第 20 届 CPHOS 物理竞赛联考

理论试题参考答案及评分标准

本试题于 2024 年 4 月 26 日 09: 00 发布，最后更新于 2024 年 4 月 29 日 22: 23 。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

答题卡上传	阅卷
2024/4/26 16:00 - 2024/4/29 10:00	2024/4/30 12:00 - 2024/5/4 18:00

非正式成绩	成绩申诉	正式成绩
2024/5/4 20:00	2024/5/4 20:00 - 2024/5/5 18:00	2024/5/5 22:00

一、（40 分）旋转丝带

我们有时能在店铺前看到一些旋转的丝带，它的上端系在一个匀速旋转的物体上，整条丝带形成一种类似于等角螺旋线的形状并稳定旋转。本题将建立简单模型分析这一现象。

如图1.1所示，一条长为l的轻质丝带上端系在一个匀速旋转的物体上，悬挂点在水平面内做半径为$b(b \ll l)$、角速度为Ω竖直向上的匀速圆周运动，下端系着一个质量为m的小球。丝带可视为不可伸长轻软细绳，小球可视为质点。重力加速度大小为g。

在角速度为Ω竖直向上的转动系中，稳定时丝带与小球保持静止。以地面系中悬挂点轨迹的圆心为原点，原点到悬挂点为x轴正方向，竖直向下为z轴正方向，与x轴、z轴垂直并能构成右手系的方向为y轴正方向，建立空间直角坐标系。

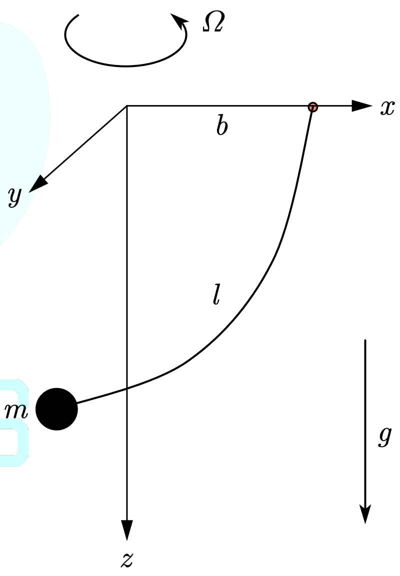


图1.1 旋转丝带

（1）忽略任何空气阻力，则稳定时小球会被“甩开”，但丝带仍在xOz平面内呈直线。在$\Omega^2 l \ll g$的近似条件下，求稳定时小球被甩开的距离$\Delta R(\Delta R \ll b)$，它被定义为悬挂点有旋转和无旋转的条件下小球到z轴的距离差，保留到首阶非零项。

（2）从上一问中可见，忽略空气阻力将不能解释“丝带呈类似于等角螺旋线的形状”的现象，因此，在本小问中，我们考虑丝带和小球受到的空气阻力。设地面系中空气静止。

丝带上的绳元相对空气的速度为$\vec{v}_r$、迎风长度为$\mathrm{d}s_\perp$时，受到空气阻力

$$\mathrm{d}\vec{f} = -\eta \vec{v}_r \mathrm{d}s_\perp \tag{1.1}$$

小球相对空气有速度$\vec{v}_r$时，受到空气阻力

$$\vec{f} = -\xi \vec{v}_r \tag{1.2}$$

其中η和ξ均为已知常量。

为方便计算，假设本题中的参数满足以下关系：

$$\frac{\Omega^2 l}{g}=\frac{\pi}{4},\qquad \eta=\frac{2m}{g}\Omega^3,\qquad \xi=m\Omega \tag{1.3}$$

（2.1）定义复数

$$\tilde{R}=x+\mathrm{i}y \tag{1.4}$$

丝带的稳定形状可由$\tilde{R}=\tilde{R}(z)$描述。先假设丝带形状的变化是小幅的，即$\left|\frac{\mathrm{d}\tilde{R}}{\mathrm{d}z}\right|\ll 1$。分析绳元的受力平衡可得$\tilde{R}(z)$满足

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{R}}{\mathrm{d}z^2}=\tilde{k}^2\tilde{R} \tag{1.5}$$

其中$\tilde{k}$为实部为正的复数。试求$\tilde{k}$的表达式，用l表示。

（2.2）为了求出前一小问的微分方程在本题情景下的特解，需要边界条件。它可以表达为

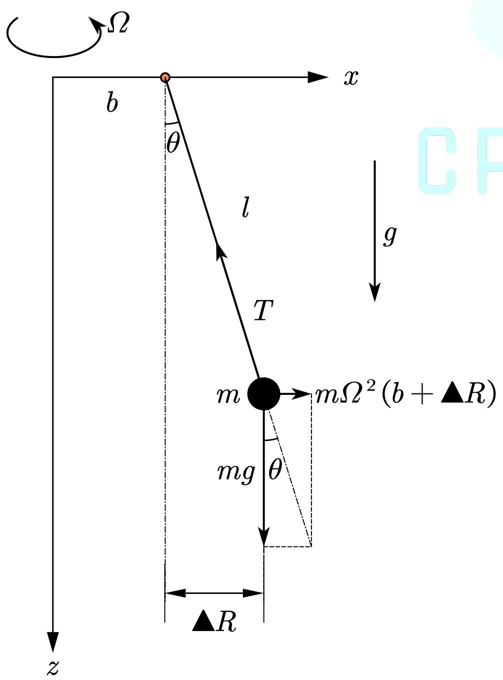
$$\begin{cases}\tilde{R}(0)=b\\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{R}}{\mathrm{d}z}(l)=\tilde{k}_0\tilde{R}(l)\end{cases} \tag{1.6}$$

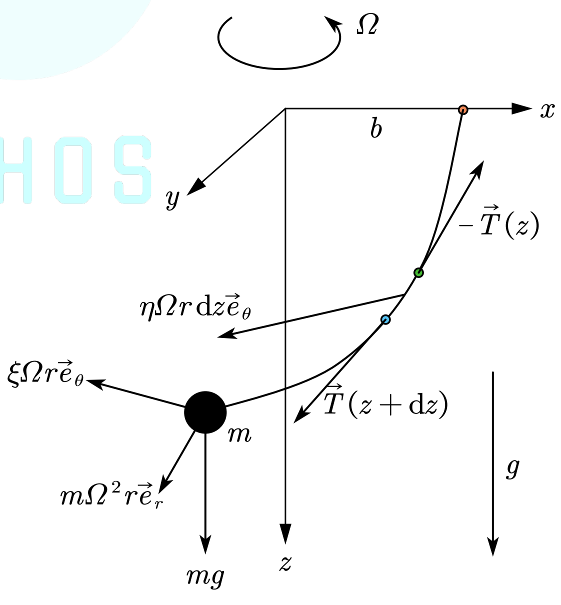
通过分析小球的受力平衡，给出此处的复数$\tilde{k}_0$，用l表示。

（2.3）利用前两小问得出的结果，给出小球到z轴的距离$R=\left|\tilde{R}(l)\right|$与小球和$z$轴构成的平面相对于$xOz$平面转过的角度$\phi=\arg\tilde{R}(l)$，其中$R$用$b$表示，$\phi$以从上往下看顺时针为正。在求解过程中，你会发现$\left|\frac{\mathrm{d}\tilde{R}}{\mathrm{d}z}\right|\ll 1$，因此我们的假设是合理的。

参考解答：

（1）受力分析如左图所示。丝带摆开的角度$\theta\ll 1$。





受力平衡：

$$mg\theta=m\Omega^2 b \tag{1}$$

几何关系：

$$\Delta R=l\theta \tag{2}$$

联立得

$$\Delta R=\frac{\Omega^2 l}{g}b \tag{3}$$

发现确实有$\Delta R\ll b$。

（2）（2.1）受力分析如右图所示，其中惯性离心力和空气阻力的标注中使用了与直角坐标系对应的柱坐标系（原点重合，z轴重合，z轴正方向一致）的参量（柱坐标系用(r,θ,z)表示坐标，用$\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z$表示一点处三个方向的单位矢量）。设丝带上$z$坐标大于$z$的部分给$z$坐标小于$z$的部分的张力$\vec{T}(z)=\vec{T}=\left(T_x,T_y,T_z\right)$，并定义复数$\tilde{T}=T_x+\mathrm{i}T_y$。

z轴投影长为$\mathrm{d}z$的绳元水平方向受力平衡的复数形式在丝带小幅变形时的近似式：

$$\mathrm{d}\tilde{T}+\eta\cdot\mathrm{i}\Omega\tilde{R}\cdot\mathrm{d}z=0 \tag{4}$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{T}}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{i}\eta\Omega\tilde{R} \tag{5}$$

【上式也可通过矢量形式得到。z轴投影长为$\mathrm{d}z$的绳元受力平衡的矢量形式在丝带小幅变形时的近似式：

$$\mathrm{d}\vec{T}+\eta\Omega r\mathrm{d}z\vec{e}_\theta=\vec{0} \tag{4′}$$

在直角坐标系下$\vec{e}_\theta=(-\sin\theta,\cos\theta,0),x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，代入上式，写出$x,y$分量并整理，得：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}T_x}{\mathrm{d}z}=\eta\Omega y\\ \dfrac{\mathrm{d}T_y}{\mathrm{d}z}=-\eta\Omega x\end{cases} \tag{5′}$$

