

第 19 届 CPHOS 物理竞赛联考

理论试题 参考答案

本试题于 2024 年 03 月 08 日 08:00 发布, 最后更新于 2024 年 3 月 12 日 11:52。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试, 有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名, 报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

答题卡上传

2024/03/08 16:00 - 2024/03/11 10:00

阅卷

2024/03/12 12:00 - 2024/03/16 18:00

非正式成绩

2024/03/16 20:00

成绩申诉

2024/03/16 20:00 - 2024/03/17 18:00

正式成绩

2024/03/17 22:00

考生须知

1. 理论试题共 **5** 页, 理论答题卡共 **8** 页, 答题时间 **180** 分钟, 试题满分 **320** 分。
2. 请在答题卡的指定答题区域内答题, 试题和草稿纸上的内容将不会作为评分参考, 不可申请答题卡加页。
3. 若发现试题存在问题, 请向领队(教练)反映, 由其转达至相关微信群聊。
4. 试题答案及相关分析均会在官方网站 www.cphos.cn 上发布。

一、(40 分)

同轴电缆广泛地应用于模拟信号和数字信号的传输, 比如传播有线电视信号、长途电话信号和局域网信号。本题即考虑最基本的电磁波模式在同轴电缆中传播时, 其内外径的设计对传输功率和损耗的影响。

如图1.1所示, 同轴电缆由内外两层导体构成, 中心导体通常为铜质导线, 中心导体外面有一层绝缘介质层, 相对介电常数为 ϵ_r , 相对磁导率 $\mu_r \approx 1$, 绝缘层外面是外层导体, 外层导体外面是塑料保护套。同轴传输线的内径为 a , 外径为 b 。

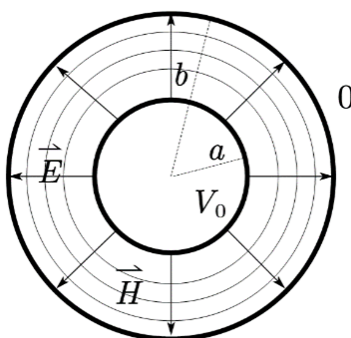


图1.1 同轴传输线中的电磁波

本题只考虑最简单的可以在同轴传输线中传播的电磁波模式, 即电场轴对称沿径向, 磁场沿角向分布; 即在每一瞬时 t 、在 z 处看, 内、外导体横截面同心圆是两个等位面, 在其间绝缘介质内电位振幅只是半径 r 的函数, 如图1.1所示。此时的电势波可以表示为 $\Phi(r)e^{i(kz-\omega t)}$,

其中 ω 为角频率, k 为波矢, 满足条件 $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$ 。

(1) 已知 $\Phi(a) = V_0$, $\Phi(b) = 0$, 试求解电场强度 \vec{E} 和磁场强度 \vec{H} 的分布。

(2) 接(1), 定义同轴线内外导体之间的“电压” $V(z, t) = V_0 e^{i(kz - \omega t)}$, 同轴导体内导体上的“电流” $\oint H_\phi dl$ 。计算同轴线的特性阻抗 $Z_c = \frac{V}{I}$ 。

(3) 接(2), 已知介质不被击穿的最大电场强度为 E_{\max} (E_{\max} 不变)。固定外径 b , 我们调整内径 a , 来使同轴传输线有更好的传输性质。

(3.1) 首先不考虑内外导体的损耗, 计算电磁场的传输功率 P , 并求出传输功率最大的条件, 并计算此时对于空气介质的特性阻抗大小。

提示:

$$P = \iint \vec{S}_n \cdot \vec{e}_z dS = \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^{2\pi} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{e}_z r d\phi dr \quad (1.1)$$

(3.2) 接下来考虑有损耗的情况, 设内外导体的表面电阻都为 R_s , 即单位长度的导体等效的直流电阻, 已知功率按 z 轴衰减 $P = P_0 e^{-2\alpha z}$, α 为衰减系数。试求衰减系数 α , 并求出损耗最小的条件, 计算此时对于空气介质的特性阻抗大小。

(3.3) 根据上述分析, 解释实际生活中传输高功率的信号通常使用特征阻抗为 50Ω 的同轴传输线的原因。

参考解答:

(1) 我们只考虑电势波在二维截面中的分布, 电势满足二维拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \Phi(r) = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (1)$$

当然我们也知道无限长线电荷的电势满足此条件, 所以解为

$$\Phi = A \ln r + B \quad (2)$$

其中 A, B 为常数, 代入边界条件 $\Phi(a) = V_0$, $\Phi(b) = 0$

$$\Phi = V_0 \frac{\ln \frac{r}{b}}{\ln \frac{a}{b}} \quad (3)$$

那么电场强度是电势的负梯度

$$\vec{E} = -\nabla \Phi e^{i(kz - \omega t)} = \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{\vec{e}_r}{r} e^{i(kz - \omega t)} \quad (4)$$

由法拉第电磁感应定律

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \rightarrow i \vec{k} \times \vec{E} = i \omega \mu_0 \vec{H} \quad (5)$$

结合题给关系式 $\frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}}$, 代入得到磁场强度

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_0}} \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{\vec{e}_\phi}{r} e^{i(kz - \omega t)} \quad (6)$$

(2) 电压我们不用特地去求了, 只要求电流

$$I = \oint H_\phi dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_0}} \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{r} e^{i(kz - \omega t)} r d\phi = 2\pi \sqrt{\frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\mu_0}} \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} e^{i(kz - \omega t)} \quad (7)$$

根据定义很容易算出特性阻抗

$$Z_c = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} \ln \frac{b}{a} \quad (8)$$

(3)

(3.1) 首先由计算能量的传输功率公式

$$P = \iint \vec{S}_n \cdot \vec{e}_z dS = \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{e}_z r d\varphi dr \quad (9)$$

代入(4)(6)式, 计算可得

$$P = \pi \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{V_0^2}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{1}{2} I_0 V_0 \quad (10)$$

其中 I_0 是(2)中定义的电流的振幅, 可以发现传输功率满足交流电里功率和电压电流之间的关系。下面, 在 $r = a$ 处取到最大电场强度 E_{\max}

$$E_{\max} = \frac{V_0}{a \ln \frac{b}{a}} \quad (11)$$

代入传输功率中

$$P = \pi \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_0}} E_{\max}^2 a^2 \ln \frac{b}{a} \quad (12)$$

此时对 a 求导得到 P 取极大值的条件

$$\frac{dP}{da} = 0 \rightarrow \frac{b}{a} = 1.649 \quad (13)$$

对于空气介质 $\varepsilon_r \approx 1$, 代入得到此时的特征阻抗大小为

$$Z_{c1} = 29.979 \Omega \quad (14)$$

(3.2) 根据题目所给衰减规律 $P = P_0 e^{-2\alpha z}$, 推出衰减系数表达式

$$\alpha = -\frac{1}{2P} \frac{dP}{dz} \quad (15)$$

下面计算 $\frac{dP}{dz}$, 即单位长度能量的损耗功率

$$P_l = \frac{R_s}{2} \left[\oint_{r=a} H_\varphi^2(a) dl + \oint_{r=b} H_\varphi^2(b) dl \right] = \pi R_s \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_0} \frac{V_0^2}{\ln^2 \frac{b}{a}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (16)$$

相应的衰减系数

$$\alpha = \frac{P_l}{2P} = \frac{R_s}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (17)$$

对衰减系数求导, 得到 α 取极大值的条件

$$\frac{\partial \alpha}{\partial a} = 0 \rightarrow \frac{b}{a} = 3.591 \quad (18)$$

对于空气介质 $\varepsilon_r \approx 1$, 代入得到此时的特征阻抗大小为

$$Z_{c2} = 76.655 \Omega \quad (19)$$

(3.3) 注意到 50Ω 的特征阻抗的处于 $Z_{c1} = 29.979 \Omega$ 和 $Z_{c2} = 76.655 \Omega$ 之间, 其兼顾了较大

的功率容量和较小的损耗，所以适于传输高功率信号。

评分标准：本题满分40分。

第(1)问12分：(1)(2)(3)(4)(5)(6)式各2分；

第(2)问4分：(7)(8)式各2分；

第(3)问24分：

第(3.1)小问10分：(10)(11)(12)(13)(14)式各2分；

第(3.2)小问12分：(15)(17)(18)(19)式各2分，(16)4分；

第(3.3)小问2分：解释2分。

二、(40分)

小明同学不好好刷物竞题，被骗去了缅北。在潜伏在诈骗集团内部的警察叔叔帮助下，他找到了机会逃跑。然而，坏人们追了上来，他们所处的地图信息如下。

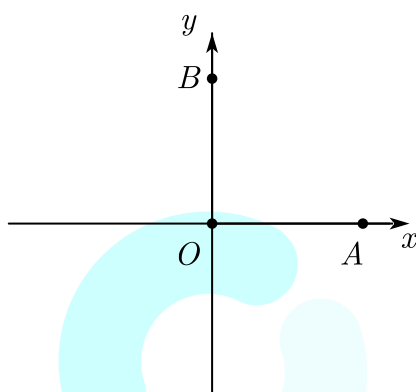


图2.1 区域地图示意图

如图2.1所示， x 轴和 y 轴是道路，小明初始在 O 点，坏人初始在 B 点， $OA = OB = l$ ，小明沿 x 轴正方向逃跑，坏人沿 y 轴负方向追赶，并且朝着小明用机枪扫射。坏人们的弹药很多，以至于不会用完，并且子弹运行轨迹上子弹非常密，可以认为相邻两发子弹发射时间间隔无限短。子弹速度远大于小明和坏人跑步速度，故机枪的子弹运动时间可忽略。由于坏人们枪法比较烂，机枪的有效射程为 l ，即小明与坏人距离大于上述射程时，小明不会被击中；而由于小明逃出来时很累，只能勉强不被击中，故逃跑过程中与坏人的距离始终保持 l 。

