速率。

(4)假设第(2)问情况符合，门的质量均匀为 $M$ ， $\theta = 0$ 时角速度为 $\Omega$ ，并在 $\tau \equiv \alpha\omega$ ( $\alpha > 0$ 为常数)的假设下，求门在关上的时候的角速率。求出初始角速率的范围，使得关上门时的角速率大于 $\omega_c$ 。

解：

(1) 气体的体积

$$V_i = c(b - c - d) \quad (1)$$

$$p_i = p_0 \quad (2)$$

当门转动的角度为 $\theta$ 时，气体体积为

$$V_f = c(b - c - d) + \frac{c^2 \theta}{2} \quad (3)$$

$$p_f = p_0 \left( 1 + \frac{c\theta}{2(b - c - d)} \right)^{-\gamma} \quad (4)$$

所以门两侧的压强差为

$$\Delta p_1 = p_0 - p_f = p_0 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{c\theta}{2(b-c-d)} \right)^{-\gamma} \right] \quad (5)$$

(2) 气体的体积

$$V_i = ab - (c+d)c + \frac{c^2\theta}{2} \quad (6)$$

$$p_i = p_0 \quad (7)$$

经过时间 $\tau$ 之后, 气体的体积为, 相应的等温条件的压强为

$$V_f = ab - (c+d)c + \frac{c^2(\theta + \omega\tau)}{2} \quad (8)$$

$$p_f = p_0 \left( 1 + \frac{c^2\omega\tau}{2ab - 2(c+d)c + c^2\theta} \right)^{-1} \quad (9)$$

考虑到 $\omega\tau \ll 1$ , 将压强小量展开

$$p_f \approx p_0 - p_0 \frac{c^2\omega\tau}{2ab - 2(c+d)c + c^2\theta} \quad (10)$$

所以门两侧的压强差为

$$\Delta p_2 = p_f - p_0 = p_0 \frac{c^2\omega\tau}{2ab - 2(c+d)c + c^2\theta} \quad (11)$$

(3) 压强差已经求得为

$$\Delta p_1 = p_0 - p_f = p_0 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{c\theta}{2(b-c-d)} \right)^{-\gamma} \right] \quad (12)$$

于是角动量定理为

$$\frac{Mc^2}{3} \frac{d\left(\frac{\omega^2}{2}\right)}{d\theta} = -\frac{\Delta p_1 c^2}{2} = \frac{p_0 c^2}{2} \left[ \left( 1 + \frac{c\theta}{2(b-c-d)} \right)^{-\gamma} - 1 \right] \quad (13)$$

则积分可得

$$\omega_f^2 - \Omega^2 = \frac{3p_0}{M} \left\{ \frac{2(b-c-d)}{c} \frac{1 - \left[ 1 + \frac{\pi c}{4(b-c-d)} \right]^{1-\gamma}}{\gamma - 1} - \frac{\pi}{2} \right\} \quad (14)$$

所以

$$\omega_f = \sqrt{\Omega^2 + \frac{3p_0}{M} \left\{ \frac{2(b-c-d)}{c} \frac{1 - \left[ 1 + \frac{\pi c}{4(b-c-d)} \right]^{1-\gamma}}{\gamma - 1} - \frac{\pi}{2} \right\}} \quad (15)$$

(4) 压强差已经求得为

$$\Delta p_2 = p_f - p_0 = p_0 \frac{c^2\omega\tau}{2ab - 2(c+d)c + c^2\theta} \quad (16)$$

由此可以得出角动量定理方程

$$\frac{Mc^2}{3} \frac{d\left(\frac{\omega^2}{2}\right)}{d\theta} = -\frac{c^2}{2} \cdot \Delta p_1 = -\frac{p_0 c^2}{2} \frac{c^2 \alpha \omega^2}{2ab - 2(c+d)c + c^2\theta} \quad (17)$$

则积分可得

$$\ln \frac{\omega_f}{\Omega} = -\frac{3p_0}{2M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c^2 \alpha d \theta}{2ab - 2(c+d)c + c^2 \theta} = -\frac{3\alpha p_0}{2M} \ln \frac{4ab - 4(c+d)c + \pi c^2}{4ab - 4(c+d)c} \quad (18)$$

则

$$\Omega > \left( \frac{4ab - 4(c+d)c + \pi c^2}{4ab - 4(c+d)c} \right)^{\frac{3\alpha p_0}{2M}} \omega_c \quad (19)$$

评分标准：本题满分40分。

第(1)问10分：(1)(2)(3)(4)(5)式各2分；

第(2)问10分：(6)(8)(9)(10)(11)式各2分；

第(3)问10分：(13)式6分，其中写出转动惯量得2分，(15)式4分；

第(4)问10分：(17)(18)式各3分，(19)式4分。

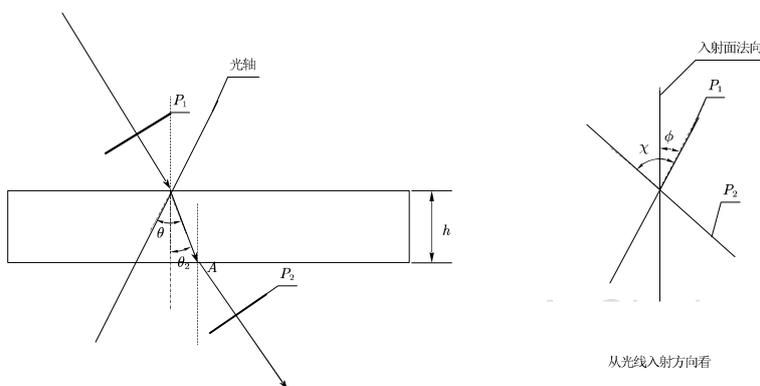
#### 四、(50分)双折射

在单轴晶体中，光线可能会被分为两束振动方向互相垂直的光： $o$ 光与 $e$ 光，又称为寻常光和异常光。在晶体中存在一个特殊的方向，光线沿着这个方向传播时 $o$ 光和 $e$ 光不分开，这个特殊的方向称为晶体的光轴。我们把光轴方向记为 $z$ 轴。