将第一式加上第二式乘i，即得（5）式。】

绳上张力沿绳切向的复数形式：

$$\tilde{T}=T_z\frac{\mathrm{d}\tilde{R}}{\mathrm{d}z} \tag{6}$$

【上式也可通过矢量形式得到。绳上张力沿绳切向的矢量形式：

$$\vec{T}//\mathrm{d}\vec{r}$$

在直角坐标系下表达为

$$\begin{cases}T_x=T_z\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\\ T_y=T_z\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\end{cases} \tag{6′}$$

将第一式加上第二式乘i，即得（6）式。】

丝带上z坐标大于z的部分与小球构成的整体竖直方向受力平衡：

$$T_z=mg \tag{7}$$

联立（5）（6）（7）式得

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{R}}{\mathrm{d}z^2}=-\frac{\mathrm{i}\eta\Omega}{mg}\tilde{R} \tag{8}$$

与题干方程比对得

$$\tilde{k}^2=-\frac{\mathrm{i}\eta\Omega}{mg} \tag{9}$$

代入题干中给出的参数关系，并注意到$\tilde{k}$的实部为正，解得

$$\tilde{k}=\frac{\pi}{4l}(1-\mathrm{i}) \tag{10}$$

（2.2）小球水平方向受力平衡的复数形式：

$$-\tilde{T}(l)+m\Omega^2\tilde{R}(l)+\xi\cdot\mathrm{i}\Omega\tilde{R}(l)=0 \tag{11}$$

【上式也可通过矢量形式得到。小球受力平衡的矢量形式：

$$-\vec{T}(l)+m\vec{g}+m\Omega^2 r(l)\vec{e}_r(l)+\xi\Omega r(l)\vec{e}_\theta(l)=\vec{0}$$

在直角坐标系下$\vec{e}_r=(\cos\theta,\sin\theta,0),\vec{e}_\theta=(-\sin\theta,\cos\theta,0),x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，代入上式，写出$x,y$分量，得：

$$\begin{cases}-T_x(l)+m\Omega^2 x(l)-\xi\Omega y(l)=0\\-T_y(l)+m\Omega^2 y(l)+\xi\Omega x(l)=0\end{cases} \tag{11'}$$

将第一式加上第二式乘i，即得（11）式。】

由（2.1）小问（6）（7）式得

$$\tilde{T}(z)=mg\frac{\mathrm{d}\tilde{R}}{\mathrm{d}z}(z) \tag{12}$$

联立得

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{R}}{\mathrm{d}z}(l)=\frac{m\Omega^2+\mathrm{i}\xi\Omega}{mg}\tilde{R}(l) \tag{13}$$

与题干边界条件比对得

$$\tilde{k}_0=\frac{m\Omega^2+\mathrm{i}\xi\Omega}{mg} \tag{14}$$

代入题干中给出的参数关系，得

$$\tilde{k}_0=\frac{\pi}{4l}(1+\mathrm{i}) \tag{15}$$

（2.3）写出（2.1）小问中给出的微分方程的通解：

$$\tilde{R}(z)=C_1\mathrm{e}^{\tilde{k}z}+C_2\mathrm{e}^{-\tilde{k}z} \tag{16}$$

将其代入（2.2）小问中给出的边界条件：

$$\begin{cases}C_1+C_2=b\\\tilde{k}C_1\mathrm{e}^{\tilde{k}l}-\tilde{k}C_2\mathrm{e}^{-\tilde{k}l}=\tilde{k}_0\left(C_1\mathrm{e}^{\tilde{k}l}+C_2\mathrm{e}^{-\tilde{k}l}\right)\end{cases} \tag{17}$$

解得

$$\begin{cases}C_1=\dfrac{-1}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1}b\\C_2=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1}b\end{cases} \tag{18}$$

将其代入（16）式得特解

$$\tilde{R}(z)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{4l}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi z}{4l}}-\mathrm{e}^{\frac{\pi z}{4l}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi z}{4l}}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1}b \tag{19}$$

发现$\left|\frac{\mathrm{d}\tilde{R}}{\mathrm{d}z}\right|\ll 1$在丝带各处成立。代入$z=l$得小球的水平位置

$$\tilde{R}(l)=\frac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}b \tag{20}$$

于是得

$$\begin{cases}R=\dfrac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}b=0.814b\\\phi=\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \tag{21}$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 6 分：（1）式 3 分，（2）式 2 分，（3）式 1 分；

第（2）问 34 分：

第（2.1）小问 13 分：（4）式 3 分，（5）式 1 分,（6）（7）式 3 分,（8）（9）（10）式 1 分；

第（2.2）小问 7 分：（11）式 3 分，（12）（13）（14）（15）式 1 分；

第（2.3）小问 14 分：（16）式 3 分，（17）（18）式 2 分,（19）式 3 分，（20）（21）式 2 分。

注：每一小问的最终答案解析解和数值解给对一个就给全答案分。

二、（40 分）范德瓦尔斯气体

范德瓦尔斯方程是荷兰物理学家范德瓦尔斯于 1873 年提出的一种实际气体状态方程，将被理想气体模型所忽略的气体分子自身大小和分子之间的相互作用力考虑进来，以便更好地描述气体的宏观物理性质。本题将建立气体分子相互作用的微观模型，并基于此推导出范德瓦尔斯方程。

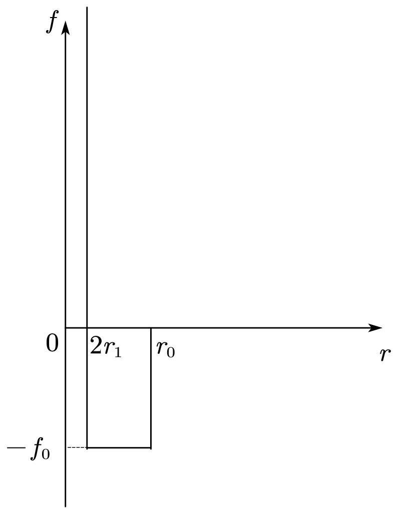


图2.1 气体分子相互作用力

如图2.1所示，假设某种气体分子可视为质量为m、半径为r_1的刚性球，质量集中于球心。两个分子在球心间距离小于$r_0(r_0>2r_1)$时有吸引力$f_0(f_0>0)$，在距离大于等于r_0时无相互作用。该种分子无转动、振动自由度。考虑无重力空间中的一个底面积为S、高为l、体积为$V=Sl$的圆柱容器Ω，其中有$1\ \mathrm{mol}$该气体，整个系统处在温度为T的平衡态，容器壁上的压强为p。已知阿伏伽德罗常数N_A和玻尔兹曼常数k，系统的平均分子数密度为$n=N_A/V$，如未加特殊说明，各结果中不得出现V和N_A。

在近似条件$r_1\ll r_0\ll l$、$\sqrt{S}$，$nf_0r_0^4\ll kT$及$N_Ar_1^3\ll V$下，原本的理想气体状态方程可修正为范德瓦尔斯方程：

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=N_AkT \tag{2.1}$$

而内能公式也与理想气体的不同：

$$U=U(T,V) \tag{2.2}$$

其中a,b为和r_0,r_1,f_0有关的常数。下面我们求解a,b与内能函数的具体形式$U(T,V)$。只需给出最低阶修正。

（1）在一阶近似下，我们认为分子数密度处处为n。但是，由于分子固有体积的存在，分子球心可能存在的所有位置并不占满整个Ω，而是只占满了Ω的一部分，记为Ω_1；由于分子间作用力场的各向同性与分子数密度的均匀性，处于Ω内的某一块区域Ω_0内的分子受到的分子间净作用力为零。

（1.1）设Ω_0内单个分子沿平行于圆柱容器对称轴方向的速度为v_i。已知本题条件下对于每个平动自由度的能量均分定理仍然成立，且由于Ω_0很接近Ω，可认为v_i^2在Ω_0内和在Ω内的平均值近似相等，均记为$\overline{v_i^2}$。求$\overline{v_i^2}$。

现在考察单个分子与容器壁的碰撞，如图2.2所示。当该分子的球心刚离开Ω_0时，它的速度沿平行于圆柱容器对称轴方向的分量为v_i。设有近似条件$mv_i^2\gg nf_0r_0^4$。根据（1.1）小问中的结论，这样的分子占了绝大多数。

（1.2）求当以该分子球心为球心、半径为r_0的球在Ω_1外部的球冠部分的半顶角为θ_0时，该分子受到的分子间净作用力大小$f_z=f_z(\theta_0)$。