(1) 警察叔叔潜伏在第一象限接应，并且小明从 O 点到达 A 点过程中位置保持不动，试求警察叔叔选择潜伏地点时不能选择（即会被机枪打到）的区域面积。

(2) 小明到达了 A 点，并发现了坏人们在 A 点藏匿的大炮。于是小明没多想，就朝着 O 点开了一炮。假设在炮弹飞行时间内，重力作用可忽略。然而不幸的是，炮弹飞行参数的设置器在坏人手里，因此坏人为了让炮弹不要打到 O 点，修改了飞行参数，但慌乱之中，坏人也不知道自己究竟设置了什么样的参数。大炮的控制器可以控制燃料的排放速度（不必考虑燃料排放导致的质量变化），从而炮弹单位质量受到的燃料推力为 $-c(t)s(t)$ ， t 为从炮弹发射开始的时间， $s(t)$ 为炮弹从 A 点飞出的距离，向左为正， $c(t)$ 可正可负。炮弹上有助推器，推力与空气阻力的单位质量的合力为 $-b(t)v(t)$ ， $v(t)$ 为炮弹的速度，向左为正。

(2.1) 若坏人们将参数设置为 $b(t) = 2\gamma$ ， $c(t) = \omega_0^2$ ，均为常数且 $\omega_0 \neq \gamma$ ，炮弹初速为 v_0 ，请通过定量计算，判断炮弹能否击中在 O 点的坏人。

(2.2) 若 $c(t) < 0$ ，炮弹以初速 v_0 射出，试问炮弹是否可能击中小明。

参考解答：

(1) 可以假想坏人与小明连线上有一根长为 l 的杆，即求杆运动轨迹的包络线 L ，杆上与包

络线相切的点速度沿杆，瞬心为 P ，作 $PQ \perp MN$ ，则 Q 为切点。

由几何关系得

$$Q(l\cos^3\theta, l\sin^3\theta) \quad (1)$$

故 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = l\cos^3\theta \\ y = l\sin^3\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \quad (2)$$

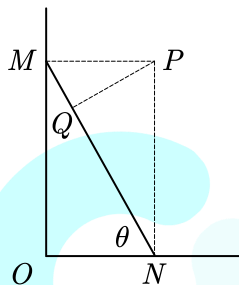
也可写成直角坐标的形式

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}} (0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq l) \quad (3)$$

L 为星形线。

故不能选面积为

$$S = \int_0^l y dx = 3l^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin^4\theta d\theta = 0.2945l^2 \quad (4)$$



(2)

(2.1) 炮弹运动方程为

$$\ddot{s}(t) + b(t)\dot{s}(t) + c(t)s(t) = 0 \quad (5)$$

代入参数，

$$\ddot{s}(t) + 2\gamma\dot{s}(t) + \omega_0^2 s(t) = 0 \quad (6)$$

解得

当 $\omega_0 > \gamma$ 时，

$$s(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t\right) \quad (7)$$

$$v(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \left[-\gamma \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t\right) + \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t\right) \right] \quad (8)$$

令 $v(t) = 0$ 可得

$$s_{\max} = \frac{v_0}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \arctan \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}{\gamma}\right) \quad (9)$$

当 $\omega_0 < \gamma$ 时，

$$s(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \sinh\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t\right) \quad (10)$$

$$v(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \left[-\gamma \sinh\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t\right) + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \cosh\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t\right) \right] \quad (11)$$

令 $v(t) = 0$ 可得

$$s_{\max} = \frac{v_0}{\omega_0} \exp\left(-\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}{\gamma}\right) \quad (12)$$

当 $s_{\max} \geq l$ 时，可以打到坏人，否则不行。

(2.2) 假设炮弹会打到小明，则存在某个时刻 t_0 ，使得 $s(t_0) = 0$ ，从而存在某个时刻 t_1 使得 $s(t)$ 取最大值 $s(t_1) > 0$ ，由于 $s(t)$ 在 t_1 处取最大值，故 $\dot{s}(t_1) = 0$ ， $\ddot{s}(t_1) \leq 0$ ，从而

$$\ddot{s}(t_1) + b(t_1)\dot{s}(t_1) + c(t_1)s(t_1) < 0 \quad (13)$$

这与运动方程矛盾，故炮弹不会击中小明。

评分标准：本题 40 分。

第 (1) 问 12 分：(2) 式 6 分，(4) 式 6 分；

第 (2) 问 28 分：

第 (2.1) 问 22 分：(5) (6) 式各 2 分，(7) (8) (9) (10) (11) (12) 式各 3 分；

第 (2.2) 问 6 分：结论正确 1 分，论证过程正确 5 分。

三、(50 分)

卫衣的绳索放进洗衣机后又被甩出来了！为研究绳索在离心力作用下的运动，建立以下简化模型：如图3.1所示，光滑水平面上置有一半半径为 R 的圆弧形轨道，轨道内壁摩擦系数为 μ ， $\theta = \pi/3$ 。将一质量线密度为 λ 的软绳通过孔 A 、 B 穿入轨道中，两端伸出长度分别记为 l_{10} 、 l_{20} ； l_{10} 、 l_{20} 均相比于 R 较大，且 $l_{10} > l_{20}$ 。整个装置在外力作用下绕 A 、 B 连线的中点 O 以角速度 ω 绕垂直平面的轴匀速旋转。由于 ω 较大，忽略轨道外的绳索在切向上的不同步运动，即近似认为轨道外绳索始终沿径向呈一条直线运动。本题中不考虑重力。

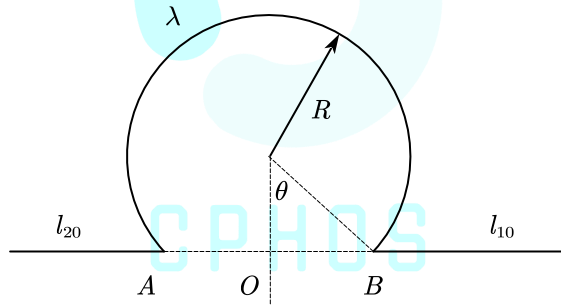


图3.1 绳索的简化模型

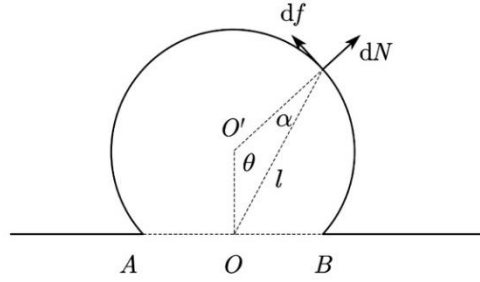
(1) 为保证该体系保持匀速转动而绳索不滑动，计算 l_{20} 的最小值 l_m 。

(2) 若 $l_{20} < l_m$ ，取 $\mu = 1$ ，计算当左侧绳索收入一半时，绳索被甩出的速度 v_f 。答案中可以保留一个关于 x 的有理定积分式，但需要给出该积分式的上下限。答案用 $\alpha = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1+e^{-\frac{4\pi}{3}}}{1-e^{-\frac{4\pi}{3}}}\right)$ ， R ， $L' = \frac{l_{10}+l_{20}}{1-e^{-\frac{4\pi}{3}}}$ ， ω ， l_{10} ， l_{20} 表示。

注：由于工作失误，本题最初未考虑到科里奥利力在第2问中带来的影响。此错误不应由考生承担，因此我们给了“考虑了科里奥利力在侧壁上产生摩擦”和“没有考虑科里奥利力在侧壁上产生摩擦”的两种答案和评分标准。

参考解答：

(1) 首先对轨道中 θ 处绳元分析，如图所示。



假设其受到管道作用的 dN 和 df 方向，绳中张力分布为 $T = T(\theta)$ ，在转动系下：

$$\begin{cases} R d\theta \lambda \omega^2 l \cos \alpha + dN = T d\theta \\ R d\theta \lambda \omega^2 l \sin \alpha + dT + df = 0 \end{cases} \quad (1)$$

由几何关系：

$$l(\theta) = \frac{R}{2} \sqrt{5 - 4 \cos \theta} \quad (2)$$

角度关系：

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sin \theta}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}} \\ \cos \alpha = \frac{2 - 2 \cos \theta}{\sqrt{5 - 4 \cos \theta}} \end{cases} \quad (3)$$

设两端口处绳中张力为 T_1, T_2 ，受力平衡：

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} \lambda \omega^2 (l_{10}^2 + \sqrt{3} R l_{10}) \\ T_2 = \frac{1}{2} \lambda \omega^2 (l_{20}^2 + \sqrt{3} R l_{20}) \end{cases} \quad (4)$$

在滑动的临界：

$$df = \mu |dN| \quad (5)$$

代入 (1) 式化简，由于 l_{10}, l_{20} 较大，因此 dN 不会变号：

$$\frac{dT}{d\theta} + \mu T + \frac{1}{2} \lambda \omega^2 R^2 (\mu \cos \theta + \sin \theta) = \mu \lambda \omega^2 R^2 \quad (6)$$

微分方程通解为：

$$T = \lambda \omega^2 R^2 + C e^{-\mu \theta} - \frac{1}{2} \lambda \omega^2 R^2 \frac{2 \mu \sin \theta - (1 - \mu^2) \cos \theta}{1 + \mu^2} \quad (7)$$

代入 B 处边界条件：

$$C = \left(\frac{1}{2} \lambda \omega^2 l_{10}^2 + \frac{1}{2} \lambda \omega^2 R^2 \frac{\sqrt{3} \mu - \frac{1}{2} (1 - \mu^2)}{1 + \mu^2} - \lambda \omega^2 R^2 \right) e^{\mu \frac{\pi}{3}} \quad (8)$$

再与 A 处对比，解得：

$$l_m = \sqrt{(l_{10}^2 + \sqrt{3} l_{10} R) e^{-\mu \frac{4\pi}{3}} + \frac{R^2}{1 + \mu^2} \left[\sqrt{3} \left(1 + e^{-\mu \frac{4\pi}{3}} \right) \mu + \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\mu \frac{4\pi}{3}} \right) (5 + 3 \mu^2) \right] + \frac{3}{4} R^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} R} \quad (9)$$