$o$ 光振动方向总是与光轴和光线所构成的平面垂直，扰动等相面为一球面，和我们平常熟知的光线在各向同性介质中的传播规律相同，而 $e$ 光则不然。 $e$ 光沿着光轴传播时的速度为 $v_o$ ，而垂直光轴传播的速度为 $v_e$ ，两速度对应的折射率为 $n_o, n_e$ 。因此，在 $x-z$ 平面内， $e$ 光扰动等相面满足椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ ，其中 $a = v_e t, b = v_o t$ 。对于一般的一个传播方向，将扰动等相面上的点的移动速度称为射线速度，而将扰动等相面法向扩大的速度称为法线速度。

(1)  $e$ 光的波法线方向(波面上一点的法向)和光线方向( $O$ 点到波面上一点的连线方向)是不同的。假设波法线方向与 $z$ 轴夹角为 $\theta$ ，光线方向与 $z$ 轴夹角为 $\xi$ ，求 $\tan \theta$ 与 $\tan \xi$ 之间的关系。同时，求射线速度 $v_r$ 、折射率 $n_r$ 与 $\xi, v_o, v_e, n_o, n_e$ 的关系；法线速度 $v_N$ 、折射率 $n_N$ 与 $\theta, v_o, v_e, n_o, n_e$ 的关系。

(2) 如图，一束真空波长为 $\lambda$ 的光经过偏振片 $P_1$ 后斜入射厚度为 $h$ 的长方体晶片，晶片光轴在入射面内。出射后光线经过偏振片 $P_2$ ，最终经透镜(未画出)会聚到焦面上。两偏振片透振方向夹角为 $\chi$ 。由于 $n_o - n_e \ll 1$ ，可以取平均折射角，记为 $\theta_2$ 。光轴的方向和折射光波法线方向的夹角为 $\theta$ ， $P_1$ 的透振方向与入射面法向夹角为 $\phi$ 。忽略晶片表面对光的反射，已知 $e$ 光的法线折射率仍满足折射定律。



(2.1) 求出射时 $e$ 光与 $o$ 光的相位差大小 $\delta$ 。假设在计算 $e$ 光的相位时，可以采用法线折射率计算。

(2.2) 求出射光强 $I'$ 与进入晶片前光强 $I_0$ 的比值, 再代入 $P_2$ 透振方向与 $P_1$ 垂直的情况。

(2.3) 以入射点为原点, 按照题述坐标系, 假设高度 $h$ 和入射角都可以变化, 试求出射时 $e$ 光和 $o$ 光光程差一定时, 出射点 $A$ 在空间中形成的曲面形状; 并分别求其在 $z$ 接近0、 $z$ 足够大时的近似形状。

解:

(1) 将 $x = r \sin \xi, y = r \cos \xi$ 带入椭圆方程得到

$$v_r = \frac{r}{t} = \frac{v_e v_o}{\sqrt{v_e^2 \cos^2 \xi + v_o^2 \sin^2 \xi}} \quad (1)$$

因而对应的折射率为

$$n_r = \frac{c}{v_r} = \sqrt{n_o^2 \cos^2 \xi + n_e^2 \sin^2 \xi} \quad (2)$$

另一方面, 对椭圆上一点求其法线方向

$$\tan \theta = -\frac{dz}{dx} = \frac{n_e^2}{n_o^2} \tan \xi \quad (3)$$

法线方向与射线方向的夹角为 $\alpha = \xi - \theta$ 。法线速度与射线速度的关系为

$$v_N = v_r \cos \alpha \quad (4)$$

因而对应的法线速度和法线折射率分别为

$$v_N = \sqrt{v_o^2 \cos^2 \theta + v_e^2 \sin^2 \theta}, n_N = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}} \quad (5)$$

(2)

(2.1) 记此时晶片中传播的光线, 其 $e$ 光法线折射率为 $n'_e$ ,  $o$ 光折射率仍为 $n_o$ 。由于 $n'_e$ 与 $n_o$ 之差很小,  $o$ 光与 $e$ 光的相位差可写作

$$\delta = \frac{2\pi h}{\lambda} (n'_e \cos \theta_{2e} - n_o \cos \theta_{2o}) = \frac{2\pi h}{\lambda} (n'_e - n_o) \frac{d}{dn} (n \cos \theta_2) \quad (6)$$

折射定律给出

$$n \cos \theta_2 \frac{d\theta_2}{dn} + \sin \theta_2 = 0 \quad (7)$$

因而

$$\delta = \frac{2\pi h(n'_e - n_o)}{\lambda \cos \theta_2} \quad (8)$$

代入 $n'_e$ 与 $\theta$ 的关系, 化简表达式

$$n'_e - n_o = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2 + (n_o^2 - n_e^2) \sin^2 \theta}} - n_o = (n_e - n_o) \sin^2 \theta \quad (9)$$

最终得到

$$\delta = \frac{2\pi h(n_e - n_o) \sin^2 \theta}{\lambda \cos \theta_2} \quad (10)$$

(2.2) 初始光强写作

$$I_0 = E^2 \quad (11)$$

进入晶片前,  $o$ 光和 $e$ 光的振幅分别为

$$E_o = E \cos \phi, E_e = E \sin \phi \quad (12)$$

出射晶片后,  $e$ 光相比 $o$ 光多了相位差 $\delta$ , 再过偏振片时的振幅为

$$E' = E_o \cos(\phi - \chi) + E_e \sin(\phi - \chi) e^{i\delta} \quad (13)$$

因而光强比值为

$$\begin{aligned} \frac{I'}{I_0} &= \frac{E'E'^*}{I_0} = \cos^2 \chi - \sin(2\phi) \sin(2\phi - 2\chi) \sin^2 \frac{\delta}{2} \\ &= \cos^2 \chi - \sin(2\phi) \sin(2\phi - 2\chi) \sin^2 \frac{\pi h(n_e - n_o) \sin^2 \theta}{\lambda \cos \theta_2} \end{aligned} \quad (14)$$