（1.3）求从该分子刚离开Ω_0到刚撞上Ω_1的边界的过程中，分子间净作用力对该分子所做的

功W。

（1.4）求该分子在碰撞容器壁时给予容器壁的冲量ΔP。

（2）分子在往返容器两底面时，与容器内的其他分子也发生了碰撞，这可视为一个等效分子在容器两底面间往返并碰撞容器壁。但由于分子固有体积的存在，容器两底面间的有效长度小于l。考察该分子与其他分子的碰撞时，由于两个分子的间距不能小于$2r_1$，且碰撞点只分布在迎着该分子相对速度的半球面上，因此可将该分子看作质点，而将其余每个分子的占据的有效区域看作半径为$2r_1$的刚性半球。分子占据的有效体积为所有刚性半球的体积和。并且，由于分子数密度的均匀性，可认为分子占据的有效区域在容器底面方向上均匀分布。已知此处可忽略该分子球心在Ω_0外的减速效应。试求该分子在容器两底面间往返的时间Δt。

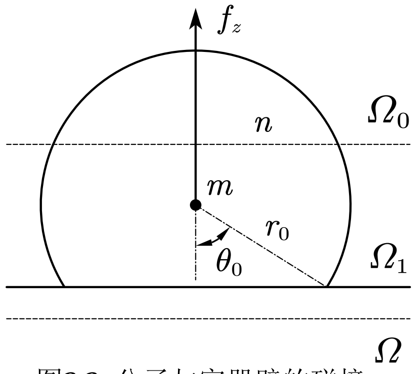


图2.2 分子与容器壁的碰撞

（3）利用以上两问的分析，我们可以从微观相互作用角度求解最初的问题。

（3.1）求范德瓦尔斯方程（2.1）式中的常数a, b。

（3.2）求范德瓦尔斯气体内能公式（2.2）式的具体形式$U = U(T, V)$，本问中结果可包含V。

参考解答：

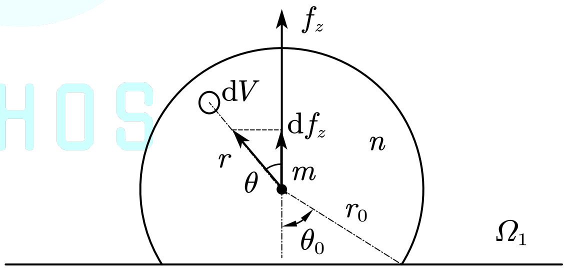
（1）（1.1）由能量均分定理，

$$\overline{\frac{1}{2}mv_i^2} = \frac{1}{2}kT \tag{1}$$

得

$$\overline{v_i^2} = \frac{kT}{m} \tag{2}$$

（1.2）由旋转对称性可得，该分子受到的分子间净作用力沿Ω_1表面法线向内方向。如右图所示，微小体积$\mathrm{d}V$内的分子对该分子的作用力对f_z的贡献为



$$\mathrm{d}f_z = n\mathrm{d}V f_0 \cos\theta \tag{3}$$

在球坐标系下积分：

$$f_z = nf_0 \iiint r^2 \sin\theta \cos\theta \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{4}$$

分段积分：

$$f_z = 2\pi nf_0 \left(\int_0^{\pi-\theta_0} \int_0^{r_0} r^2 \sin\theta \cos\theta \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + \int_{\pi-\theta_0}^{\pi} \int_0^{-\frac{r_0\cos\theta_0}{\cos\theta}} r^2 \sin\theta \cos\theta \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \right) \tag{5}$$

积分并化简得

$$f_z(\theta_0) = \frac{1}{3}\pi nf_0 r_0^3 (2\cos^3\theta_0 - 3\cos^2\theta_0 + 1) \tag{6}$$

（1.3）微元功为

$$\mathrm{d}W = f_z \mathrm{d}(r_0 \cos\theta_0) \tag{7}$$

代入（1.2）问中求出的$f_z(\theta_0)$，并两边积分，θ_0从0积分到$\frac{\pi}{2}$:

$$W=\frac{1}{3}\pi n f_0 r_0^4\int_1^0\left(2\cos^3\theta_0-3\cos^2\theta_0+1\right)\mathrm{d}(\cos\theta_0) \tag{8}$$

积分得

$$W=-\frac{1}{6}\pi n f_0 r_0^4 \tag{9}$$

（1.4）设该分子在碰撞容器壁前沿容器长度方向的速度为v_f。能量守恒（约去平行于容器底面方向的速度引起的动能项）:

$$\frac{1}{2}mv_i^2+W=\frac{1}{2}mv_f^2 \tag{10}$$

代入（1.3）问中求出的W，得

$$v_f=\sqrt{v_i^2-\frac{\pi n f_0 r_0^4}{3m}} \tag{11}$$

近似得

$$v_f=v_i\left(1-\frac{\pi n f_0 r_0^4}{6mv_i^2}\right) \tag{12}$$

由动量定理，所求冲量为

$$\Delta P=2mv_f \tag{13}$$

代入v_f的表达式得

$$\Delta P=2mv_i\left(1-\frac{\pi n f_0 r_0^4}{6mv_i^2}\right) \tag{14}$$

（2）设由于分子固有体积的存在，容器两底面间的有效长度为$l-\Delta l$。由题意，

$$S\Delta l=\frac{1}{2}\cdot N_A\cdot\frac{4}{3}\pi(2r_1)^3 \tag{15}$$

所求时间为往返一次所需时间，即

$$\Delta t=\frac{2(l-\Delta l)}{v_i} \tag{16}$$

联立得

$$\Delta t=\frac{2l}{v_i}\left(1-\frac{16}{3}\pi n r_1^3\right) \tag{17}$$

（3）（3.1）压强满足

$$pS=N_A\frac{\overline{\Delta P}}{\Delta t} \tag{18}$$

代入（1.4）（2）问中求出的$\Delta P,\Delta t$，并近似得

$$p=\frac{N_A m\overline{v_i^2}}{V}\left(1+\frac{16\pi N_A r_1^3}{3V}\right)-\frac{\pi N_A^2 f_0 r_0^4}{6V^2} \tag{19}$$

代入（1.1）问中求出的$\overline{v_i^2}$，并近似得

$$\left(p+\frac{\pi N_A^2 f_0 r_0^4}{6V^2}\right)\left(V-\frac{16}{3}\pi N_A r_1^3\right)=N_A kT \tag{20}$$

与题干范德瓦尔斯方程（1）式对比得

$$a=\frac{1}{6}\pi N_A^2 f_0 r_0^4,b=\frac{16}{3}\pi N_A r_1^3 \tag{21}$$

（3.2）

【方法一】从微观相互作用角度推导内能。

设系统的动能为E_k，势能为E_p。由能量均分定理得

$$E_k = \frac{3}{2}N_A kT \tag{22}$$

下面求系统的势能。在最低阶修正下，忽略分子的固有体积与边界效应。先求分子间的作用力函数对应的势能：

$$U_{12}(r) = -\int f(r)\mathrm{d}r \tag{23}$$

代入$f(r)$的形式，积分，并根据题意利用$U_{12}(+\infty) = 0$，得

$$U_{12}(r) = \begin{cases} -f_0(r_0 - r), r \le r_0 \\ 0 \qquad\qquad\quad , r > r_0 \end{cases} \tag{24}$$

Ω_0内单个分子的势能

$$U_1 = \int U_{12}(r) n \mathrm{d}V \tag{25}$$

其中积分区域为以该分子为球心、半径为r_0的球。积分得

$$U_1 = -\frac{1}{3}\pi n f_0 r_0^4 \tag{26}$$

系统的总势能为

$$E_p = \frac{1}{2}N_A U_1 \tag{27}$$

系统的内能为

$$U = E_k + E_p \tag{28}$$

全部代入得

$$U(T,V) = \frac{3}{2}N_A kT - \frac{\pi N_A^2 f_0 r_0^4}{6V} \tag{29}$$

【方法二】从热力学角度推导内能。

根据热力学基本方程

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \tag{22'}$$

对范德瓦尔斯气体有

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}N_A k \tag{23'}$$

$$p = \frac{N_A kT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \tag{24'}$$

由（22’）和（24’）式计算得到

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{a}{V^2} \tag{25'}$$

联立（23’）（25’）式解得

$$U = \frac{3}{2}N_A kT - \frac{a}{V} + U_0 \tag{26'}$$

代入（3.1）问的结果得到

$$U(T,V) = \frac{3}{2}N_A kT - \frac{\pi N_A^2 f_0 r_0^4}{6V} + U_0 \tag{27'}$$

由于$T \to 0$、$V \to \infty$时$U \to 0$，故

$$U_0 = 0 \tag{28'}$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 18 分：

第（1.1）小问 3 分：（1）式 2 分，（2）式 1 分；

第（1.2）小问 5 分：（3）式 2 分，（4）（5）（6）式各 1 分；

第（1.3）小问 4 分：（7）式 2 分，（8）（9）式各 1 分；

第（1.4）小问 6 分：（10）式 2 分，（11）（12）（13）（14）式各 1 分；

第（2）问 4 分：（15）式 2 分，（16）（17）式各 1 分；

第（3）问 18 分：

第（3.1）小问 6 分：（18）式 2 分，（19）（20）式各 1 分，（21）式 2 分；

第（3.2）小问 12 分：

【方法一】（22）式 2 分，（23）式 1 分，（24）式 2 分，（25）式 1 分，（26）式 2 分，（27）（28）式各 1 分，（29）式 2 分；

【方法二】（22'）式 3 分，（23'）（25'）式各 2 分，（27'）式 4 分，（28'）式 1 分。

三、（40 分）潮汐力引起的岁差

天文学上，称地球的自转轴（地轴）绕黄道面法线缓慢旋转进动的现象叫做岁差，其中黄道面为地球绕太阳公转的轨道所在的平面。该现象的定性解释如下：地球并非完美圆球，而是一个扁球体，月亮和太阳作用在赤道附近的隆起上的引力的净力矩使地轴进动。本题中我们将计算太阳引起的地轴进动的角速度。