评分标准：

第 (1) 问 22 分：(1) 式 3 分，(2) (3) (4) 式各 2 分，(5) 式 1 分，(6) (7) (8) (9) 式各 3 分。

(2) 【考虑了科里奥利力在侧壁上产生摩擦的做法】

当绳索整体运动起来时, 设某时刻速度为 v , 加速度为 a 。运动方程:

$$\begin{cases} R d\theta \lambda \omega^2 l \cos \alpha + dN + \frac{v^2}{R} R d\theta \lambda - 2Rv\omega d\theta = T d\theta \\ R d\theta \lambda \omega^2 l \sin \alpha + dT + df + R d\theta \lambda a = 0 \end{cases} \quad (10)$$

同理, 由于研究时刻左侧只收入一半绳子, 因此仍满足 dN 不会变号, 联立得:

$$\frac{dT}{d\theta} + \mu T + \frac{1}{2} \lambda \omega^2 R^2 (\mu \cos \theta + \sin \theta) + \lambda R a = \mu \lambda (\omega R - v)^2 \quad (11)$$

微分方程通解:

$$T = \lambda (\omega R - v)^2 - \lambda R a + C' e^{-\theta} - \frac{1}{2} \lambda \omega^2 R^2 \sin \theta \quad (12)$$

对两侧绳分析, 同样记端点处张力为 T_1, T_2 。当两侧绳长度分别为 l_1, l_2 时, 运动方程:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \lambda \omega^2 l_1 (l_1 + \sqrt{3}R) - T_1 = \lambda l_1 a + \lambda v^2 \\ T_2 - \frac{1}{2} \lambda \omega^2 l_2 (l_2 + \sqrt{3}R) = \lambda l_2 a - \lambda v^2 \end{cases} \quad (13)$$

绳长固定:

$$L = l_1 + l_2 = l_{10} + l_{20} \quad (14)$$

将(13)式代入(12)式, 可得:

$$\begin{aligned} & \frac{2Rv}{\omega} - \frac{2v^2}{\omega^2} - \frac{l_1 a}{\omega^2} + \frac{a}{\omega^2} \left(R + \frac{L}{1 - e^{-\frac{4}{3}\pi}} \right) + \frac{l_1^2}{2} - l_1 \left(\frac{L}{1 - e^{-\frac{4}{3}\pi}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{4}{3}\pi}}{1 - e^{-\frac{4}{3}\pi}} R \right) \\ & + \frac{L^2 + \sqrt{3}LR}{2(1 - e^{-\frac{4}{3}\pi})} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{4}{3}\pi}}{1 - e^{-\frac{4}{3}\pi}} - 1 \right) R^2 = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

利用题给字母化简得到

$$\frac{2Rv}{\omega} - \frac{2v^2}{\omega^2} + \frac{a}{\omega^2} (R + L' - l_1) + \frac{l_1^2}{2} - l_1 (L' + 2(\alpha - 1)R) + \frac{L + \sqrt{3}R}{2} L' + (\alpha - 2)R^2 = 0 \quad (15')$$

此方程将只能隐式确定 v 和 l 的关系。为了说明这一点, 利用 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx}$, 先计算齐次方程的解:

$$2v^2 - 2\omega Rv + \frac{dv}{dl_1} v (l_1 - R - L') = 0 \quad (16)$$

$$v - \omega R = \frac{A}{(R + L' - l_1)^2} \quad (17)$$

再带入非齐次项:

$$\frac{dA}{dl_1} (\omega R (R + L' - l_1)^2 + A) + f(l_1) = 0 \quad (18)$$

其中

$$f(l_1) = \omega^2 \left(\frac{l_1^2}{2} - l_1 (L' + 2(\alpha - 1)R) + \frac{L + \sqrt{3}R}{2} L' + (\alpha - 2)R^2 \right) (R + L' - l_1) \quad (19)$$

由(18)和(19)式唯一确定了 $A \sim l_1$ 的关系式, 从而唯一确定了 v 和 l 的关系。只不过, 此关系式难以写成显式形式。

评分标准:

第 (2) 问 28 分: 考虑到科里奥利力的存在、也即正确写出 (10) 式得 6 分 (第一式 5 分, 第二式 1 分), (11) (12) (13) 式各 2 分, (14) 式 1 分, (15) 或 (15') 式 7 分, (17) 式 2 分, (18) (19) 式各 3 分。

【没有考虑科里奥利力在侧壁上产生摩擦的做法】

当绳索整体运动起来时, 设某时刻速度为 v , 加速度为 a 。运动方程:

$$\begin{cases} R d\theta \lambda \omega^2 l \cos \alpha + dN + \frac{v^2}{R} R d\theta \lambda = T d\theta \\ R d\theta \lambda \omega^2 l \sin \alpha + dT + df + R d\theta \lambda a = 0 \end{cases} \quad (10)$$

同理, 由于研究时刻左侧只收入一半绳子, 因此仍满足 dN 不会变号, 联立得:

$$\frac{dT}{d\theta} + \mu T + \frac{1}{2} \lambda \omega^2 R^2 (\mu \cos \theta + \sin \theta) + \lambda R a = \mu \lambda \omega^2 R^2 + \mu \lambda v^2 \quad (11)$$

微分方程通解:

$$T = \lambda (\omega^2 R^2 + v^2 - aR) + C' e^{-\theta} - \frac{1}{2} \lambda \omega^2 R^2 \sin \theta \quad (12)$$

对两侧绳分析, 同样记端点处张力为 T_1, T_2 。当两侧绳长度分别为 l_1, l_2 时, 运动方程:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \lambda \omega^2 l_1 (l_1 + \sqrt{3}R) - T_1 = \lambda l_1 a + \lambda v^2 \\ T_2 - \frac{1}{2} \lambda \omega^2 l_2 (l_2 + \sqrt{3}R) = \lambda l_2 a - \lambda v^2 \end{cases} \quad (13)$$

绳长固定:

$$L = l_1 + l_2 = l_{10} + l_{20} \quad (14)$$

将 (13) 式代入 (12) 式, 可得:

$$C' = \lambda \left(\frac{1}{2} \omega^2 (l_1^2 + \sqrt{3}R l_1) - l_1 a - 2v^2 - \omega^2 R^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + aR \right) e^{\frac{\pi}{3}} \quad (15)$$

即

$$2v^2 - a(l_1 - R - L') + (2 - \alpha)\omega^2 R^2 - \frac{1}{2}\omega^2(l_1^2 - 2(L' + 2(\alpha - 1)R)l_1 + LL' + \sqrt{3}L'R) = 0 \quad (16)$$

其中 $L = l_{10} + l_{20}$, 利用 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx}$, 先计算齐次方程解:

$$v^2 = A(R + L' - l_1)^{-4} \quad (17)$$

再代入非齐次项:

$$\frac{1}{2} \frac{dA}{dl_1} (R + L' - l_1)^{-3} = (2 - \alpha)\omega^2 R^2 - \frac{1}{2}\omega^2(l_1^2 - 2(L' + 2(\alpha - 1)R)l_1 + LL' + \sqrt{3}L'R) \quad (18)$$

故

$$A = \omega^2 \int (R + L' - l_1)^3 ((2 - \alpha)R^2 - l_1^2 + 2(L' + 2(\alpha - 1)R)l_1 - LL' - \sqrt{3}L'R) dl_1 + C'' \quad (19)$$

对边界条件分析, 当 $l_1 = l_{10}$ 时, $v^2 = 0$, 得:

$$v^2 = \omega^2 (R + L' - l_1)^{-4}.$$

$$\int_{l_{10}}^{l_1} (R + L' - l_1)^3 ((2 - \alpha)R^2 - l_1^2 + 2(L' + 2(\alpha - 1)R)l_1 - LL' - \sqrt{3}L'R) dl_1 \quad (20)$$

末态左侧绳索收入一半, 则:

$$l_f = l_{10} + \frac{1}{2} l_{20} \quad (21)$$

因而：

$$v_f^2 = \omega^2 (R + L' - l_f)^{-4} \cdot \int_{l_{10}}^{l_f} (R + L' - l_1)^3 \left((2 - \alpha)R^2 - l_1^2 + 2(L' + 2(\alpha - 1)R)l_1 - LL' - \sqrt{3}L'R \right) dl_1 \quad (22)$$

即得：

$$v_f = \omega \sqrt{(R + L' - l_f)^{-4} \int_{l_{10}}^{l_f} 2(R + L' - x)^3 \left((2 - \alpha)R^2 + (L' + 2(\alpha - 1)R)x - \frac{1}{2}(x^2 - LL' - \sqrt{3}L'R) \right) dx} \quad (23)$$

评分标准：

第 (2) 问 28 分：(10) (11) 式各 2 分，(12) 式 3 分，(13) 式 2 分，(14) 式 1 分，(15) 式 2 分，(16) 式 3 分，(17) (18) (19) (20) 式各 2 分，(21) 式 1 分，(22) (23) 式各 3 分。

四、(40 分)

MOS 是金属-氧化物-半导体 (Metal-Oxide-Semiconductor) 的简称，它的本质是一个电容。MOS 电容的研究是学习 MOSFET 的基础。半导体一侧可为 P 型半导体 (载流子为空穴) 或 N 型半导体 (载流子为电子)，中间为 MOS 结构。如图 4.1 和 4.2 所示的 MOS 结构中，金属端为栅极，在两侧有两个高掺杂区域，分别为源极和漏极。如果源漏区为 N 型掺杂，就是 NMOSFET，如果是 P 型掺杂，就是 PMOSFET。

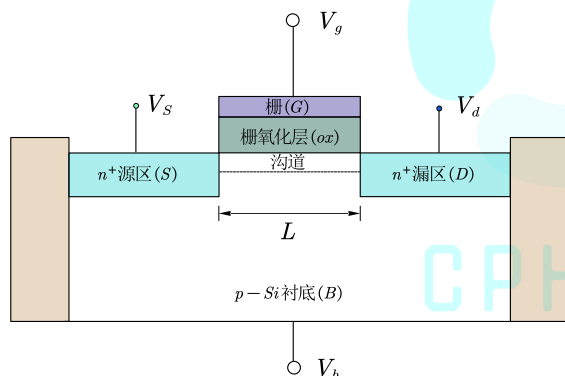


图 4.1 MOSFET 侧视图

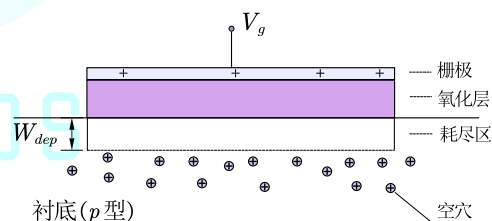


图 4.2 MOS 电容示意 (弱反型)