代入垂直条件 $\chi = \frac{\pi}{2}$ 得到

$$\frac{I'}{I_0} = \sin^2 2\phi \sin^2 \frac{\pi h(n_e - n_o) \sin^2 \theta}{\lambda \cos \theta_2} \quad (15)$$

(2.3) 记 $\frac{h}{\cos \theta_2} = \rho$ 。由题中的坐标得到 $(\rho \sin \theta)^2 = x^2 + y^2$ 。代入(10), 等相位条件等价于

$$\rho \sin^2 \theta = C \quad (16)$$

其中C为常数。

化简得到

$$(x^2 + y^2)^2 = C^2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (17)$$

在z远大于x、y时可进一步化简为

$$x^2 + y^2 = \pm Cz \quad (18)$$

近似为抛物面;

在z远小于x、y时可进一步化简为

$$x^2 + y^2 - z^2 = C^2 \quad (19)$$

近似为双曲面。

**评分标准: 本题满分 50 分。**

**第(1)问 12分: (1)(2)式 2分, (3)式 3分, (4)式 2分, (5)式 3分;**

**第(2)问 38分:**

**第(2.1)小问 15分: (6)式 4分, (7)(8)式 2分, (9)式 4分, (10)式 3分;**

**第(2.2)小问 14分: (11)式 1分, (12)(13)式 3分, (14)式 4分, (15)式 3分;**

**第(2.3)小问 9分: (16)式 3分, (17)(18)(19)式 2分。**

五、(40分) 刚体

如图1, 有一半长轴为 $a$ , 半短轴为 $b$ , 绕长轴旋转而成的旋转椭球刚体, 其质量分布关于长轴具有旋转对称性, 总质量为 $m$ , 质心 $C$ 位于焦点处, 绕如图所示惯量主轴的转动惯量分别为 $mr_1^2, mr_2^2$ 。

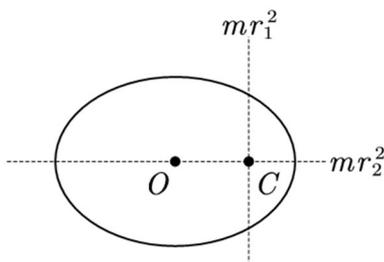


图1

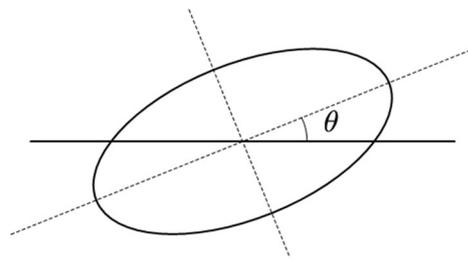


图2

(1) 如图2, 刚体绕一固定水平转轴作定轴转动, 该转轴过椭球体几何中心, 与椭球长轴夹角为 $\theta$ 。试求椭球体的小振动周期, 已知重力加速度为 $g$ 。

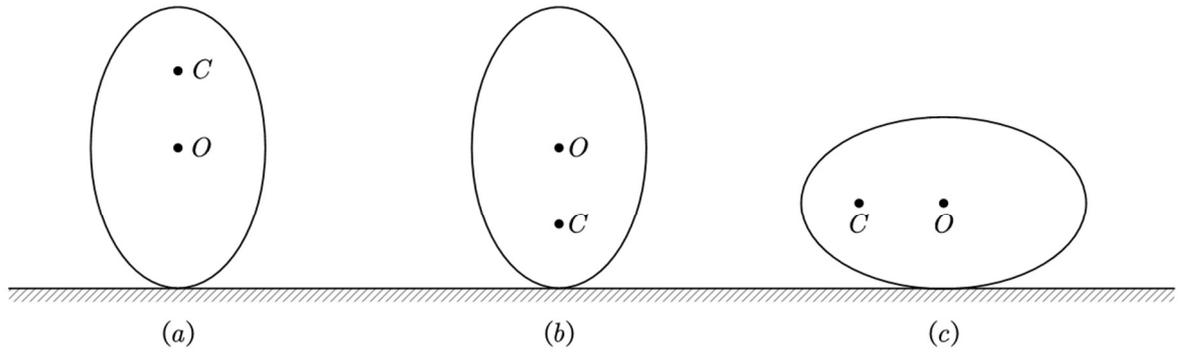


图3

(2) 如图3 (a), 将椭球体竖直放置于粗糙水平地面上并静止释放, 已知此后椭球始终保持纯滚动。

(2.1) 如图3 (b), 试求椭球体转过 $180^\circ$ 后的角速度大小 $\Omega$ 。

(2.2) 如图3 (c), 在(2.1)问的基础上, 椭球体又转动了 $90^\circ$ , 试求此时椭球体的角速度 $\omega$ 和角加速度 $\beta$ , 二者均以角速度的方向为正方向。

解:

(1) 刚体绕过质心, 与转轴平行的轴的转动惯量为

$$I_C = m(r_1^2 \sin^2 \theta + r_2^2 \cos^2 \theta) \quad (1)$$

质心到转轴的距离为

$$d_C = \sqrt{a^2 - b^2} \sin \theta \equiv c \sin \theta \quad (2)$$

故刚体绕转轴的转动惯量为

$$I_O = I_C + m d_C^2 = m[(a^2 - b^2 + r_1^2) \sin^2 \theta + r_2^2 \cos^2 \theta] \quad (3)$$

设转角为 $\varphi$ , 则重力势能

$$E_p = mg d_C (1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2} mg \sqrt{a^2 - b^2} \sin \theta \varphi^2 \quad (4)$$

动能

$$E_k = I_O \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m [(a^2 - b^2 + r_1^2) \sin^2 \theta + r_2^2 \cos^2 \theta] \dot{\varphi}^2 \quad (5)$$

故振动周期

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(a^2 - b^2 + r_1^2) \sin^2 \theta + r_2^2 \cos^2 \theta}{g \sqrt{a^2 - b^2} \sin \theta}} \quad (6)$$