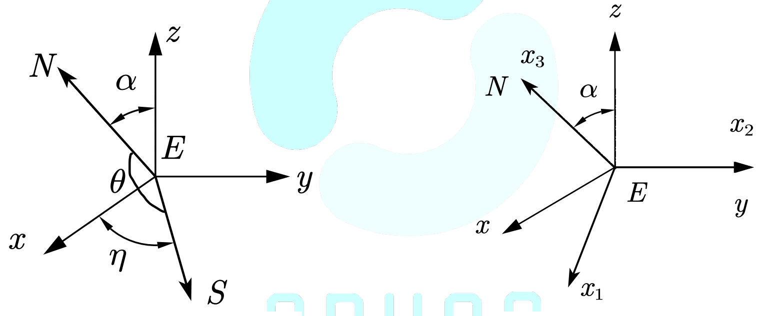


图3.1 $Exyz$坐标系　图3.2 $Ex_1x_2x_3$坐标系

（1）如图3.1所示，在地球质心静止的参考系中，以地球质心E为坐标原点建立空间直角坐标系$Exyz$，取黄道面为Exy平面，某时刻地轴EN位于Ezx平面内。设该时刻地轴EN与z轴的夹角为α，从地球质心E指向太阳S的径矢ES与x轴的夹角为η，EN与ES的夹角为θ。请在坐标系$Exyz$中写出该时刻EN和ES的单位方向向量$\hat{e}_3$和$\hat{e}_S$，并用α和η表示该时刻的$\cos\theta$。

（2）假设地球是一个绕地轴质量分布旋转对称的刚性扁球体。如图3.2所示，以地球质心E为原点建立固连在地球上的空间直角坐标系$Ex_1x_2x_3$，该时刻x_2轴与y轴重合，x_3轴沿地轴方向，沿x_1、x_2、x_3轴的转动惯量分别为I_1、$I_2(=I_1)$、I_3。已知太阳可以视作质量为M的质点，地球质量为m，$|\overrightarrow{ES}|=r$，引力常量为G。试求该时刻太阳对地球的引力势能V，取无穷远点为势能零点，结果保留到r^{-3}项，用$G,M,m,r,I_1,I_3,\cos\theta$表示。

（3）试求出太阳对地球的引力力矩（用坐标系$Exyz$中的分量表示），结果用$G,M,m,r,I_1,I_3,\alpha,\eta$表示。考虑到地轴进动十分缓慢，可以认为在地球绕太阳公转一周的时间内地轴的取向不变，再求该力矩的平均值，结果用G,M,m,r,I_1,I_3,α表示。

（4）设α为常数，地球自转角速度记为ω，待求的、地轴绕z轴缓慢旋转的角速度记为$\dot{\phi}$（$\dot{\phi}\ll\omega$）。求出一阶近似下的进动角速度$\dot{\phi}$。结果用$G,M,\omega,r,I_1,I_3,\cos\alpha$表示。

参考解答：

（1）坐标系$Exyz$中的单位矢量

$$\hat{e}_3=(\sin\alpha,0,\cos\alpha) \tag{1}$$

$$\hat{e}_S=(\cos\eta,\sin\eta,0) \tag{2}$$

根据内积的定义

$$\cos\theta=\hat{e}_3\cdot\hat{e}_S=\sin\alpha\cos\eta \tag{3}$$

（2）记$Ex_1x_2x_3$坐标系各轴单位矢量为$\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3$，则

$$\hat{e}_S=\sin\theta\cos\varphi\,\hat{e}_1+\sin\theta\sin\varphi\,\hat{e}_2+\cos\theta\,\hat{e}_3 \tag{4}$$

其中，φ是$\hat{e}_S$在Ex_1x_2平面内的投影与x_1轴的夹角。

用积分形式写出引力势能

$$V=-\iiint\frac{GM\rho(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3}{\sqrt{(r\sin\theta\cos\varphi-x_1)^2+(r\sin\theta\sin\varphi-x_2)^2+(r\cos\theta-x_3)^2}}$$

$$=-\frac{GM}{r}\iiint\left[1-\frac{2}{r}(x_1\sin\theta\cos\varphi+x_2\sin\theta\sin\varphi+x_3\cos\theta)+\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\rho\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \tag{5}$$

保留到x_1,x_2,x_3的二阶项

$$\begin{aligned}V\approx-\frac{GM}{r}\iiint[1&+\frac{1}{r}(x_1\sin\theta\cos\varphi+x_2\sin\theta\sin\varphi+x_3\cos\theta)-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{2r^2}\\&+\frac{3}{8}\frac{4}{r^2}(x_1\sin\theta\cos\varphi+x_2\sin\theta\sin\varphi+x_3\cos\theta)^2]\rho\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\end{aligned} \tag{6}$$

根据对称性

$$\iiint x_1\,\rho\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\iiint x_2\,\rho\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\iiint x_3\,\rho\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=0 \tag{7}$$

$$\iiint x_1x_2\rho\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\iiint x_2x_3\rho\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\iiint x_3x_1\rho\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=0 \tag{8}$$

交叉项积分都是 0，可以直接略去。

对于平方项，从转动惯量的定义

$$I_3=\iiint(x_1^2+x_2^2)\rho\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \tag{9}$$

$$I_1=\iiint(x_2^2+x_3^2)\rho\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\iiint(x_3^2+x_1^2)\rho\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 \tag{10}$$

可以解出

$$\iiint x_1^2\rho\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\iiint x_2^2\rho\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\frac{I_3}{2},\qquad\iiint x_3^2\rho\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=I_1-\frac{I_3}{2} \tag{11}$$

把（11）代入（6）得到

$$V\approx-\frac{GMm}{r}+\frac{GM(I_3-I_1)}{2r^3}(3\cos^2\theta-1) \tag{12}$$

本问的另一种做法是直接利用地球质量的多极展开。由对称性，地球的质量分布不存在偶极项，只有单级项和四极项，故

$$V=-\frac{GMm}{r}-\frac{GM}{2r^5}\sum_{i,j=1}^{3}D_{ij}r_ir_j$$

其中D_{ij}是四极矩：

$$D_{ij}=\int\rho(3x_ix_j-r^2\delta_{ij})\mathrm{d}V$$

同样根据对称性，D_{ij}仅有对角分量是非零的：

$$D_{11}=D_{22}=\int(2{x_1}^2-{x_2}^2-{x_3}^2)\rho\mathrm{d}V=I_3-I_1$$

$$D_{33}=\int(2{x_3}^2-{x_1}^2-{x_2}^2)\rho\mathrm{d}V=2I_1-2I_3$$

因此

$$V=-\frac{GMm}{r}+\frac{GM(I_3-I_1)}{2r^3}(3\cos^2\theta-1)$$

但注意，该做法属超纲做法，结果正确给全分，结果错误不给分。

（3）太阳受地球引力$\vec{F}=-\nabla V$中，除了有心力成分$-\partial V/\partial r\,\hat{e}_r$之外，还有沿着$\hat{e}_\theta$的非有心力成分

$$F_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{3GM(I_3-I_1)}{r^4}\cos\theta\sin\theta \tag{13}$$

该有心力成分提供沿$\hat{e}_\varphi=\hat{e}_S\times\hat{e}_\theta$的力矩，力矩大小

$$\tau=\left|\overrightarrow{ES}\times F_\theta\hat{e}_\theta\right|=\frac{3GM(I_3-I_1)}{r^3}\cos\theta\sin\theta \tag{14}$$

上式为太阳受地球引力力矩，根据牛顿第三定律，地球所受力矩应当添上负号：$\vec{\tau}\to-\vec{\tau}$。

在$Ex_1x_2x_3$坐标系中，根据几何关系

$$\hat{e}_\varphi=-\sin\varphi\,\hat{e}_1+\cos\varphi\,\hat{e}_2 \tag{15}$$

$Ex_1x_2x_3$坐标系与$Exyz$基矢之间的关系为

$$\hat{e}_x=\hat{e}_1\cos\alpha+\hat{e}_3\sin\alpha\,,\qquad \hat{e}_y=\hat{e}_2,\qquad \hat{e}_z=-\hat{e}_1\sin\alpha+\hat{e}_3\cos\alpha \tag{16}$$

代入式（2）得到

$$\hat{e}_S=\cos\eta\cos\alpha\,\hat{e}_1+\sin\eta\,\hat{e}_2+\sin\alpha\cos\eta\,\hat{e}_3 \tag{17}$$