(1) 以 P 型衬底为例研究主体部分 MOS 电容的工作状态。

(1.1) 设正常情况下外加电压 $V_g = V_{fb}$ ，称为平带状态。如果从平带状态加正电压，半导体表面的空穴浓度减少，出现了耗尽区，称这种状态为表面耗尽，正电压继续加大至表面只剩下负电中心，称为弱反型。基于平带状态下施加的正电压分成氧化层上的压降 V_{ox} 和半导体耗尽区压降 ϕ_s 两部分，且耗尽区的宽度 $W_{dep} = \sqrt{\frac{2\epsilon_s \phi_s}{qn}}$ (可以理解为耗尽区的“厚度”，注意和图中的 W 区分)，知原载流子浓度为 n ，电荷量为 q ，单位面积的氧化层电容为 C_{ox} ，写出 V_g 的表达式，用 V_{fb} ， q ， ϵ_s ， n ， W_{dep} ， C_{ox} 表示。

(1.2) 在上一问中，衬底表面处的电子浓度和体内的空穴浓度相等，此为达到强反型的阈值状态。直接给出阈值电压 V_{th} 以及 N 型衬底电容阈值电压 V_{th} 的表达式，用 V_{fb} ， q ， ϵ_s ， n ， ϕ_s ， C_{ox} 表示。

(2) MOSFET 的 $I - V$ 特性

(2.1) V_g 达到阈值电压后继续增加，此时半导体表面电子浓度将超过半导体体内空穴浓度，

设此时反型层电荷面密度为 Q_{inv} ，其为负电荷时写成负值。在 MOS 中栅极电压是金属端与衬底间的电压，即 V_{gb} ，而 MOSFET 中一般以源极为参考，栅极电压指 $V_{\text{gs}} = V_{\text{g}} - V_{\text{s}}$ 。当 $V_{\text{b}} \neq V_{\text{s}}$ 时，反型层电荷面密度 Q_{inv} 表达式将相比 MOS 电容结构多了耗尽区单位面积电容 C_{dep} 在电压 V_{sb} 作用下的电荷积累，且 V_{sb} 为正时对反型层电荷贡献为正。写出此时 Q_{inv} 表达式和等效阈值电压表达式 V_{t} ，用 C_{ox} ， C_{dep} ， V_{gs} ， V_{th} 表示。

(2.2) MOSFET 相比于 MOS 的不同之处还有漏极电压 V_{d} 的存在。一般来讲，当反型层沟道形成后，在沟道左端 $x = 0$ 处，电势为 V_{s} ，沿着沟道 x 方向，电势 $V_{\text{c}}(x)$ 不断增加，且随着 $V_{\text{c}}(x)$ 增加，氧化层电容的压降减小，这相当于在改变了位置 x 处等效的 V_{s} ，因此，反型层电子减少。写出修正后的 $Q_{\text{inv}}(x)$ 表达式。令 $m = 1 + \frac{C_{\text{dep}}}{C_{\text{ox}}}$ ， $V_{\text{cs}}(x) = V_{\text{c}}(x) - V_{\text{s}}$ ，最终结果用 C_{ox} ， V_{gs} ， $V_{\text{cs}}(x)$ ， V_{t} ， m 表示。

(2.3) 稳定时漏极到源极的电流 I_{ds} 不随 x 变化，且知迁移率（载流子漂移速率与电场之比）为 μ_{ns} ，沟道长为 L ，宽为 W （如图 4.1 所示），写出 $I_{\text{ds}}(V_{\text{ds}})$ 的表达式。本小问中，(2.2) 问题干末尾的给定字母也可直接使用。

参考解答：

(1.1) 依题意：施加的正电压为

$$V_{\text{g}} - V_{\text{fb}} = V_{\text{ox}} + \varphi_{\text{s}} \quad (1)$$

衬底电荷面密度为

$$Q_{\text{sub}} = Q_{\text{dep}} = -nqW_{\text{dep}} \quad (2)$$

氧化层上的压降为

$$V_{\text{ox}} = -\frac{Q_{\text{dep}}}{C_{\text{ox}}} \quad (3)$$

由耗尽区宽度公式得

$$\varphi_{\text{s}} = \frac{qnW_{\text{dep}}^2}{2\varepsilon_{\text{s}}} \quad (4)$$

进而可以得到

$$V_{\text{g}} = V_{\text{fb}} + V_{\text{ox}} + \varphi_{\text{s}} = V_{\text{fb}} + \frac{qnW_{\text{dep}}}{C_{\text{ox}}} + \frac{qnW_{\text{dep}}^2}{2\varepsilon_{\text{s}}} \quad (5)$$

(1.2) 由 (5) 式和 $\varphi_{\text{s}} = 2\varphi_{\text{B}}$ 得对于 P 型衬底

$$V_{\text{th}} = V_{\text{fb}} + \frac{\sqrt{2qn\varepsilon_{\text{s}}\varphi_{\text{s}}}}{C_{\text{ox}}} + \varphi_{\text{s}} \quad (6)$$

N 型衬底载流子与 P 型相反，故阈值电压为

$$V_{\text{th}} = V_{\text{fb}} - \frac{\sqrt{2qn\varepsilon_{\text{s}}\varphi_{\text{s}}}}{C_{\text{ox}}} - \varphi_{\text{s}} \quad (7)$$

(2) (2.1) 当 $V_{\text{b}} = V_{\text{s}}$ 时，反型层电荷面密度为

$$Q_{\text{inv}} = -C_{\text{ox}}(V_{\text{gs}} - V_{\text{th}}) \quad (8)$$

当 $V_{\text{b}} \neq V_{\text{s}}$ 时， V_{sb} 在反型层中感应出电荷 $C_{\text{dep}}V_{\text{sb}}$ ，因此反型层电荷变为

$$Q_{\text{inv}} = -C_{\text{ox}}(V_{\text{gs}} - V_{\text{th}}) + C_{\text{dep}}V_{\text{sb}} = -C_{\text{ox}}\left[V_{\text{gs}} - \left(V_{\text{th}} + \frac{C_{\text{dep}}}{C_{\text{ox}}}V_{\text{sb}}\right)\right] \quad (9)$$

通过上式发现阈值电压等效的变大了，故令等效后的阈值电压为

$$V_{\text{t}} = V_{\text{th}} + \frac{C_{\text{dep}}}{C_{\text{ox}}}V_{\text{sb}} \quad (10)$$

(2.2) 利用等效思想

$$Q_{\text{inv}} = -C_{\text{ox}} \left[(V_{\text{gs}} - V_{\text{cs}}(x)) - \left(V_{\text{th}} + \frac{C_{\text{dep}}}{C_{\text{ox}}} (V_{\text{sb}} + V_{\text{cs}}(x)) \right) \right] \quad (11)$$

化简得

$$Q_{\text{inv}} = -C_{\text{ox}} (V_{\text{gs}} - mV_{\text{cs}}(x) - V_{\text{t}}) \quad (12)$$

(2.3) 电流

$$I_{\text{ds}} = W \cdot Q_{\text{inv}}(x) \cdot v \quad (13)$$

速度

$$v = \mu_{\text{ns}} E \quad (14)$$

电场

$$E = -\frac{dV_{\text{cs}}}{dx} \quad (15)$$

联立得

$$\int_0^L I_{\text{ds}} dx = \int_0^{V_{\text{ds}}} W C_{\text{ox}} (V_{\text{gs}} - mV_{\text{cs}}(x) - V_{\text{t}}) \mu_{\text{ns}} dV_{\text{cs}} \quad (16)$$

电流处处相等，故：

$$I_{\text{ds}} = \frac{W}{L} C_{\text{ox}} \mu_{\text{ns}} (V_{\text{gs}} - 0.5mV_{\text{ds}} - V_{\text{t}}) V_{\text{ds}} \quad (17)$$

当源漏电势差为饱和漏极电压时

$$V_{\text{dsat}} = \frac{V_{\text{gs}} - V_{\text{t}}}{m} \quad (18)$$

可以得到饱和电流

$$I_{\text{dsat}} = \frac{W}{2mL} C_{\text{ox}} \mu_{\text{ns}} (V_{\text{gs}} - V_{\text{t}})^2 \quad (19)$$

当 $V_{\text{ds}} > V_{\text{dsat}}$ 时，知在 $x = L$ 处， $Q_{\text{inv}} = 0$ ，即没有反型层电荷，也就是说沟道区发生了夹断， V_{ds} 继续增大，夹断点左移，电流保持不变。

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 13 分：

第 (1.1) 小问 8 分：(1) (2) (3) (5) 式各 2 分；

第 (1.2) 小问 3 分：(6) 式 2 分，(7) 式 3 分；

第 (2) 问 27 分：

第 (2.1) 小问 7 分：(8) 式 3 分，(9) (10) 式各 2 分；

第 (2.2) 小问 7 分：(11) 式 5 分，(12) 式 2 分；

第 (2.3) 小问 13 分：(13) (14) (15) (18) (19) 式各 2 分，(17) 式 3 分；

五、(40 分)

在集成电路的光刻工艺中，电路的设计图绘制在掩模板上，通过将电路图样投影曝光在硅片表面覆盖的光刻胶上来完成刻蚀。由于电路的蚀刻需要分多层进行，层与层之间的位置偏差必须控制在一定范围内，才能保证刻出的电路结构正确，这就要求在每一次曝光时，投影用的底片与硅片在光路中的相对位置是固定的。当下的主流对准技术常基于相位光栅位置测量原理 (PGA)。下面我们从简化的模型出发，探究基于 PGA 的一种对准技术的原理。

本题所有小问的相位约定均为 $\sim e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ ，其中 \vec{k} 为波矢、 ω 为角频率。