(2.1) 绕瞬心转动惯量为

$$I_M = m r_1^2 + m(a - c)^2 = m \left[ r_1^2 + (a - \sqrt{a^2 - b^2})^2 \right] \quad (7)$$

能量守恒

$$\frac{1}{2} I_M \Omega^2 = 2mgc \quad (8)$$

解得

$$\Omega = \sqrt{\frac{4g\sqrt{a^2 - b^2}}{r_1^2 + (a - \sqrt{a^2 - b^2})^2}} \quad (9)$$

(2.2) 方法一:

刚体绕瞬心转动惯量为

$$I_M = mr_1^2 + ma^2 \quad (10)$$

能量守恒:

$$\frac{1}{2}I_M\omega^2 = mg(a+c-b) \quad (11)$$

解得

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(a-b+\sqrt{a^2-b^2})}{r_1^2+a^2}} \quad (12)$$

将能量守恒对时间求导:

$$I_M\omega\beta + \frac{1}{2}\dot{I}_M\omega^2 + mgh\dot{c} = 0 \quad (13)$$

注意到

$$\dot{h}_c = \omega c \quad (14)$$

又有

$$\dot{I}_M = \frac{d}{dt}(mr_1^2 + mr_c^2) = 2mr_c\dot{r}_c \quad (15)$$

且

$$\begin{cases} r_c = a \\ \dot{r}_c = \omega\rho \cdot \frac{c}{a} \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\rho$ 为短轴端点处的曲率半径

$$\rho = \frac{a^2}{b} \quad (17)$$

因此

$$\dot{I}_M = 2m\omega \frac{a^2\sqrt{a^2-b^2}}{b} \quad (18)$$

解得

$$\beta = -g\sqrt{a^2-b^2} \frac{2a^2(a+\sqrt{a^2-b^2}) - a^2b + br_1^2}{b(a^2+r_1^2)^2} \quad (19)$$

方法二:

建立 $x$ 轴指向刚体滚动方向,  $y$ 轴竖直向上的平面直角坐标系。假设质心此时速度为 $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$ , 加速度为 $\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y}$ , 其中 $\hat{x}, \hat{y}$ 分别为 $x, y$ 轴的单位向量。

由于纯滚, 刚体上和地面的接触点速度为0:

$$\vec{v} + (-\omega)\hat{z} \times (c\hat{x} - b\hat{y}) = \vec{0} \quad (20)$$

同时, 这个点的加速度水平方向为0, 竖直方向的加速度则等效为在曲率圆上做角速度为 $\omega$ 的匀速圆周运动时的加速度:

$$\vec{a} - \omega^2(c\hat{x} - b\hat{y}) + (-\beta)\hat{z} \times (c\hat{x} - b\hat{y}) = \omega^2\rho\hat{y} \quad (21)$$

其中 $\rho$ 为短轴端点处的曲率半径

$$\rho = \frac{a^2}{b} \quad (22)$$

依次得到:

$$v_x = \omega b, v_y = \omega c \quad (23)$$

$$a_x = \omega^2 c + \beta b, a_y = -\omega^2 b + \beta c + \omega^2 \rho \quad (24)$$

能量守恒:

$$\frac{1}{2}mr_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = mg(a + c - b) \quad (25)$$

解得

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(a - b + \sqrt{a^2 - b^2})}{r_1^2 + a^2}} \quad (26)$$

设地面对刚体的全反力为  $\vec{R} = f\hat{x} + N\hat{y}$ , 写出关于刚体的牛顿运动定律:

$$m(a_x\hat{x} + a_y\hat{y}) = -mg\hat{y} + f\hat{x} + N\hat{y} \quad (27)$$

$$mr_1^2\beta = -fb - Nc \quad (28)$$

联立 (12') (14') (16') (17') (18') 式, 最终解得

$$\beta = -g\sqrt{a^2 - b^2} \frac{2a^2(a + \sqrt{a^2 - b^2}) - a^2b + br_1^2}{b(a^2 + r_1^2)^2} \quad (29)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 14 分: (1) 式 2 分, (2) 式 1 分, (3) 式 3 分, (4) (5) 式各 2 分, (6) 式 4 分;

第 (2) 问 26 分:

第 (2.1) 小问 8 分: (7) (8) 式 2 分, (9) 式 4 分;

第 (2.2) 小问 18 分:

方法一: (10) (11) 式 1 分, (12) 式 3 分, (13) 式 2 分, (14) (15) 式 1 分, (16) 式 2 分, (17) 式 1 分, (18) 式 2 分, (19) 式 4 分。

方法二: (20) 式 1 分, (21) 式 2 分, (22) (23) 式 1 分, (24) (25) 式 2 分, (26) 式 3 分, (27) (28) 式 1 分, (29) 式 4 分。

### 六、(50分) 动量交换绳的舞动

动量交换绳 (Momentum Exchange Tether) 是一种具有良好前景的航天器加速方式, 它的基本思路是将速度较大航天器的动能传递给速度较小航天器。具体实现上, 近地圆轨道上会预先安放若干旋转着的绳索, 来自低轨道的航天器和来自高轨道的航天器会与同一根动量交换绳进行交会对接,

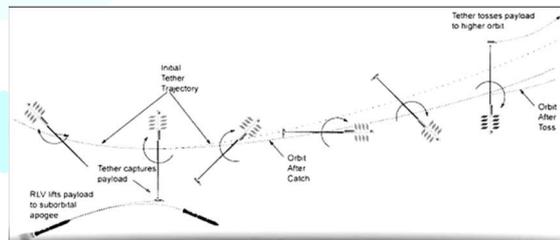


图 1 动量交换绳应用例

之后, 随着组合体的旋转, 来自高轨道的航天器的动量会被“交换”给来自低轨道的航天器。只要选择适当的时机脱钩, 来自低轨道的航天器将会获得额外的动能从而可以进入更高的轨道。图1展示了此方法在航天器发射过程中的应用。