将（17）与（4）对比，即得(θ,φ)与(α,η)的关系：

$$\cos\eta\cos\alpha=\sin\theta\cos\varphi\,,\qquad \sin\eta=\sin\theta\sin\varphi\,,\qquad \sin\alpha\cos\eta=\cos\theta \tag{18}$$

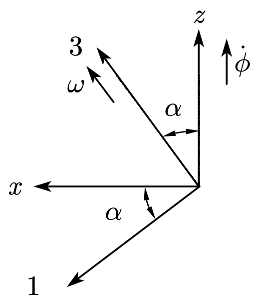
因此

$$\vec{\tau}=-\tau\hat{e}_\varphi=\frac{3GM(I_3-I_1)}{r^3}\sin\alpha\left(\cos\alpha\cos\eta\sin\eta\,\hat{e}_x-\cos^2\eta\cos\alpha\,\hat{e}_y-\sin\alpha\sin\eta\cos\eta\,\hat{e}_z\right) \tag{19}$$

对η取平均

$$\bar{\vec{\tau}}=-\frac{3GM(I_3-I_1)}{2r^3}\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{e}_y \tag{20}$$

（4）



角动量沿x_1,x_3轴的投影

$$L_1=-I_1\dot{\phi}\sin\alpha\,,L_3=I_3\left(\dot{\phi}\cos\alpha+\omega\right) \tag{21}$$

因此，角动量沿x轴的投影为

$$L_x=L_3\sin\alpha+L_1\cos\alpha \tag{22}$$

与进动相关的角动量定理（引起进动的力矩等于进动带来的角动量变化率）：

$$\tau_y = \dot{\phi} L_x \tag{23}$$

$\dot{\phi} \ll \omega$，对上式取一阶近似

$$I_3\omega\dot{\phi} \approx -\frac{3GM(I_3 - I_1)}{2r^3}\cos\alpha \tag{24}$$

解得

$$\dot{\phi} \approx -\frac{3GM}{2\omega r^3}\frac{I_3 - I_1}{I_3}\cos\alpha \tag{25}$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 7 分：（1）（2）式各 2 分，（3）式 3 分；

第（2）问 13 分：用积分形式写出引力势能 3 分，二阶近似 5 分，（10）（11）式各 2 分，（12）式 3 分；

第（3）问 15 分：（13）式 2 分，（15）（16）式各 1 分，（17）（18）式各 2 分，（19）式 4 分，（20）式 2 分；

第（4）问 5 分：（21）（23）式各 1 分，（25）式 3 分。

四、（60分）水旋涡

当快速水平地甩动装有一定量水的矿泉水瓶时，瓶中将有可能形成一个水旋涡。本题尝试研究这种现象。

如图4.1所示，在一个足够高的、底面半径为R的圆柱形水瓶中，装有密度为ρ、体积为V的水。假设V足够大，以至于不用讨论液面形状的不同可能性。

请在答题卡第4页作答第（1）（2）两问

（1）稳定旋转的液面

（1.1）当液体整体绕水瓶的对称轴以角速度ω旋转时，以水瓶底面中心为原点，水瓶对称轴为z轴，建立柱坐标系(r,φ,z)。试求出液面方程$z = z(r,\varphi)$，并求这种能够形成液面形状的水体积V的最小值。

（1.2）试计算液体相对于对称轴的总角动量$L = L(\omega)$。

（2）水旋涡的形成

如图4.1所示，长为l的手臂（$l \gg R$）抓着水瓶，绕某竖直轴在水平面内以匀角速度Ω旋转，水瓶的对称轴保持竖直；待液体相对水瓶静止后，迅速停止转动，使水瓶静止。最终，水达到（1）问中所描述的稳定运动情形。假设停止过程很短，忽略水瓶壁对水的粘滞阻力（即认为只有正压力）。本问认为V与$\frac{\Omega^2 l^2 R^2}{g}$同量级。

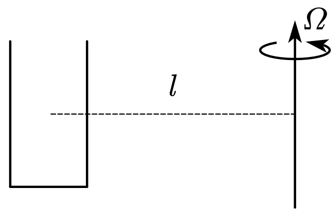


图4.1 甩动水瓶

（2.1）求液体稳定后，水整体转动的角速度ω_e所满足的方程。

（2.2）当$\omega_e \ll \sqrt{\frac{gV}{R^4}}$时，求$\omega_e$的近似解，保留至非零最低阶小量。

请在答题卡第5页作答第（3）问

（3）水旋涡的衰减

本部分假设仅水瓶侧壁对水有粘滞阻力，并且认为此阻力较小，每一时刻液体均以相同的角速度在转动。已知瓶壁单位面积的阻力为

$$\vec{f} = -\alpha p\vec{v} \tag{4.1}$$

其中，α为常量，p为液体对瓶壁的正压强（不考虑大气压），$\vec{v}$为液体相对瓶壁的速度。保持水瓶固定，已知$t = 0$时，$\omega = \omega_e$，试求水的角速度随时间的变化关系$\omega = \omega(t)$（结果中不

必代入ω_e）。

参考解答：

（1）（1.1）液体表面应该为等势面，等势面方程：

$$-\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2+\rho g z=\text{Const} \tag{1}$$

即

$$z=\frac{\omega^2}{2g}r^2+C \tag{2}$$

其中C为常量。首先，假设$C\geq 0$：

$$V=\int_0^R 2\pi r\,\mathrm{d}r\cdot z(r)=\pi R^2 C+\frac{\omega^2}{4g}\pi R^4 \tag{3}$$

$$C=\frac{V}{\pi R^2}-\frac{\omega^2}{4g}R^2$$

由$C\geq 0$得：

$$V\geq\frac{\omega^2}{4g}\pi R^4 \tag{4}$$

由题意，可以认为$C\geq 0$。故：

$$z=\frac{\omega^2 r^2}{2g}+\frac{V}{\pi R^2}-\frac{\omega^2 R^2}{4g}(0\leq r\leq R) \tag{5}$$

（1.2）由题意，V足够大，液面形状由（5）式给出。

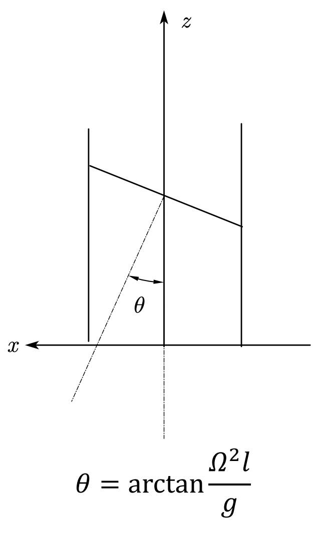
距离对称轴$r\to r+\mathrm{d}r$处的液体质量为$\rho z(r)(2\pi r\mathrm{d}r)$，速度为$\omega r$，故关于对称轴的角动量为：

$$L=\int_0^R 2\pi r\rho z(r)\omega r^2\,\mathrm{d}r=\pi\rho\omega\left(\frac{\omega^2 R^6}{24g}+\frac{V}{2\pi}R^2\right) \tag{6}$$

（2）（2.1）当液体相对瓶身静止后，在瓶子静止的转动参考系中观察，液体质元受到惯性离心力。由于$l\gg R$，在计算液面形状时可以认为惯性离心体力为常量，单位体积的力为：

$$\vec{f}=\rho\Omega^2\vec{l} \tag{7}$$

由于V够大，液面为斜平面，如图所示，图中：



$$\theta=\arctan\frac{\Omega^2 l}{g} \tag{8}$$

液面方程为：

$$\begin{cases} z=\dfrac{V}{\pi R^2}+x\tan\theta \\ x^2+y^2\leq R^2 \end{cases} \tag{9}$$

之后，瓶子突然静止，瓶子静止后瞬间，在瓶子静止系即地面系中观察，取：

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{10}$$

在(r,φ)处流速：

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times (\vec{l} + \vec{r}) \tag{11}$$

则液体相对对称轴的角动量为：

$$\vec{L} = \int \rho\, \mathrm{d}V (\vec{r} \times \vec{v}) = \iint \rho(rz\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r)\left[\vec{r} \cdot (\vec{l} + \vec{r})\vec{\Omega}\right] \tag{12}$$

其大小为：

$$L = \iint \rho r\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r \left(\frac{V}{\pi R^2} + \frac{\Omega^2 l}{g} r\cos\varphi\right)(\Omega r^2 + \Omega l r\cos\varphi) \tag{13}$$

积分可得：

$$L = \frac{1}{2}\rho\Omega V R^2 + \frac{1}{4}\frac{\rho\Omega^3 l^2 \pi R^4}{g} \tag{14}$$

液体由斜液面到抛物面的过程中相对于对称轴的角动量守恒，可得：

$$\pi\rho\omega_e\left(\frac{{\omega_e}^2 R^6}{24g} + \frac{V}{2\pi}R^2\right) = \frac{1}{2}\rho\Omega V R^2 + \frac{1}{4}\frac{\rho\Omega^3 l^2 \pi R^4}{g} \tag{15}$$