(1) 在研究该对准技术之前，我们先初步认识一下相位光栅的一些特性。

(1.1) 此小问中，我们将研究一个普通的透射式相位光栅的夫琅禾费衍射。如图 5.1 所示，

它的构成与我们熟悉的振幅光栅相似，仅仅是把原先不透光的部分改为相位缝，其作用是使通过相位缝的光的相位延迟 φ （相比从空气中通过而言），而不影响振幅大小。假设每个相位缝和普通透光缝宽度均为 p ，各自的有效缝数均为 N 。现有一束均匀的相干平行光垂直光栅平面入射，光的波长为 λ ，在缝的排布方向上单位长度的振幅大小为 a_0 。试计算衍射光的复振幅和光强关于出射光与光栅法线夹角 θ 的分布 $I(\theta)$ ，认为光强为复振幅模长的平方，其中 θ 的正方向选取如图。为便于书写和计算，建议在阶段性结果和最终结果中引入参量 $\alpha = \frac{\pi p \sin \theta}{\lambda}$ 。

(1.2) 根据上一问得出的光强分布，由光栅的周期为 $d = 2p$ ，请写出 n 级主极大的角位置 θ_n 所满足的方程（使用参量 d, n, λ 表示），判断 $\pm n$ 级主极大光强是否相等，并给出能使得零级主极大缺级的 φ 应满足的条件。

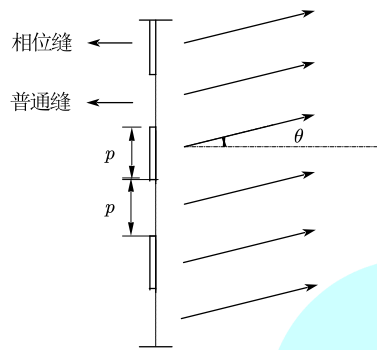


图5.1 相位光栅衍射

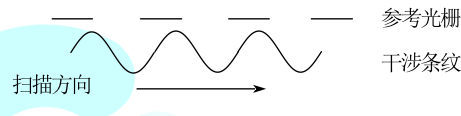


图5.2 扫描过程示意

(2) 由上一问计算结果可知，相位光栅和振幅光栅的光强分布具有很大的相似性。在实际对准中，用作对准标记的相位光栅往往是直接刻在晶圆（wafer）上的反射式光栅，通过沟槽的深度引入相位差，忽略沟槽遮挡，则其衍射效果可以与（1）问中研究的透射式相位光栅等效。下面我们正式开始研究对准原理。如图5.3所示，图中主体为一个 $4f$ 成像系统：两个焦距均为 f 的凸透镜共轴放置，二者间距为 $2f$ ，而物面（左边的 wafer）和像面（右边的 reference grating）和与它同侧的透镜间距也都为 f 。整个系统的工作原理与阿贝成像原理的装置类似：一束均匀平行光垂直于晶圆表面入射，在作为对准标记的相位光栅上发生衍射（该光栅的相应几何参量与（1）问保持一致）。在沿着主极大方向出射的衍射光中，仅有 ± 1 级衍射光通过透镜，在后焦面各形成一个光斑，每个光斑出射的光经右方透镜后成为平行光束，在参考光栅表面发生双光束干涉，形成干涉条纹。条纹的光透过掩模板上的振幅光栅（参考光栅）后由检测器接收，通过检测光强信息获取对准标记的位置信息。

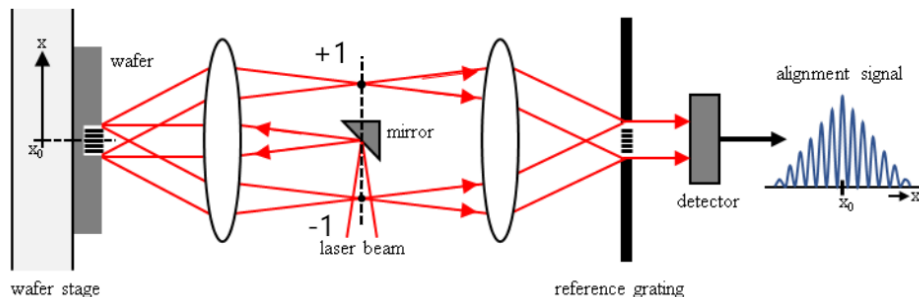


图5.3 对准系统示意图

图片来源：邱俊，杨光华，李璟，卢增雄，丁敏侠. 光刻对准关键技术的发展与挑战 [J/OL]. 光学学报

(2.1) 由波动光学原理，将 ± 1 级衍射光汇聚形成的两个光斑视作两个新的子波源，它们具有各自的复振幅。仅考虑相位光栅位置的一维变化，以图中方向为正方向，光栅中心位置为

x_w ，位置零点取为光轴与光栅平面的交点。试计算两个子波源的初相位之差 ϕ_1 。最终结果用 x_w 和光栅周期 d 表示。以下几问中均要求使用 d 表示光栅的几何参数，而不再使用 p 。

(2.2) 承 (2.1) 问条件，两个子波源发出的球面波经右方透镜折射后形成两束等强度的均匀平行光，在焦平面上形成干涉条纹，在该平面沿条纹排布方向上同样设立一个坐标轴，原点也取为光轴与平面的交点。试计算干涉条纹的周期 d' (用 d 表示)，以及该条纹在 $x = x_m$ 处的光强 $I(x_m)$ 。这里我们只考虑光强关于位置的分布状况，前面的常系数可以自行选取。

(2.3) 右方透镜后焦面上的参考光栅的周期取为干涉条纹周期 d' ，且其透光缝与遮光缝的宽度均为 $d'/2$ (本题结果中不得含有 d')，而相位光栅的宽度和参考光栅的总宽度均为 L 。在对准过程中，会让硅片沿着 x 正方向，从负半轴上的某处开始移动，且保证对准标记始终能被激光覆盖，该过程中干涉条纹也会扫描参考光栅 (图 5.2)，在扫描过程中透过光强随位置移动快速震荡变化。整个对准过程的目标是使整组干涉条纹相对于参考光栅处于一个固定的位置，通常将其选为检测器收到的对准光信号最强的位置。假设检测器检测的信号强度正比于通过参考光栅的总光能 (不再是光强)。试计算信号强度 S 随参考光栅位置 x_w 的变化关系，常系数依然自选。在计算时不妨假设参考光栅表面 $x_m = 0$ 对应的位置恰好为它的一条透光缝的中心，干涉条纹的分布宽度也为 L ，且近似认为有光通过的缝数正比于干涉条纹与参考光栅重叠区域的宽度。

参考解答：

(1)

(1.1) 先单独考虑普通缝部分，单个缝复振幅：

$$\tilde{U}_0 = \int_0^p a_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta} dx = \frac{a_0}{i\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta} \left(e^{i\frac{2\pi}{\lambda} p \sin \theta} - 1 \right) = \frac{a_0 p}{2i\alpha} (e^{2i\alpha} - 1) \quad (1)$$

再考虑每个缝所处位置的影响，第 n 个缝

$$\tilde{U}_n = \tilde{U}_0 e^{i\frac{2\pi}{\lambda} (n-1) \cdot 2p \sin \theta} = \tilde{U}_0 e^{4i\alpha(n-1)} \quad (2)$$

求和后

$$\tilde{A}_{\text{amp}} = \sum_{n=1}^N \tilde{U}_n = \tilde{U}_0 \frac{1 - e^{4Ni\alpha}}{1 - e^{4i\alpha}} = \frac{a_0 p}{2i\alpha} (e^{2i\alpha} - 1) \frac{1 - e^{4Ni\alpha}}{1 - e^{4i\alpha}} \quad (3)$$

相位缝部分和普通缝相比，只是附加一个相位延迟并平移了距离 p ，故有

$$\tilde{A}_{\text{phase}} = \tilde{A}_{\text{amp}} e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda} p \sin \theta - \varphi\right)} = \tilde{A}_{\text{amp}} e^{i(2\alpha - \varphi)} \quad (4)$$

复振幅叠加后有

$$\tilde{A}_{\text{total}} = \tilde{A}_{\text{amp}} + \tilde{A}_{\text{phase}} = \frac{a_0 p}{2i\alpha} (e^{2i\alpha} - 1) \frac{1 - e^{4Ni\alpha}}{1 - e^{4i\alpha}} [1 + e^{i(2\alpha - \varphi)}] \quad (5)$$

求复振幅的模长平方

$$I(\theta) = \tilde{A}_{\text{total}} \tilde{A}_{\text{total}}^* = \frac{a_0^2 p^2}{\alpha^2} (1 - \cos 2\alpha) \frac{1 - \cos 4N\alpha}{1 - \cos 4\alpha} [1 + \cos(2\alpha - \varphi)]$$

化为用正弦表示则有

$$I(\theta) = 2a_0^2 p^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \frac{\sin^2(2N\alpha)}{\sin^2(2\alpha)} [1 + \cos(2\alpha - \varphi)] \quad (6)$$

其中

$$\alpha(\theta) = \frac{\pi p \sin \theta}{\lambda}$$

已经由题目给出。

可以看出, 这个光强分布和普通光栅相比, 只是多乘上了一个因子, 它反映了相位缝所引入的相位差对光强分布的调制。

(1.2) 在 (6) 式中多缝因子为 $\frac{\sin^2(2N\alpha)}{\sin^2(2\alpha)}$, 则第 n 级主极大条件为

$$2\alpha = n\pi \quad (7)$$

再由 α 的定义及 $d = 2p$ 的关系, 可将其化为

$$d \sin \theta_n = n\lambda \quad (8)$$

正是我们熟悉的光栅方程, 由 (7) 式可知 $\pm n$ 级主极大光强相等。

常规振幅光栅中由于单缝因子的存在, 一些非零级主极大会有缺级现象。类似地, 此处光强分布中末尾多出的因子是有可能导致零级缺级的, 由于 $\alpha(0) = 0$, 得缺级条件为

$$1 + \cos \varphi = 0 \quad (9)$$

即

$$\varphi = (2k - 1)\pi \quad (9')$$

其中 k 为正整数。这个结论十分容易直观理解, 即在此条件下, 零级方向上相邻的普通缝与相位缝恰好干涉相消。这样, 光能被更多地分配到其他级次, 提高了光能的利用率。

(2)