我们来考察一个来自低轨道的航天器通过动量交换绳进行加速的过程。如图2, 开始时, 一根质量可略的动量交换绳T处在半径为  $R_0$  的圆轨道 (记为  $\Gamma$ ), 一个质量为  $m_1$  的航天器A与一个质量  $m_2$  的航天器B分别从低轨道与高轨道接近并同时连接到T上, 形成组合体A-T-B。起初航天器A,B的轨道与  $\Gamma$  相切, 连接后组合体的轨道与  $\Gamma$  相同。两个航天器经过一段时间后与T同时脱钩, 此时A进入了远地点更高的轨道且该轨道近地点处与  $\Gamma$  相切。地球质心记为  $O$ , 质量为  $M$ , 万有引力常数  $G$ 。

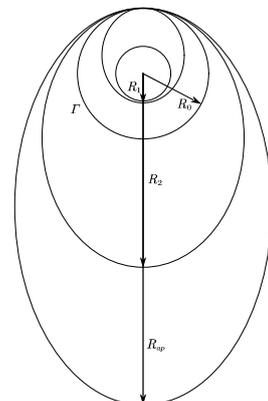


图 2 轨道示意图

(1) 我们下面来考察这一系列变轨过程。本问当中, 计算所受引力时, 近似认为A-T-B为一个质点。

(1.1) 求组合体在  $\Gamma$  上面的环绕速率  $v_0$ 。

(1.2) 设 A, B 最初轨道的近地点、远地点分别与地心相距  $R_1, R_2$ , 求出 A, B 与 T 对接前瞬间各自的速率  $v_{A0}, v_{B0}$ 。

(1.3) 考虑动量守恒定律, 试给出  $R_0, R_1, R_2, m_1, m_2$  之间满足的一个关系式。

(1.4) 认为上述加速过程中机械能守恒, 试求出脱钩瞬间 A, B 速率  $v_{Af}, v_{Bf}$ , 用  $G, M, R_0, R_1, R_2$  表示; 再求 A 进入的轨道的远地点与 O 点距离  $R_{ap}$ , 引入  $\gamma = \sqrt{\frac{2R_1}{R_1+R_0}}$ , 用  $\gamma, R_0$  来表示你的结果。

(2) 上述过程当中, A-T-B 组合体实际上是一个转动着的质点组并且具有一定的线度, 这实际上会使它的轨道同  $\Gamma$  有些不同, 本问做一些初步的讨论。

(2.1) 设动量交换绳 T 长度为  $l$  ( $l \ll r$ ), 组合体质心为 C, 并且将 A, B 分别视为质点。设  $\overline{BA}$  和  $\overline{OC}$  夹角为  $\theta$ , 对于 C 与地心距离  $r$  情形, 试写出组合体的引力势能表达式  $E_p(r, l, \theta)$ , 并展开到  $\frac{l}{r}$  的二阶项。

(2.2) 我们近似认为组合体 A-T-B 在匀速转动且角速度远大于公转角速度。故而可以对轨道上每一个时刻, 认为  $E_p$  可以对这样一个时间尺度  $\tau$  做平均, 使得组合体质心 C 位移在时间  $\tau$  内可以忽略, 而组合体自转周数充分大。求出上述“平均近似”之后所得到的  $\overline{E_p}$ , 并且求出对应的有心力  $f(r)$ 。

(2.3) 根据上述  $f(r)$ , 若组合体质心 C 处在  $\Gamma$  上, 试求出此时组合体实际的环绕速率  $v_c$ 。

(2.4) 承上问, 现对 A-T-B 施以径向微扰, 试求  $w(\varphi) \equiv \frac{1}{r(\varphi)} - \frac{1}{R_0}$  ( $|r(\varphi) - R_0| \ll R_0$ ), (可以含待定常量); 并由此得到轨道进动的

平均角速度  $\omega_p$ 。

提示: 你可能会用到以下公式: 有心力场  $\vec{f} = f(r)\vec{e}_r$  中质量为  $m$  质点运动的轨迹  $r(\varphi)$  满足 Binet 方程:

$$L^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = -mf(r) \tag{1}$$

其中  $u = \frac{1}{r(\varphi)}$ ,  $L$  为质点角动量,  $\varphi$  为极角。

解:

(1) (1.1) 对组合体, 直接列出牛顿第二定律方程求解。

$$\frac{GM(m_1 + m_2)}{R_0^2} = \frac{(m_1 + m_2)v_0^2}{R_0} \tag{1}$$

从而解得

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \tag{2}$$

(1.2) 我们直接考虑轨道机械能表达式

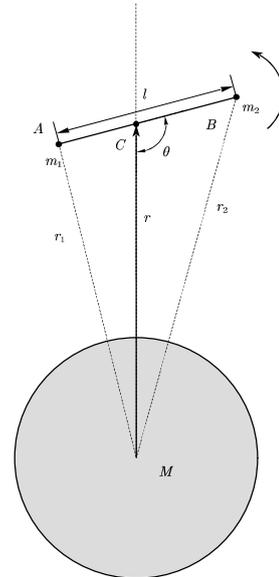


图 3 A-T-B 组合体构型示意图

$$\begin{cases} -\frac{GMm_1}{2a_1} = \frac{1}{2}m_1v_{A0}^2 - \frac{GMm_1}{R_0} \\ -\frac{GMm_2}{2a_2} = \frac{1}{2}m_2v_{B0}^2 - \frac{GMm_2}{R_0} \end{cases} \quad (3)$$

其中两条轨道的半长轴  $a_1 = \frac{R_1+R_0}{2}$ ,  $a_2 = \frac{R_2+R_0}{2}$ 。从而得到

$$\begin{cases} v_{A0} = \sqrt{\frac{GM}{R_0} \frac{2R_1}{R_1+R_0}} \\ v_{B0} = \sqrt{\frac{GM}{R_0} \frac{2R_2}{R_2+R_0}} \end{cases} \quad (4)$$

(1.3) 动量守恒表达式:

$$m_1v_{A0} + m_2v_{B0} = (m_1 + m_2)v_0 \quad (5)$$

代入 (2) (5) (6) 式结果, 得到

$$m_1 \sqrt{\frac{2R_1}{R_1+R_0}} + m_2 \sqrt{\frac{2R_2}{R_2+R_0}} = m_1 + m_2 \quad (6)$$