（2.2）当$\omega_e \ll \sqrt{\frac{gV}{R^4}}$时，近似到零阶项，可得：

$$\omega_e = \Omega + \frac{\Omega^3 l^2 \pi R^2}{2gV} \tag{16}$$

（3）忽略大气压的情况下，液面处：

$$p = 0 \tag{17}$$

当液体整体转动的角速度为ω时，有液面方程(10)：

$$z(r) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \frac{V}{\pi R^2} - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \tag{18}$$

记：

$$z_0 = z(R) = \frac{\omega^2 R^2}{4g} + \frac{V}{\pi R^2} \tag{19}$$

液体对容器壁的压强：

$$p(z) = \rho g(z_0 - z) \tag{20}$$

此处液体的流速为：

$$v = \omega R \tag{21}$$

粘滞阻力：

$$\mathrm{d}F = \alpha p v \cdot 2\pi R\, \mathrm{d}z \tag{22}$$

总粘滞阻力矩：

$$\tau = -\int_0^{z_0} \alpha\rho g(z_0 - z)\omega R \cdot 2\pi R \cdot R\, \mathrm{d}z \tag{23}$$

积分可得：

$$\tau = -\pi\alpha\rho g R^3 \omega \left(\frac{\omega^2 R^2}{4g} + \frac{V}{\pi R^2}\right)^2 \tag{24}$$

液体相对于对称轴的角动量由式（13）给出，为：

$$L = \pi\rho\omega\left(\frac{\omega^2 R^6}{24g} + \frac{V}{2\pi}R^2\right) \tag{25}$$

对时间求导得：

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\pi\rho R^4\left(\frac{\omega^2R^2}{4g}+\frac{V}{\pi R^2}\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{26}$$

由关于对称轴的角动量定理：

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\tau \tag{27}$$

代入化简可得：

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\frac{2\alpha g}{R}\omega\left(\frac{\omega^2R^2}{4g}+\frac{V}{\pi R^2}\right) \tag{28}$$

即：

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega\left(\frac{\omega^2R^2}{4g}+\frac{V}{\pi R^2}\right)}=-\frac{2\alpha g}{R}\,\mathrm{d}t \tag{29}$$

积分可得：

$$\ln\frac{\omega^2}{\frac{\omega^2R^2}{4g}+\frac{V}{\pi R^2}}-\ln\frac{{\omega_e}^2}{\frac{{\omega_e}^2R^2}{4g}+\frac{V}{\pi R^2}}=-\frac{4\alpha gVt}{\pi R^3} \tag{30}$$

故：

$$\omega=\frac{\omega_e}{\sqrt{\left(\frac{\pi{\omega_e}^2R^4}{4gV}+1\right)\mathrm{e}^{\frac{4\alpha gV}{\pi R^3}t}-\frac{\pi{\omega_e}^2R^4}{4gV}}} \tag{31}$$

评分标准：本题满分 60 分。
第（1）问 20 分：（2）（3）（4）（5）（6）式各 4 分；
第（2）问 16 分：
第（2.1）小问 12 分：（7）（9）（13）（14）式 2 分，（15）式 4 分；
第（2.2）小问 4 分：（16）式 4 分；
第（3）小问 24 分：（17）（20）（21）（22）（23）（24）（25）（26）（27）（28）式 2 分，（31）式 4 分。

五、（40分）中性原子在电磁场中的运动

与带电粒子在电磁场中的运动不同，中性原子在电磁场中的运动具有独特的特点。

（1）如果把中性原子模型化为相对介电常数为ε_r，半径为R的匀质球体，试求解原子的电极化率α。这里α定义为在原子静止时，该原子感应出的电偶极矩p与外电场E_0之比$p=\alpha E_0$。

（2）我们考虑在某种特殊情况下上述原子的运动规律。空间直角坐标系中，有着均匀的$+z$方向磁场B，其中如果$B<0$则代表磁场方向实际上沿着$-z$。将均匀带电绝缘细线$+\lambda$固定于z轴处。现将一个中性原子置于$x=r_0\gg R,y=z=0$处，并以$+y$方向的初速度v_0释放。忽略推迟效应和相对论效应。假设原子质量均匀分布，密度为ρ。

（2.1）如果原子恰好作圆周运动，试求v_0的值。

（2.2）如果释放时原子的速度为$v=kv_0(k>0)$，试求解原子此后在$r\gg R$近似仍成立时所满足的轨迹方程，要求给出在柱坐标系中(r,θ,z)三坐标的表达式，统一以θ为参数表示。

解：（1）假设空间中存在着沿着z轴的电场E_0。在球坐标下面电荷分布具有着

$$\sigma=\sigma_0\cos\theta \tag{1}$$

的形式。由极化电荷产生的电场为

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}(-\hat{z}),r<R\\ \dfrac{\dfrac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\left(2\cos\theta\,\hat{r}+\sin\theta\,\hat{\theta}\right)R^3}{r^3},r>R\end{cases}\tag{2}$$

电位移矢量法向连续：

$$\varepsilon_r\left(E_0-\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\right)=E_0+\frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0}\tag{3}$$

总的电偶极矩为：

$$p=\frac{4\pi}{3}R^3\sigma_0\tag{4}$$

这最终给出：

$$\alpha=\frac{p}{E_0}=4\pi R^3\varepsilon_0\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}\tag{5}$$

（2）（2.1）原子具有极化率α，其感受到的电场为：

$$\vec{E}_{\mathrm{eff}}=\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\tag{6}$$

因此原子的偶极矩为：

$$\vec{p}=\alpha\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)\tag{7}$$

当原子本身在以速度$\vec{v}$运动时，并且具有电偶极矩p时，由于电荷运动所造成受力为：

$$\vec{F}_1=q_+\left(\vec{E}_++\vec{v}\times\vec{B}\right)+q_-\left(\vec{E}_-+\vec{v}\times\vec{B}\right)=p\left(\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}s}\right)\tag{8}$$

其中s代表沿着$\vec{p}$方向的线元。但是，当$\vec{p}$为时间的函数时，还要考虑极化电流的力：

$$\vec{F}_2=\int\vec{J_P}\,\mathrm{d}V\times\vec{B}=\int\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\,\mathrm{d}V\times\vec{B}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B}\tag{9}$$

中性原子的牛顿第二定律为：

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_1+\vec{F}_2\tag{10}$$

利用原子圆周运动的条件，可以得到：

$$-mv_0\frac{v_0}{r_0}=p\left(\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0r_0^2}\right)+p\frac{v_0}{r_0}B\tag{11}$$

由（7）式求得：

$$p=\alpha\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0r_0}+v_0B\right)\tag{12}$$

联立，代入得到：

$$v_0=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0r_0B\sqrt{1+\dfrac{m}{B^2\alpha}}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0r_0\sqrt{B^2+\dfrac{\rho(\varepsilon_r+2)}{3\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)}}}\tag{13}$$

（2.2）这一问的求解需要我们更进一步地分析原子的运动。首先，由于明显的原因：

$$z(\theta)=0,\theta(\theta)=\theta\tag{14}$$

在得知粒子作平面运动后，可以将原子的运动方程写作：

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=p\left(\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}s}\right)+\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B}=p_r\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}r}+p_\theta\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{r\mathrm{d}\theta}+\alpha\left(\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}\tag{15}$$

接下来，注意到：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\lambda\vec{e}_r}{2\pi\varepsilon_0r}\right)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\vec{e}_r}{r^2}\dot{r}+\frac{\vec{e}_\theta}{r}\dot{\theta}\right)\tag{16}$$

$$p_r\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}r}+p_\theta\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{r\mathrm{d}\theta}=\alpha\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\vec{e}_r}{r^2}\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}+r\dot{\theta}B\right)+\frac{\vec{e}_\theta}{r^2}(-B\dot{r})\right)\tag{17}$$

将（16）（17）代入（15），并利用$\vec{v}\cdot\vec{B}=0$，可以化简得到：

$$(m+\alpha B^2)\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-\alpha\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{\vec{e}_r}{r^3}\tag{18}$$

这一运动方程和质量$m_{\mathrm{eff}}=m+\alpha B^2$的粒子在有心力场中的运动方程相同。因此，粒子的角动量守恒：

$$r^2\dot{\theta}=\mathrm{Const}=kr_0v_0\tag{19}$$

同时，粒子的径向运动方程为：

$$\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\frac{\alpha}{m+\alpha B^2}\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{r^3}=-\frac{v_0^2r_0^2}{r^3}\tag{20}$$

代入并积分：

$$\dot{r}=\begin{cases}v_0r_0\sqrt{k^2-1}\sqrt{\dfrac{1}{r_0^2}-\dfrac{1}{r^2}},k\geq 1\\[2ex]-v_0r_0\sqrt{-k^2+1}\sqrt{-\dfrac{1}{r_0^2}+\dfrac{1}{r^2}},0<k<1\end{cases}\tag{21}$$

得到：

$$\mathrm{d}\theta=\frac{kr_0v_0}{r^2\dot{r}}\mathrm{d}r=\begin{cases}\dfrac{k}{\sqrt{k^2-1}}\mathrm{d}\left(\arccos\dfrac{r_0}{r}\right),k\geq 1\\[2ex]\dfrac{k}{\sqrt{-k^2+1}}\mathrm{d}\left(\operatorname{arccosh}\dfrac{r_0}{r}\right),k<1\end{cases}\tag{22}$$