(2.1) ± 1 级衍射光的方向 θ_1 满足:

$$d \sin \theta_1 = \lambda \quad (10)$$

+1 级衍射光超前 -1 级衍射光的相位为

$$\Phi_1 = 2 \times \frac{2\pi}{\lambda} x_w \sin \theta_1 \quad (11)$$

将 (10) 中结果代入有

$$\Phi_1 = \frac{4\pi x_w}{d} \quad (12)$$

(正或负均可)

(2.2) 条纹周期 d' 满足

$$2d' \sin \theta_1 = \lambda \quad (13)$$

结合 (10) 式中 θ_1 满足的条件有

$$d' = \frac{d}{2} \quad (14)$$

由矢量三角形法易知, 两等大且相位差为 δ 的复振幅叠加后的光强为

$$I = A^2 + A^2 + 2A \cdot A \cos \delta = 2A^2(1 + \cos \delta) \quad (15)$$

可见

$$I \propto 1 + \cos \delta \quad (15')$$

由 x_m 造成的相位差与 x_w 的完全类似

$$\Phi_2 = \frac{4\pi x_m}{d} \quad (16)$$

由 $\delta = \Phi_1 + \Phi_2$, 根据 (15) 式有

$$I(x_m) = I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi x_w}{d} + \frac{4\pi x_m}{d} \right) \right) \quad (17)$$

前面的 I_0 可以写成任意常数。

(2.3) 参考光栅透光缝宽度为 $\frac{d'}{2} = \frac{d}{4}$, 则通过它的一条缝的光能 S_0 满足

$$S_0 \propto \int_{-\frac{d}{8}}^{\frac{d}{8}} I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi x_w}{d} + \frac{4\pi x_m}{d} \right) \right) dx_m$$

$$= I_0 \left[\frac{d}{4} + \frac{d}{4\pi} \sin \left(\frac{4\pi x_w}{d} + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{d}{4\pi} \sin \left(\frac{4\pi x_w}{d} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \propto \left(1 + \frac{2}{\pi} \cos \frac{4\pi x_w}{d} \right) \quad (18)$$

前面的常系数依然可以任选。

下面考虑条纹与光栅重叠部分的缝数:

通过分析 $4f$ 系统在几何光学上的成像特点, 可以得知条纹的整体位置变化情况。条纹向光栅靠近时, 当 $x_w = -L$ 时条纹开始与参考光栅有重叠部分, 直至 $x_w = 0$ 时完全重合, 则有光透过的缝的数目满足

$$n \propto \frac{x_w + L}{L} \propto x_w + L \quad (19)$$

类似的, 在继续上移的过程中, 有

$$n \propto \frac{L - x_w}{L} \propto L - x_w \quad (20)$$

则对准信号强度 S 可写成如下分段函数

$$S \propto \begin{cases} (x_w + L) \left(1 + \frac{2}{\pi} \cos \frac{4\pi x_w}{d} \right), & -L \leq x_w \leq 0 \\ (L - x_w) \left(1 + \frac{2}{\pi} \cos \frac{4\pi x_w}{d} \right), & 0 \leq x_w \leq L \end{cases} \quad (21)$$

或统一表达为:

$$S \propto (L - |x_w|) \left(1 + \frac{2}{\pi} \cos \frac{4\pi x_w}{d} \right), \quad -L \leq x_w \leq L \quad (21')$$

前面的系数请根据个人喜好酌情添加, 但系数应当保持一致。

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 17 分:

第 (1.1) 问 12 分: (1) (2) 式各 2 分, (3) 式 3 分, (4) 式 2 分, (5) 式 1 分, (6) 式 2 分;

第 (1.2) 问 5 分: (7) 式 2 分, (8) 式 1 分, (9) 或 (9') 式 2 分;

第 (2) 问 23 分:

第 (2.1) 问 5 分: (10) 式 1 分, (11) (12) 式各 2 分;

第 (2.2) 问 10 分: (13) (14) 式各 2 分, (15) 或 (15') 式 3 分, (16) 式 1 分, (17) 式 2 分;

第 (2.3) 问 8 分: (18) 式 3 分, (19) (20) 二者写出 1 个得 2 分, 写出 2 个得 3 分, (21) 或 (21') 式 2 分。

六、(50 分) 熵的应用与相变

熵实际上是热力学中相当重要的一个概念, 我们在科普中经常会遇见一些有趣的说法, 比如万物归于熵增。本题目将利用已有知识去讨论一系列熵分析的应用。

(1) (1.1) 利用热力学第一和第二定律给出理想气体的熵的表达式, 用定容摩尔热容 c_v , 摩尔数 n , 温度 T , 体积 V 表示, 答案可以包含一个常数。

(1.2) 利用 (1.1) 中的结论, 考虑一个封闭系统, 其包含两个子系统, 分别包含着两种不同的理想气体 A 和 B, 并且初始时具有相同的温度和体积, 并用隔板隔开, 如图 6.1 所示。

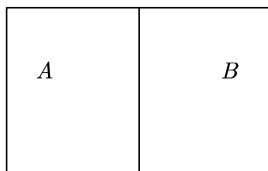


图6.1 用隔板分隔的两个理想气体子系统

现将此隔板撤去，使得两种气体快速混合，试求出整个系统的熵增。已知两种气体的粒子数均为 N_0 。以此为基础，试着给出当存在 i 个子系统，且每一个子系统都由理想气体（粒子数为 N_i ，体积为 V_i ）组成时，将全部气体混合后整个系统的熵变 ΔS_{mix} 。已知整个系统的总体积为 V ，总粒子数为 N ，初始温度相同。（定义 $x_i = N_i/N$ ，将最后的表达式用 x_i 、 N 和 k_B 给出。）

（1.3）已知范德瓦尔斯气体的状态方程为

$$p = \frac{k_B T \rho}{1 - b\rho} - a\rho^2 \quad (6.1)$$

其中 a 、 b 是正常数， $\rho = N/V$ 是气体的数密度。现在在绝热条件下将范德瓦尔斯气体体积从 V_1 增大至 V_2 （ $V_2 > V_1$ ），求出单粒子的内能变化 Δu 。已知单粒子热容为常数 c_V 。

提示：绝热过程是等熵过程。尝试利用前面得出的结论，比较范德瓦尔斯气体和理想气体得出结果。答案可以带有一个常数。

（2）我们都知道，系统总是自发趋向于熵最大的稳定情况。因此，相变的本质实际上是系统为了获得更大的熵而突变成两个状态。著名的 Clausius-Clapeyron 方程

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta s}{\Delta v} = \frac{l}{T\Delta V} \quad (6.2)$$

就可以由最大熵原理导出，式中 $p(T)$ 为温度为 T 时的两相平衡压强， l 为摩尔相变潜热， ΔV 为两相摩尔体积之差。

基于此，我们考虑如下的相变问题：考虑一个体积不变的封闭系统，初始时包含着等摩尔数的同一物质的液相和气相，已知初始时的蒸汽的压强和温度分别为 p_1 和 T_1 。然后，在保持系统总体积不变的条件下，将系统加热至 T_2 。假设在这个过程中蒸汽满足理想气体条件，已知液相的单位粒子体积为 v_l ，气体和液体的定压摩尔热容分别为 C_p^g 和 C_p^l ，液体的摩尔相变潜热为 Δh ， Δh 与温度和压强无关。试求出温度为 T_2 时液相的摩尔数占总摩尔数的比值 f_l 。

提示：你可能会用到以下公式：

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \quad (6.3)$$

解：（1）

（1.1）由热力学第一定律可以给出

$$dU = dQ + dW \quad (1)$$

又由热力学第二定律（对于理想可逆过程）和功的关系有

$$\begin{cases} \frac{dQ}{T} = dS \\ dW = -pdV \end{cases} \quad (2)$$

将（2）代入（1）得出

$$dU = TdS - pdV$$

整理有

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV \quad (3)$$

对于理想气体有

$$dU = nc_v dT$$

由理想气体状态方程得出

$$pV = nRT$$

代入有

$$ds = \frac{n}{T} C_v dT + \frac{nR}{V} dV \quad (4)$$

积分有

$$S(T, V) = nC_v \ln T + nR \ln V + S_0 \quad (5)$$

(1.2) 由 (1.1) 的讨论, 对于 A、B 两种气体都有

$$S(T, V) = nC_v \ln T + nR \ln V + S_0$$

于是有

$$\Delta S_A = \Delta S_B = N_0 k_B \ln \left(\frac{v_{\text{末}}}{v_{\text{初}}} \right) = N_0 k_B \ln 2 \quad (6)$$

因此

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = 2N_0 k_B \ln 2 \quad (7)$$

对于 i 个系统, 若仅分析熵变化的部分, 我们有

$$S_{\text{初}} = S_0 + k_B \sum_i N_i \ln V_i = S_0 + k_B N \sum_i x_i \ln x_i + k_B N \ln V$$

其中, S_0 代表和 V 无关的一部分熵。同理

$$S_{\text{末}} = S_0 + k_B \sum_i N_i \ln V = S_0 + k_B N \ln V$$

因此

$$\Delta S_{\text{mix}} = -k_B N \sum_i x_i \ln x_i \quad (8)$$

(1.3)

【解法一】

利用先前结论去处理。对于单个粒子有 $N = 1$, 于是 $\rho = 1/V$, 代入后有

$$p = \frac{k_B T}{V \left(1 - \frac{b}{V} \right)} - \frac{a}{V^2} = \frac{k_B T}{V - b} - \frac{a}{V^2} \quad (9)$$

由热力学第一定律有

$$du = T dS - p dV$$

由于是绝热过程, 所以 $dS = 0$, 因此 $du = -p dV$ 。又由微分关系

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)_s dV + \left(\frac{\partial u}{\partial S} \right)_v dS$$

对比后有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial V} \right)_s = -p \quad (10)$$

由提示的 Maxwell 关系可以得出

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{k_B}{V - b} \quad (11)$$

积分有

$$S = \int \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV + \varphi(T) = k_B \ln(V - b) + \varphi(T) \quad (12)$$