(1.4) 设 B 脱钩后瞬间速度  $v_{Bf}$ , 可以知道此时 A, B 速度方向都与  $\Gamma$  相切。从而写出动量守恒与机械能守恒表达式。

$$m_1v_{Af} + m_2v_{Bf} = (m_1 + m_2)v_0 \quad (7)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_{Af}^2 - \frac{GMm_1}{R_0} + \frac{1}{2}m_2v_{Bf}^2 - \frac{GMm_2}{R_0} = \frac{1}{2}m_1v_{A0}^2 - \frac{GMm_1}{R_0} + \frac{1}{2}m_2v_{B0}^2 - \frac{GMm_2}{R_0} \quad (8)$$

舍去代表碰撞前的解, 我们得到

$$\begin{cases} v_{Af} = \left(2 - \sqrt{\frac{2R_1}{R_1+R_0}}\right) \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \\ v_{Bf} = \left(2 - \sqrt{\frac{2R_2}{R_2+R_0}}\right) \sqrt{\frac{GM}{R_0}} \end{cases} \quad (9)$$

再考虑 A 的机械能表达式, 有

$$-\frac{GMm_1}{2a_{Af}} = \frac{1}{2}m_1v_{Af}^2 - \frac{GMm_1}{R_0} \quad (10)$$

其中半长轴  $a_{Af} = \frac{R_{ap}+R_0}{2}$ 。引入  $\gamma = \sqrt{\frac{2R_1}{R_1+R_0}}$  从而得到

$$R_{ap} = \frac{\gamma^2 - 4\gamma + 4}{-\gamma^2 + 4\gamma - 2} R_0 \quad (11)$$

(2) (2.1) 记  $l_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}l$ ,  $l_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}l$ , 我们考虑 A, B 的引力势能 (取无穷远为零势能)

$$\begin{cases} E_{PA} = -\frac{GMm_1}{\sqrt{r^2 + l_1^2 + 2rl_1 \cos \theta}} \\ E_{PB} = -\frac{GMm_2}{\sqrt{r^2 + l_2^2 - 2rl_2 \cos \theta}} \end{cases} \quad (12)$$

从而, 我们写出

$$E_P = E_{PA} + E_{PB}$$

$$E_P = -\frac{GMm_1}{\sqrt{r^2 + l_1^2 + 2rl_1 \cos \theta}} - \frac{GMm_2}{\sqrt{r^2 + l_2^2 - 2rl_2 \cos \theta}} \quad (13)$$

展开到二阶项:

$$E_P = -\frac{GMm_1}{r} \left( 1 - \frac{l_1 \cos \theta}{r} + \frac{l_1^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^2} \right) - \frac{GMm_2}{r} \left( 1 + \frac{l_2 \cos \theta}{r} + \frac{l_2^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^2} \right) \quad (14)$$

化简为

$$E_P = -\frac{GM(m_1 + m_2)}{r} - \frac{GM}{2r^3} \frac{m_1 m_2 l^2}{m_1 + m_2} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (15)$$

(2.2) 按照题意, 对一个自转周期取平均:

$$\overline{E_P} = -\frac{GM(m_1 + m_2)}{r} - \frac{GM}{4r^3} \frac{m_1 m_2 l^2}{m_1 + m_2} \quad (16)$$

求导:

$$f(r) = -\frac{GM(m_1 + m_2)}{r^2} - \frac{GM}{r^4} \frac{3m_1 m_2 l^2}{4(m_1 + m_2)} \quad (17)$$

(2.3) 令

$$\alpha = \frac{3m_1 m_2 l^2}{4(m_1 + m_2)^2}$$

写出牛顿第二定律表达式:

$$\frac{GM(m_1 + m_2)}{R_0^2} + \frac{\alpha GM(m_1 + m_2)}{R_0^4} = \frac{(m_1 + m_2)v_c^2}{R_0} \quad (18)$$

从而得到

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{R_0} \left( 1 + \frac{\alpha}{R_0^2} \right)} = \sqrt{\frac{GM}{R_0} \left( 1 + \frac{\alpha}{2R_0^2} \right)} = \sqrt{\frac{GM}{R_0} \left( 1 + \frac{3m_1 m_2 l^2}{8(m_1 + m_2)^2 R_0^2} \right)} \quad (19)$$

(2.4) 质点的角动量为

$$L = (m_1 + m_2)v_c R_0 = (m_1 + m_2)\sqrt{GMR_0} \left( 1 + \frac{\alpha}{2R_0^2} \right) \quad (20)$$

记  $u_0 = \frac{1}{R_0}$ , 代入 (17) 式, 得到:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - u_0 \frac{1 + \alpha u^2}{1 + \alpha u_0^2} = 0 \quad (21)$$

代入  $w(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} - \frac{1}{R_0}$ , 并且略去  $\alpha u_0^2$  二阶以上各项, 得到关于  $w(\varphi)$  的方程:

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + (1 - 2\alpha u_0^2)w = 0 \quad (22)$$

这个方程就对应于

$$w = A \cos(\eta\varphi + \varphi_0) \quad (23)$$

其中

$$\eta = \sqrt{1 - 2\alpha u_0^2} = 1 - \alpha u_0^2 = 1 - \frac{3m_1 m_2 l^2}{4(m_1 + m_2)^2 R_0^2} \quad (24)$$

从而, 对于一个径向运动周期, 得到进动角速度满足的关系:

$$\left| -\frac{2\pi}{\eta} + 2\pi \right| = \omega_P \frac{T_C}{\eta} \quad (25)$$

其中组合体环绕周期  $T_C$  满足

$$v_c T_C = 2\pi R_0 \quad (26)$$

$$T_C \doteq 2\pi \left(1 - \frac{1}{2} \alpha u_0^2\right) \sqrt{\frac{R_0^3}{GM}} \quad (27)$$