再次积分，最终解得：

$$r=\begin{cases}\dfrac{r_0}{\cos\left(\dfrac{\sqrt{k^2-1}}{k}\theta\right)},k\geq 1\\[3ex]\dfrac{r_0}{\cosh\left(\dfrac{\sqrt{-k^2+1}}{k}\theta\right)},0<k<1\end{cases}\tag{23}$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 8 分：（1）（2）式各 1 分，（3）（4）（5）式各 2 分；

第（2）问 32 分：

第（2.1）小问 12 分：（7）（8）（9）（11）式各 2 分，（13）式 4 分；

第（2.2）小问 20 分：（14）（15）式 2 分，（18）式 4 分，（19）（21）（22）式各 2 分，（23）式 6 分。（若（18）式错误，再根据（16）（17）式各 2 分的细则给分）

六、（60 分）晶体

本题研究平面电磁波在各向异性线性电介质中的传播。在以下各问中，均约定随时间简谐变化的物理量A取如下形式：

$$A(\vec{r},t)=A_0\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)=A_0\mathcal{R}e\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}-\mathrm{i}\omega t}\right)\tag{6.1}$$

其中A_0是不依赖时空位置的常数。同时，忽略电介质中一切磁效应，即有$\vec{B}=\mu_0\vec{H}$，其中μ_0为真空磁导率。

（1）（1.1）记单色平面波的波矢为$\vec{k}=k\cdot\hat{k}$，角频率为ω。利用无源空间中平面电磁波的

各电磁学量满足的如下频域麦克斯韦方程组：

$$\vec{k}\cdot\vec{D}=0,\qquad \vec{k}\cdot\vec{B}=0,\qquad \vec{k}\times\vec{E}=\omega\vec{B},\qquad \vec{k}\times\vec{H}=-\omega\vec{D} \tag{6.2}$$

试求晶体内平面波在稳定传播时$\vec{D},\vec{E}$间满足的关系，关系式中可出现$\hat{k}$和$\tau=\omega/kc$，其中c为真空光速。

（1.2）对于各向异性线性电介质，其介电关系可由下式描述：

$$\begin{cases} D_x=\varepsilon_0\varepsilon_x E_x \\ D_y=\varepsilon_0\varepsilon_y E_y \\ D_z=\varepsilon_0\varepsilon_z E_z \end{cases} \tag{6.3}$$

ε_x、ε_y、ε_z分别对应三个主轴方向的相对介电常量。相应地，ω和k的依赖关系与均匀介质中不同。设波矢$\hat{k}=e_x\hat{x}+e_y\hat{y}+e_z\hat{z}$，求能沿该方向传播的电磁波角频率$\omega$，用$c,k,\alpha=\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z$，$\beta=\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_z\varepsilon_x+\varepsilon_y\varepsilon_z$，$\gamma=\varepsilon_x e_x^2+\varepsilon_y e_y^2+\varepsilon_z e_z^2$，$\delta=\varepsilon_x\varepsilon_y e_z^2+\varepsilon_z\varepsilon_x e_y^2+\varepsilon_y\varepsilon_z e_x^2$表示。

（2）一种特殊的各向异性介质是单轴晶体，即$\varepsilon_x=\varepsilon_y=n_o^2$，$\varepsilon_z=n_e^2(n_e\neq n_o,n_e>0,n_o>0)$，此时称$z$轴方向为光轴方向。考虑如图6.1所示的单轴晶体，其界面法向与光轴方向夹角为θ，一束自然光以垂直界面的方向入射。以光轴方向为z轴方向建立空间直角坐标系。

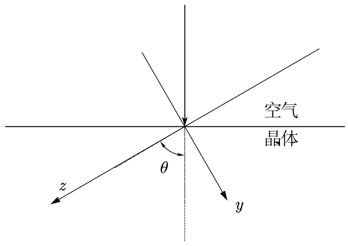


图6.1 单轴晶体

（2.1）根据界面处波矢切向连续，在晶体内的电磁波波矢方向一定沿界面法向。已知沿该方向传播的电磁波可以有两种偏振模式，试结合（1.1）问中的基本方程，在如图坐标系中写出两种偏振状态 1、2 的电场方向单位矢量$\hat{E}_1$，$\hat{E}_2$并求出对应折射率n_1，n_2，其中折射率定义为$n=\frac{kc}{\omega}$。

（2.2）光强定义为能流密度的平均值$I=\langle\vec{E}\times\vec{H}\rangle$，根据（1）问中信息，对于单一偏振状态的光束，将光强用n，c及$\vec{E}$、$\vec{D}$的模方平均值E、D表示。

（2.3）仅考虑在界面一次的折反射过程，求出透射光强与入射光强的比值$\frac{I_t}{I_0}$，并代入$n_o=1.658$、$n_e=1.486$、$\theta=30°$计算数值结果，保留 3 位有效数字。

解：（1.1）在麦克斯韦方程组两侧同乘$\vec{k}$

$$\vec{k}\times\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)=-\vec{k}\times\omega\vec{B} \tag{1}$$

带入磁性的本构关系化简

$$\vec{k}\left(\vec{k}\cdot\vec{E}\right)-k^2\vec{E}+\omega^2\mu_0\vec{D}=0 \tag{2}$$

利用$\tau=\omega/kc$：

$$\varepsilon_0\left(\hat{k}\left(\hat{k}\cdot\vec{E}\right)-\vec{E}\right)+\tau^2\vec{D}=0 \tag{3}$$

（1.2）带入电介质的本构关系，得到线性方程组

$$\begin{pmatrix} \tau^2\varepsilon_x-e_y^2-e_z^2 & e_xe_y & e_xe_z \\ e_xe_y & \tau^2\varepsilon_y-e_x^2-e_z^2 & e_ye_z \\ e_xe_z & e_ye_z & \tau^2\varepsilon_z-e_y^2-e_x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}=0 \tag{4}$$

使得线性方程组有非零解，要求系数行列式为零,得到关于τ^2的三次方程

$$a_3+a_2\tau^2+a_1\tau^4+a_0\tau^6=0 \tag{5}$$

逐个对比系数

$$a_0=\alpha \tag{6}$$

$$a_1=\delta-\beta \tag{7}$$

$$a_2=\gamma \tag{8}$$

$$a_3 = 0 \tag{9}$$

舍去无意义的零解及负解，得到τ_1,τ_2

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{\beta-\delta-\sqrt{(\delta-\beta)^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}},\tau_2 = \sqrt{\frac{\beta-\delta+\sqrt{(\delta-\beta)^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \tag{10}$$

相应

$$\omega_1 = kc\sqrt{\frac{\beta-\delta-\sqrt{(\delta-\beta)^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}},\omega_2 = kc\sqrt{\frac{\beta-\delta+\sqrt{(\delta-\beta)^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \tag{11}$$

（2）（2.1）带入单轴晶体的折射率关系，波矢k与光轴夹角为θ，第一种偏振模式

$$n_1 = n_o \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ 0 & \sin\theta\cos\theta & \dfrac{n_e^2}{n_o^2}-\sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \tag{13}$$

方程的解对应偏振模式

$$\hat{E}_1 = (1,0,0) \tag{14}$$

第二种偏振模式

$$n_2 = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2\cos^2\theta + n_o^2\sin^2\theta}} \tag{15}$$

$$\begin{pmatrix} \left(\dfrac{n_o^2}{n_e^2}-1\right)\sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{n_o^2}{n_e^2}\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ 0 & \sin\theta\cos\theta & \dfrac{n_e^2}{n_o^2}\cos^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \tag{16}$$

方程的解对应偏振模式

$$\hat{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{n_e^4\cos^2\theta + n_o^4\sin^2\theta}}(0, n_e^2\cos\theta, -n_o^2\sin\theta) \tag{17}$$

（2.2）根据

$$\vec{k}\cdot\vec{D} = 0, \vec{k}\cdot\vec{B} = 0, \vec{k}\times\vec{H} = -\omega\vec{D}$$