$\varphi(T)$ 是一个关于 T 的不定函数，是由偏微分积分给出的。当 $V \rightarrow \infty$ 时，气体间的作用可以被忽略，范德瓦尔斯气体即退化为了理想气体，此时 (12) 式变化为 ($V - b \Rightarrow V$)

$$S = k_B \ln(V) + \varphi(T)$$

由先前的讨论我们得出了理想气体单个粒子的熵的表达式

$$S(T, V) = c_v \int \frac{dT}{T} + k_B \ln V + S_0$$

对比有

$$\varphi(T) = c_v \int \frac{dT}{T} + S_0$$

代入有

$$\Delta S = S - S_0 = k_B \ln(V - b) + c_v \int \frac{dT}{T} \quad (13)$$

因为等熵过程有 $\Delta S = 0$ ，则有

$$k_B \ln(V - b) + c_v \int \frac{dT}{T} = 0$$

整理后有

$$T(V - b)^{\frac{k_B}{c_v}} = C \quad (14)$$

其中 C 是一个常数，上述方程即为范德瓦尔斯气体的绝热方程。于是

$$\Delta u = \int -p dV = - \int \left(\frac{k_B T}{V - b} - \frac{a}{V^2} \right) dV = - \int \left(\frac{k_B C}{(V - b)^{\frac{c_v + k_B}{c_v}}} - \frac{a}{V^2} \right) dV \quad (15)$$

代入初末条件给出

$$\Delta u = C c_v \left[(V_2 - b)^{-\frac{k_B}{c_v}} - (V_1 - b)^{-\frac{k_B}{c_v}} \right] + \frac{a}{V_1} - \frac{a}{V_2} \quad (16)$$

【解法二】

本解法主要区别在于直接从偏微分关系出发。我们可以将 (9) 式写作 $F(p, V, T) = 0$ 。再将 p 视为 V, T, S 的函数，于是可以进一步改写为 $F^*(S, V, T) = 0$ 。

利用偏微分关系

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = -1 \quad (10')$$

由热容的定义式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{c_v}{T} \quad (11')$$

和题给的 Maxwell 关系

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{k_B}{V - b} \quad (12')$$

将上述两个表达式代入 (10') 式即得

$$\frac{dT}{T} = - \frac{k_B}{c_v} \frac{dV}{V - b} \quad (13')$$

积分得到

$$T(V - b)^{\frac{k_B}{c_v}} = C \quad (14')$$

这与解法一的 (14) 式相同。剩下部分同解法一 (15) (16) 式，不再赘述。

(2) 由 Clausius-Clapeyron 方程

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta h}{T\Delta V}$$

$\Delta V = V_{gas} - V_l$ ，而 $V_{gas} \gg V_l$ ，则有 $\Delta V \approx V_{gas}$ ：

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta h}{T\Delta V} \approx \frac{\Delta h}{TV_{gas}} = \frac{\Delta h}{RT^2}p \quad (17)$$

再整理有

$$\frac{dp}{p} = \frac{\Delta h}{RT^2}dT$$

积分有

$$\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -\frac{\Delta h}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

于是有

$$p_2 = p_1 e^{-\frac{\Delta h}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)} \quad (18)$$

由等体积条件可以给出

$$V_1^l + V_1^g = V_2^l + V_2^g \quad (19)$$

利用单位粒子体积 v 来表达，可以写成

$$v_l N_1^l + v_{1g} N_1^g = v_l N_2^l + v_{2g} N_2^g \quad (20)$$

并利用理想气体状态方程

$$v_g = \frac{k_B T}{p}$$

代入，即得

$$v_l N_1^l + \frac{k_B T_1}{p_1} N_1^g = v_l N_2^l + \frac{k_B T_2}{p_2} N_2^g \quad (21)$$

定义总粒子数 $N = N_1 + N_2$ ，将等式两边同除以 N ：

$$v_l f_1^l + \frac{k_B T_1}{p_1} (1 - f_1^l) = v_l f_2^l + \frac{k_B T_2}{p_2} (1 - f_2^l) \quad (22)$$

由题目条件有 $f_1^l = \frac{1}{2}$ ，代入得出

$$f_2^l = \frac{\frac{v_l}{2} + \frac{k_B T_1}{2p_1} - \frac{k_B T_2}{p_2}}{v_l - \frac{k_B T_2}{p_2}} \quad (23)$$

将 (18) 式代入即得最终的表达式

$$f_2^l = \frac{\frac{v_l}{2} + \frac{k_B T_1}{2p_1} - \frac{k_B T_2}{p_1 e^{-\frac{\Delta h}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}}}{v_l - \frac{k_B T_2}{p_1 e^{-\frac{\Delta h}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}}} = \frac{(p_1 v_l + k_B T_1) e^{-\frac{\Delta h}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)} - 2k_B T_2}{2p_1 v_l e^{-\frac{\Delta h}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)} - 2k_B T_2} \quad (24)$$

【注】 (19) -- (24) 式中，如把 v_l 取为 0，也即认为液相体积总是可以忽略，同样可以视作正确。此时的最终结果为

$$f_2^l = \frac{T_2 - T_1 e^{-\frac{\Delta h}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}}{2T_2} \quad (24')$$

前面的式子也可以相应给分。

评分标准：本题满分 50 分。

第 (1) 问 30 分：

第 (1.1) 小问 5 分：(1) (2) (3) (4) (5) 式各 1 分；

第 (1.2) 小问 10 分：(6) 式 2 分，(7) 式 1 分，(8) 式 7 分；

第 (1.3) 小问 15 分：(9) (15) (16) 式各 2 分；

【解法一】(10) 式 3 分，(11) (12) 式各 1 分，(13) (14) 式各 2 分；

【解法二】(10') (12') 式各 2 分，(11') 式 1 分，(13') 式 2 分，(14') 式 2 分；

第 (2) 问 20 分：(17) (18) 式各 3 分，(19) (20) (21) (23) (24) 式各 2 分，(22) 式 4 分。

七、(60分)

人类对太空的向往由来已久，古希腊人已经可以精确地测定星图。根据托勒密《至大论》的记载，阿波罗尼乌斯最早发明了“本轮—均轮”模型，后来托勒密将其改进为 Equant（偏心匀速圆）模型。通过对小本轮的尺寸和速度的适当选择，几乎所有微小的不规则性都可以被解决，以至于到了哥白尼时代，即使原有的“地心说”模型被修改为“日心说”模型，托勒密的本轮—均轮理论仍然得以保留，直至开普勒提出著名的行星三大定律才被彻底抛弃。

本题将研究有心力场 $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ 中天体的运动。由于有心力场中任意运动物体的角动量守恒，我们总可以选取一个二维平面，使得物体的运动轨迹在该平面上。如图 7.1 所示，二维平面 Oxy 上任意一点 (x, y) 可以等效地用复数 $z = x + iy = re^{i\theta}$ 来描述，其中 $i^2 = -1$ 代表虚数单位， r 、 θ 分别为该点到原点 O 的连线距离和与 x 轴正方向的夹角。对于本题的情形， O 点即为力心。

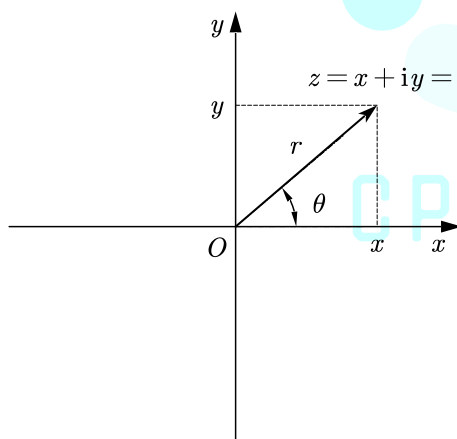


图 7.1 二维平面上物体位置的复数表示

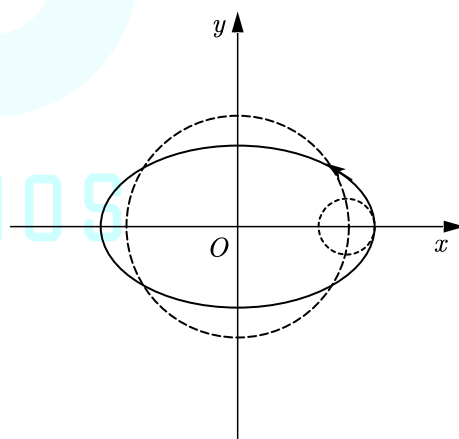


图 7.2 轨道用“本轮”和“均轮”合成得到

(1) 当 $f(r) = -kr$ (k 为大于 0 的已知常数) 时，质量为 m 的粒子轨道方程为 $z = z_1$ 。

(1.1) 试求 $z_1(t)$ ，用粒子的角动量大小 L 、能量 E 和已知参量表示。为了确定待定常数，本问约定 $t = 0$ 时粒子到原点距离最远，且粒子位置在 x 轴正半轴上。

(1.2) 已知 (1.1) 中的轨道 $z_1(t)$ 可以用一个“本轮” (epicycle) 和一个“均轮” (deferent) 运动合成得到，如图 7.2 所示。粒子在半径为 r_2 的本轮上以角速度 Ω_2 运动，本轮的中心又绕着力心 O 沿着半径为 r_1 的均轮以角速度 Ω_1 运动，角速度以逆时针为正。试求 r_1 、 r_2 、 Ω_1 、 Ω_2 ，用 L 、 E 和已知参量表示。

(2) 当 $f(r) = -\frac{k}{r^2}$ (k 为大于 0 的已知常数) 时，质量为 m 的粒子轨道方程为 $z = z_2(\theta)$ ，其中

$$z_2(\theta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta} e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (7.1)$$

(2.1) 直接写出粒子能量 E 和角动量 L 的表达式, 用 p 、 ε 和已知参量表达。

(2.2) 当 $0 < \varepsilon \ll 1$ 时, 试求为了模拟轨道运动所需的本轮和均轮的半径和角速度 r_i 、 Ω_i , 保留到 ε 的一阶项。

(3) 将(1)中的轨道 $z = z_1(t)$ 作变换 $z \rightarrow z^2$ 。不考虑量纲问题, 已知变换后的轨道形状与 $f(r) \propto r^c$ 的有心力场中轨道形状完全相似, 试求 c 的值。