代入并完成近似, 得到:

$$\omega_P \doteq \alpha u_0^2 \sqrt{\frac{GM}{R_0^3}} = \frac{3m_1 m_2 l^2}{4(m_1 + m_2)^2 R_0^2} \sqrt{\frac{GM}{R_0^3}} \quad (28)$$

评分标准: 本题满分 50 分。

第 (1) 问 18 分:

第 (1.1) 小问 2 分: (1) (2) 式同时正确 2 分;

第 (1.2) 小问 4 分: (3) (4) 式 2 分;

第 (1.3) 小问 4 分: (5) (6) 式 2 分;

第 (1.4) 小问 8 分: (7) (8) 式 1 分, (9) (10) (11) 式 2 分。

第 (2) 问 32 分:

第 (2.1) 小问 7 分: (12) (13) 式写出任一个 2 分, (14) 式 2 分, (15) 式 3 分;

第 (2.2) 小问 6 分: (16) (17) 式 3 分;

第 (2.3) 小问 6 分: (18) (19) 式 3 分, 不做小量近似不得分;

第 (2.4) 小问 13 分: (20) (21) 式 2 分, (22) (23) 式 1 分, (24) 式 2 分, (25) (26) 式 1 分, (27) (28) 式 2 分。

七、(60分) 带电粒子在电磁波中的运动

本题目旨在利用一种全新的方法研究带电粒子在电磁波中的相对论性运动。

一带电粒子质量为  $m$ , 带电量  $q$ , 在时刻  $t = 0$  时位于真空中  $S$  系的原点, 并且具有初速度  $\dot{x} = v_x, \dot{y} = v_y, \dot{z} = 0$ 。空间中存在向着  $x$  轴正方向传播、偏振方向沿  $y$  轴的单色平面电磁波, 其电磁场为:

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \sin(k(x - ct)) \hat{y} \\ \vec{B} = \frac{E_0}{c} \sin(k(x - ct)) \hat{z} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $c$  为真空中的光速。

现在考察该粒子的运动。和这个问题诸多的其他解法不同, 我们采用如下方式进行研究: 首先求解该带电粒子在如下电磁场分布中的运动:

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \sin(k(x - ut)) \hat{y} \\ \vec{B} = \frac{E_0}{u} \sin(k(x - ut)) \hat{z} \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $u$  是趋近于  $c$  的速度。它们是如此的接近, 以至于  $1 - \frac{u}{c} \ll 1 - \frac{v}{c}$ , 其中  $v$  是粒子在任意时刻的速率 (但  $v$  仍为相对论性速度)。由于研究的问题里不涉及电磁场如何产生, 你不需要检查 (2) 式是否满足真空中的麦克斯韦方程组。

上面 (2) 式所述的电磁场相比于 (1) 式具有明显的优势: 在一个以速度  $u$  相对  $S$  参考系向右运动的参考系  $S'$  中, 根据电磁场的相对论性变换, 电磁场将变为静态的:

$$\begin{cases} \vec{E}' = 0 \\ \vec{B}' = \frac{E_0}{u} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \sin(k'x') \hat{z}' \equiv B \sin(k'x') \hat{z}' \end{cases} \quad (3)$$

其中  $x'$  为  $S'$  参考系的坐标。

(1) 利用洛伦兹变换以及电磁场在参考系变换中具有保持相位不变的特性, 求  $k'$  的表达式, 用  $k, u, c$  表示。同时, 写出粒子在  $S'$  参考系的初速度  $w_x \equiv \dot{x}', w_y \equiv \dot{y}'$ , 并计算粒子在  $S'$  系初态的洛伦兹因子  $\gamma_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w_x^2 + w_y^2}{c^2}}}$ , 用  $v_x, v_y, u, c$  表示。

(2) 接下来求解粒子的运动。由于  $u$  非常接近  $c$ , 粒子在  $S'$  参考系中将具有一个大的向左的初速度。因此, 可以认为粒子整体在  $x'$  轴上向左以速度  $w_x$  匀速直线运动, 而叠加一个较小的附加运动。

(2.1) 利用上述近似, 在  $S'$  参考系求解粒子的运动。将  $(x', y', z')$  用  $t'$  显式表示, 保留到首阶非平凡 (即不是匀速运动) 项。为了简化结果, 将答案用  $w_x, w_y, k', a \equiv \frac{qB}{\gamma_0 m k'}$  表示。

(2.2) 利用上一问的结果和洛伦兹变换, 在引入有限的参量  $\eta \equiv t' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$  的前提下令  $u \rightarrow c$ , 用参量  $\eta$  同时表示  $S$  系的  $(x, y, z, t)$ 。为了简化结果, 你可以引入参量  $b \equiv \frac{qE_0 \sqrt{c^2 - (v_x^2 + v_y^2)}}{mck(c - v_x)}$ 。

(3) 在特殊的初始条件下, 可以发现粒子做周期运动, 而不逐渐漂离原点。在给定无量纲参数  $\lambda = \frac{qE_0}{mc^2 k}$  的条件下, 求解粒子的初速度  $v_x, v_y$  应当满足的条件, 用  $\lambda$  表示。

解:

(1) 由相位不变

$$k' = \frac{k(x - ut)}{x'} = k \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad (1)$$

速度变换

$$w_x = \frac{(v_x - u)}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, w_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \quad (2)$$

计算得

$$\gamma_0 = \frac{1 - \frac{uv_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2}}} \quad (3)$$

(2)

(2.1) 由于磁力不做功, 所以粒子在  $S'$  系的速率大小不变。因此, 粒子的运动方程为

$$\begin{cases} \gamma_0 m \ddot{x}' = q \dot{y}' B \sin(k'x') \\ \gamma_0 m \ddot{y}' = -q \dot{x}' B \sin(k'x') \end{cases} \quad (4)$$