(4) 事实上, (3)中的对应关系具有普遍性, 这种对应关系也被称为“对偶力法则”。已知变换 $z \rightarrow z^m$ 将质点在 $f(r) = k_1 r^A$ (k_1 、 A 均为常数) 有心力场中的轨道映射到一新轨道, 新轨道和质点在 $\tilde{f}(r) = k_2 r^B$ (k_2 、 B 均为常数) 中运动的轨道形状完全相似。试求 m 和对应的 B 值, 并指出存在该变换的条件。

解: (1)

(1.1) 粒子的运动方程为

$$\vec{F} = -k\vec{r} = m\vec{\ddot{r}} \quad (1)$$

分量形式为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx \\ m\ddot{y} = -ky \end{cases} \quad (2)$$

这代表粒子在 x 、 y 两个方向上均作简谐运动, 角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

由于 $t = 0$ 时粒子到原点距离最远, 且粒子位置在 x 轴正半轴上, 故方程的解为

$$\begin{cases} x = A \cos \omega t \\ y = B \sin \omega t \end{cases} \quad (4)$$

其中 A 、 B 为待定常量, $A \geq B$ 。粒子的角动量和能量分别可以写为

$$L = mrv_\theta = mAB\omega \quad (5)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 + \frac{1}{2}mB^2\omega^2 = \frac{1}{2}k(A^2 + B^2) \quad (6)$$

解得

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2E}{k} + \frac{2L}{\sqrt{km}}} + \sqrt{\frac{2E}{k} - \frac{2L}{\sqrt{km}}} \right) \\ B = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2E}{k} + \frac{2L}{\sqrt{km}}} - \sqrt{\frac{2E}{k} - \frac{2L}{\sqrt{km}}} \right) \end{cases} \quad (7)$$

因此

$$z_1(t) = x + iy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2E}{k} + \frac{2L}{\sqrt{km}}} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2E}{k} - \frac{2L}{\sqrt{km}}} e^{-i\omega t} \quad (8)$$

(1.2) 式(8)中两项分别代表均轮和本轮(角标 1 代表均轮, 角标 2 代表本轮):

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2E}{k} + \frac{2L}{\sqrt{km}}} \\ r_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2E}{k} - \frac{2L}{\sqrt{km}}} \end{cases} \quad (9)$$

$$\Omega_1 = \omega, \quad \Omega_2 = -\omega \quad (10)$$

(2)

(2.1) 容易得到

$$\begin{cases} p = \frac{L^2}{mk} \\ \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = \sqrt{mkp} \\ E = -\frac{k}{2p}(1 - \varepsilon^2) \end{cases} \quad (11)$$

(2.2) 由角动量守恒

$$L = mr^2 \dot{\theta} \quad (12)$$

当 $\varepsilon \ll 1$ 时,

$$(1 - 2\varepsilon \cos \theta) \dot{\theta} \approx \frac{L}{mp^2} \quad (13)$$

积分得到

$$\theta(t) - 2\varepsilon \sin \theta(t) = \frac{L}{mp^2} t \quad (14)$$

令

$$\Omega = \frac{L}{mp^2} = \sqrt{\frac{k}{mp^3}} \quad (15)$$

零级解自然是 $\theta(t) = \Omega t$, 设准至一阶的解为 $\theta(t) = \Omega t + \varepsilon \alpha(t)$, 代入 (14) 式得到

$$\alpha(t) = 2 \sin(\Omega t) \quad (16)$$

因此

$$\begin{aligned} z_2(t) &= \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta(t)} e^{i\theta(t)} \approx p(1 - \varepsilon \cos(\Omega t)) \cdot e^{i\Omega t}(1 + 2i\varepsilon \sin(\Omega t)) \\ &\approx p e^{i\Omega t} - p\varepsilon \cos \Omega t e^{i\Omega t} + 2pi\varepsilon \sin \Omega t e^{i\Omega t} \end{aligned} \quad (17)$$

利用欧拉公式后可将上式改写为

$$z_2(t) = p e^{i\Omega t} + \frac{1}{2} p \varepsilon e^{i2\Omega t} - \frac{3}{2} p \varepsilon \quad (18)$$

因此, 均轮参数为

$$r_1 = p, \quad \Omega_1 = \Omega = \sqrt{\frac{k}{mp^3}} \quad (19)$$

本轮参数为

$$r_2 = \frac{1}{2} p \varepsilon, \quad \Omega_2 = 2\Omega = 2 \sqrt{\frac{k}{mp^3}} \quad (20)$$

(3) 记 (1) 中轨道为

$$z_1 = p e^{i\omega t} + q e^{-i\omega t} \quad (21)$$

则

$$z' = z_1^2 = p^2 e^{2i\omega t} + q^2 e^{-2i\omega t} + 2pq \quad (22)$$

这也代表一个椭圆，其长轴为 $A = p^2 + q^2$ ，短轴为 $B = p^2 - q^2$ ，中心偏离原点距离 $r = 2pq$ 。注意到焦距

$$C = \sqrt{A^2 - B^2} = 2pq = r \quad (23)$$

因此轨道 z' 事实上代表着焦点位于原点的椭圆，这正对应着平方反比引力势场中的轨道：

$$c = -2 \quad (24)$$

(4) 为了求出轨道方程，考虑粒子在径向上的受力

$$f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (25)$$

利用角动量守恒

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \quad (26)$$

并作变换 $u = 1/r$ ：

$$\dot{r} = \frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \quad (27)$$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} \dot{\theta} = -\frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (28)$$

代入 (25) 式得到

$$-L^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = m f\left(\frac{1}{u}\right) \quad (29)$$

分别将 $f_1(r) = k_1 r^A$ 和 $f_2(r) = k_2 r^B$ 力场下粒子的轨道记作 $u_1(\theta)$ 和 $u_2(\theta)$ ，则

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_1}{d\theta^2} + u_1 = -\alpha_1 u_1^{-A-2} \\ \frac{d^2 u_2}{d\theta^2} + u_2 = -\alpha_2 u_2^{-B-2} \end{cases} \quad (30)$$

其中记 $\alpha_i = \frac{mk_i}{L_i^2}$ ， α_i 是常量。作变换 $z \rightarrow z^m$ 后，

$$z' = z^m = u_1^{-m} e^{im\theta} \quad (31)$$

等价于 $u_3(\theta) = \left[u_1\left(\frac{\theta}{m}\right) \right]^m$ 的轨道。因此，

$$\frac{du_3(\theta)}{d\theta} = m \left[u_1\left(\frac{\theta}{m}\right) \right]^{m-1} \cdot \frac{d\left[u_1\left(\frac{\theta}{m}\right) \right]}{d\theta} = \left[u_1\left(\frac{\theta}{m}\right) \right]^{m-1} u_1' \left(\frac{\theta}{m} \right) \quad (32)$$

式中 $u_1'(\theta) \equiv du_1/d\theta$ 。同理可得

$$\frac{d^2 u_3(\theta)}{d\theta^2} = \frac{m-1}{m} \left[u_1\left(\frac{\theta}{m}\right) \right]^{m-2} \left[u_1' \left(\frac{\theta}{m} \right) \right]^2 + \frac{1}{m} \left[u_1\left(\frac{\theta}{m}\right) \right]^{m-1} u_1'' \left(\frac{\theta}{m} \right) \quad (33)$$

为了求出 $u_1'^2(\theta)$ 的表达式，将 (30) 式利用

$$\frac{d^2 u_1}{d\theta^2} = \frac{d}{du_1} \left(\frac{du_1}{d\theta} \right) \cdot \frac{du_1}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d}{du_1} \left(\frac{du_1}{d\theta} \right)^2 \quad (34)$$

进行积分得到

$$\left(\frac{du_1}{d\theta} \right)^2 = -u_1^2 + \frac{2\alpha_1}{A+1} u_1^{-A-1} + C \quad (35)$$

C 为积分常量，正比于粒子的能量 E 。将此式和 (30) 式代入 (33) 式即有

$$\frac{d^2 u_3(\theta)}{d\theta^2} + u_3(\theta) = \frac{\alpha_1}{m} u_3^{\frac{m-A-3}{m}} \left[\frac{2(m-1)}{A+1} - 1 \right] + C \frac{m-1}{m} u_3^{\frac{m-2}{m}} \quad (36)$$

对比 (36) 式和 (30) 式, 如果要求 $u_3(\theta)$ 和 $u_2(\theta)$ 对应的轨道完全相似, 则要求

$$\begin{cases} \frac{2(m-1)}{A+1} - 1 = 0 \\ -B - 2 = \frac{m-2}{m} \end{cases} \quad (37)$$

解得

$$m = \frac{A+3}{2} \quad (38)$$

$$B = -\frac{3A+5}{A+3} \quad (39)$$

式 (39) 还可以等价地表达为 $(A+3)(B+3) = 4$ 。容易看出,

$$A \neq -3 \quad (40)$$

否则变换不能存在。

评分标准: 本题满分 60 分。

第 (1) 问 14 分:

第 (1.1) 问 10 分: (2) (4) 式各 1 分, (5) (6) (7) (8) 式各 2 分;

第 (1.2) 问 4 分: (9) (10) 式各 2 分;

第 (2) 问 16 分:

第 (2.1) 问 3 分: (11) 式 3 分;

第 (2.2) 问 13 分: (14) 式 2 分, (16) 式 3 分, (18) 式 4 分, (19) (20) 式各 2 分;

第 (3) 问 5 分: (22) 式 2 分, (24) 式 3 分;

第 (4) 问 25 分: (27) (28) 式各 1 分, (29) 式 2 分, (32) (33) (35) 式各 3 分, (37) 式 4 分, (38) (39) 式各 3 分, (40) 式 2 分。

CPHOS

版权信息

命题人

张颖续 龚炳瑞 杨岱旭 熊秋豪 张艺腾 马浩然 余博文

审题人

张艺腾 张颖续 熊秋豪 马浩然 杨岱旭 余博文 龚炳瑞 吴恒旭

联系方式



微信公众号
CPHOS



官方网站
www.cphos.cn



CPHOS 论坛

邮箱

service@cphos.cn

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考