首先求解  $y'$  的运动。在运动方程里代入

$$x' \approx w_x t' \quad (5)$$

依次积分得

$$y' = w_y + a \cos(k'w_x t') - a \quad (6)$$

$$y' = (w_y - a)t' + \frac{a}{k'w_x} \sin(k'w_x t') \quad (7)$$

将(7)式代入(4)式,

$$\ddot{x}' = k'a(w_y - a + a \cos(k'w_x t')) \sin(k'w_x t') \quad (8)$$

依次积分得

$$\dot{x}' = \frac{a(a - w_y)}{w_x} (\cos(k'w_x t') - 1) - \frac{a^2}{4w_x} (\cos(2k'w_x t') - 1) + w_x \quad (9)$$

$$x' = \left( w_x - \frac{3a^2}{4w_x} + \frac{aw_y}{w_x} \right) t' + \frac{a(a - w_y)}{w_x k'} (\sin(k'w_x t')) - \frac{a^2}{8w_x^2 k'} (\sin(2k'w_x t')) \quad (10)$$

$z'$ 方向容易知

$$z' = 0 \quad (11)$$

(2.2) 我们首先来进行小量的分析。在(1)问求出的各个表达式里,

$$k' = k \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = O\left(\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right) \quad (12)$$

( $O\left(\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right)$ 代表量级是 $\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ 的量,下同)

$$a = b \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = O\left(\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right) \quad (13)$$

$$w_x + u = \frac{v_x \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v_x}{c}} = O\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \quad (14)$$

$$w_y \approx \frac{v_y}{1 - \frac{v_x}{c}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = O\left(\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right) \quad (15)$$

$$t' = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = O\left(\left(\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right)^{-1}\right) \quad (16)$$

这些式子中,凡是未与 $\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$ 共同出现的 $u$ ,我们都取 $u = c$ 的极限来计算。

洛伦兹变换给出

$$\begin{cases} t = \frac{t' + \frac{u}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad (17)$$

注意到 $x, t$ 表达式分母上的数是小量,因此分子也必然是小量。观察 $x'$ 的表达式知,对于

$x' + ut'$ 和 $t' + \frac{u}{c^2} x'$ , 由于

$$\begin{cases} t' + \frac{u}{c^2} w_x t' \approx \frac{\eta c}{c - v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ w_x t' + ut' \approx \frac{\eta v_x c}{c - v_x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \end{cases} \quad (18)$$

都会让 $x'$ 表达式中第一项 $w_x t'$ 相消,而使剩余一个 $O\left(\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right)$ 的小量; $x'$ 表达式里的其余项都是 $O\left(\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right)$ 的小量。同时, $y'$ 表达式里所有项都是 $O(1)$ 的。因此,代入洛伦兹变换后,得到的恰好都是 $O(1)$ 的物理量。(这也说明了为什么我们在(2.1)的求解中仅仅保留到这一阶。如果继续将 $x'$ 的表达式代入 $y'$ 的方程,可以求得下一阶的精确解,但是那一阶将在 $u \rightarrow c$ 时趋于0,从而不会对最终结果造成影响。)

将上述各式代入(7)(10)(11)并化简:

$$t = \eta \left( \frac{c}{c - v_x} + \frac{3b^2}{4c^2} - \frac{bv_y}{c(c - v_x)} \right) - \frac{b \left( b - \frac{v_y c}{c - v_x} \right)}{kc^3} \sin(kc\eta) + \frac{b^2}{8c^3 k} \sin(2kc\eta) \quad (19)$$

$$x = \eta \left( \frac{cv_x}{c - v_x} + \frac{3b^2}{4c} - \frac{bv_y}{(c - v_x)} \right) - \frac{b \left( b - \frac{v_y c}{c - v_x} \right)}{kc^2} \sin(kc\eta) + \frac{b^2}{8c^2 k} \sin(2kc\eta) \quad (20)$$

$$y = \left( \frac{cv_y}{c - v_x} - b \right) \eta + \frac{b}{kc} \sin(kc\eta) \quad (21)$$

$$z = 0 \quad (22)$$

(3) 如果粒子做周期运动,那么随着 $\eta$ 的趋向无穷(可以发现因为 $t$ 在增加, $\eta$ 也必然增加或减少直至无穷), $x, y$ 并不趋向无穷。这意味着

$$\begin{cases} \frac{cv_x}{c - v_x} + \frac{3b^2}{4c} - \frac{bv_y}{(c - v_x)} = 0 \\ \frac{cv_y}{c - v_x} - b = 0 \end{cases} \quad (23)$$

解出

$$\begin{cases} v_x = \frac{b^2}{b^2 + 4c^2} c \\ v_y = \frac{4bc}{b^2 + 4c^2} c \end{cases} \quad (24)$$

将(14)式代入题目定义的无量纲参数带来的方程

$$b = \frac{\lambda \sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x}{c}} c \quad (25)$$

可以解出

$$b = \frac{2\lambda}{\sqrt{4 + 2\lambda^2}} c \quad (26)$$

$$\begin{cases} v_x = \frac{\lambda^2}{4 + 3\lambda^2} c \\ v_y = \frac{2\lambda\sqrt{4 + 2\lambda^2}}{4 + 3\lambda^2} c \end{cases} \quad (27)$$

评分标准: 本题满分 60 分。

第 (1) 问 8 分: (1) 式 2 分, (2) (3) 式各 3 分;

第 (2) 问 40 分:

第 (2.1) 小问 18 分: (4) 式 2 分, (5) 式 1 分, (6) (7) (8) 式各 2 分, (9) (10) 式各 4 分, (11) 式 1 分;

第 (2.2) 小问 22 分: (13) (14) (15) 式各 1 分, (17) 式 2 分, (18) (19) (20) (21) 式各 4 分, (22) 式 1 分;

第 (3) 问 12 分: (23) 式 2 分, (24) 式 4 分, (26) 式 2 分, (27) 式 4 分 (答案正确即可得全部分数)



### 版权信息

#### 命题人

史景喆 代佳乐 宋卓洋 薛泽皓 胡宸源 王驰 赵瀚宏

#### 审题人

王梓人 陆伊炆 杨岱旭 赵瀚宏 高铭泽 龚俊安 余博文

### 联系方式



微信公众号  
CPHOS



官方网站  
[www.cphos.cn](http://www.cphos.cn)



CPHOS 论坛

邮箱

[service@cphos.cn](mailto:service@cphos.cn)

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考