可以推断出$\vec{k}$，$\vec{H}$，$\vec{D}$构成正交系；再由$\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$，可知$\vec{E}$与$\vec{H}$相互垂直。

$$I = \frac{EDc}{n} \tag{18}$$

（2.3）自然光入射后分解为两种偏振模式。

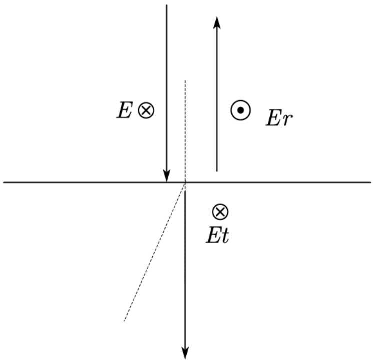


图1

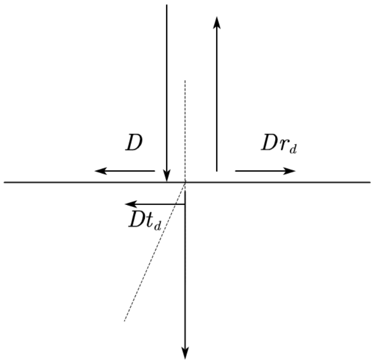


图2

对如图 1 所示的第一种偏振模式，设振幅透、反射率为t,r。
结合边界条件

$$\begin{cases} E_{1//}=E_{2//} \\ H_{1//}=H_{2//} \end{cases} \tag{19}$$

有

$$\begin{cases} 1-r=t \\ 1+r=tn_o \end{cases} \tag{20}$$

解得

$$t=\frac{2}{n_o+1} \tag{21}$$

透射光强

$$I_{t1}=\frac{n_o t^2 I_0}{2}=\frac{2n_o I_0}{(n_o+1)^2} \tag{22}$$

对如图 2 所示的第二种偏振模式。设电位移矢量D的透、反射率为t_d,r_d。由边界上$H_{//}$连续：

$$n_2(1+r_d)=t_d \tag{23}$$

由$E_{//}$连续：

$$1-r_d=t_d\left(\frac{\sin^2\theta}{n_e^2}+\frac{\cos^2\theta}{n_o^2}\right) \tag{24}$$

联立得

$$t_d=\frac{2n_2^2}{n_2+1} \tag{25}$$

透射光强

$$I_{t2}=\frac{t_d^2}{2n_2}\sqrt{\left(\frac{\sin\theta}{n_e^2}\right)^2+\left(\frac{\cos\theta}{n_o^2}\right)^2}\,I_0=\frac{2n_2^3 I_0}{(n_2+1)^2}\sqrt{\left(\frac{\sin\theta}{n_e^2}\right)^2+\left(\frac{\cos\theta}{n_o^2}\right)^2} \tag{26}$$

总比值

$$\frac{I_t}{I_0}=\frac{2n_o}{(n_o+1)^2}+\frac{2n_e n_o}{\left(n_e n_o+\sqrt{n_e^2\cos^2\theta+n_o^2\sin^2\theta}\right)^2}\sqrt{\frac{n_e^4\cos^2\theta+n_o^4\sin^2\theta}{n_e^2\cos^2\theta+n_o^2\sin^2\theta}} \tag{27}$$

代入数值得到

$$\frac{I_t}{I_0}=0.944 \tag{28}$$

评分标准：本题满分 60 分。

第（1）问 21 分：

第（1.1）小问 4 分：（1）（2）式各 1 分，（3）式 2 分；

第（1.2）小问 17 分：（4）式 3 分，（5）（6）（7）（8）（9）（10）（11）式各 2 分；

第（2）问 39 分：

第（2.1）小问 12 分：（12）式 1 分，（13）式 3 分，（14）式 1 分，（15）式 2 分，（16）式 3 分，（17）式 2 分；

第（2.2）小问 6 分：矢量间关系分析各 2 分，（18）式 2 分；

第（2.3）小问 21 分：（19）（20）（21）（22）（23）式各 2 分，（24）（25）式各 3 分，（26）（27）式各 2 分，（28）式 1 分。

七、（40 分）用粒子束拦截陨石

一颗静质量为M，半径为R的球状小行星以大小为v_0的初速度径向撞击地球，地球准备径向发射一束高能粒子流进行拦截，粒子流轨迹延长线穿过小行星球心。已知粒子流由中子构成，静质量为m，速度均匀为u。在束流静止系中粒子数密度为n_0，粒子流的横截面积$S \ll R^2$。忽略一切万有引力。为方便表达结果，记$v_c = \frac{v_0+u}{1+\frac{v_0 u}{c^2}}$、$\gamma_c = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_c^2}{c^2}}}$，已知$v_0, u$与光速$c$同量级，$\frac{m}{\sqrt{1-v_c^2/c^2}} \ll M$，本题中所有答案只用保留到首阶。

（1）在本问中，请利用v_c和γ_c表达你的答案。

（1.1）假设粒子与小行星发生完全弹性碰撞。发生碰撞的初始时刻，分别在相对小行星静止的惯性系和相对粒子流静止的惯性系中，计算单个粒子与小行星碰撞前后的粒子动量改变Δp_1和$\Delta p_1'$，并由此计算小行星受到的平均力F_1和F_1'。

（1.2）假设粒子与小行星发生完全非弹性碰撞，并假设碰后粒子黏附在小行星上，损耗的动能全部瞬时传递给小行星，束流粒子静质量不变。发生碰撞的初始时刻，分别在相对小行星静止的惯性系和相对粒子流静止的惯性系中，计算单个粒子与小行星碰撞前后粒子的动量改变Δp_2和$\Delta p_2'$，并由此给出小行星受到的平均力F_2和F_2'。本问中，不允许使用相对论性力变换公式。

（1.3）用相对论性力变换公式和相对小行星静止的惯性系中的计算结果重新计算（1.2）问中小行星受到的平均力F_2'。

已知若惯性系S'相对惯性系S以x轴方向速度v运动，那么联系两个参考系的受力关系为如下相对论力变换公式：

$$W' = \frac{\gamma}{\gamma'}\frac{W - Fv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, F' = \frac{\gamma}{\gamma'}\frac{F - \frac{Wv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{7.1}$$

其中，$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v_F^2/c^2}}$是力$F$的作用点的移动速率$v_F$的洛伦兹因子，而$W$是力$F$的功率。

（2）接（1.2）问情景，假设粒子与小行星发生完全非弹性碰撞，并假设碰后粒子黏附在小行星上。在地球系中计算小行星受到阻力后向前行进的最远距离x，用$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}, u, v_0, M, m, n_0, S$表示，并代入$u = 0.6c$、$v_0 = 0.8c$、$M = 1000m$计算$\frac{x}{(n_0 S)^{-1}}$的数值，保留 4 位有效数字。

参考解答：

（1）（1.1）相对小行星静止的惯性系中：

由速度变换，粒子流的速度为

$$v_c=\frac{v_0+u}{1+\frac{v_0u}{c^2}}$$

由粒子数守恒和尺缩效应

$$n=\gamma_c n_0 \tag{1}$$

单位时间撞击小行星的粒子数

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=nSv_c \tag{2}$$

由$m\ll M$：

$$\Delta p_1=2\gamma_c m v_c \tag{3}$$

得到：

$$F_1=2\gamma_c^2 m n_0 v_c^2 S \tag{4}$$

相对粒子流静止的惯性系中：

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t'}=Sn_0v_c \tag{5}$$

为了求解碰撞后的动量，我们可以利用相对论能量-动量变换：

$$\Delta p_1'=\gamma_c\left(\Delta p_1+\frac{v_c}{c^2}\cdot 0\right)=2\gamma_c^2 m v_c \tag{6}$$

得到：

$$F_1'=2\gamma_c^2 m n_0 v_c^2 S \tag{7}$$

（1.2）相对小行星静止的惯性系中：

$$\Delta p_2=\gamma_c m v_c \tag{8}$$

$$F_2=\gamma_c^2 m n_0 v_c^2 S \tag{9}$$

相对粒子流静止的惯性系中，由于粒子从速度为0变到为v_c：

$$\Delta p_2'=\gamma_c m v_c \tag{10}$$

$$F_2'=\gamma_c m n_0 v_c^2 S \tag{11}$$

（1.3）在本问所描述情况下：

$$\gamma=1,F=F_2,\gamma'=\gamma_c,F'=F_2',v=v_c$$

但是：

$$W\neq 0$$

这是因为相对论中并无所谓“能量耗散”，凡是一者丢失的能量必定传递给另一者：

$$W_2=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}mc^2(\gamma_c-1) \tag{12}$$

得到：

$$W_2=\gamma_c(\gamma_c-1)mn_0Sv_cc \tag{13}$$

由洛伦兹变换：

$$-F_2'=\frac{1}{\gamma_c}\frac{\left(-F_2+\frac{v_c}{c}\cdot W_2\right)}{\sqrt{1-v_c^2/c^2}} \tag{14}$$

可得：

$$F_2'=\gamma_c m n_0 v_c^2 S \tag{15}$$

这与（1.2）问中的结论一致。

（2）由上述讨论知：系统的总动量、能量守恒。接下来，有两种方法。

【方法一】

在地面系求解，利用能量守恒和动量守恒：

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\gamma_u^2 n_0 Smc^2(u+v) \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=-\gamma_u^2 n_0 Smu(u+v) \tag{18}$$

积分：

$$E=\gamma_0 Mc^2+\gamma_u^2 n_0 Smc^2(ut+x)$$
$$P=\gamma_0 Mv_0-\gamma_u^2 n_0 Smu(ut+x)$$

利用P、E与v的关系：

$$v=\frac{Pc^2}{E}=\frac{av_0-u(x+ut)}{a+x+ut},\text{其中}a=\frac{\gamma_0 M}{\gamma_u^2 n_0 Sm} \tag{19}$$

得到：

$$\frac{\mathrm{d}(x+ut)}{\mathrm{d}t}=\frac{a(v_0+u)}{a+x+ut}$$

积分并带入初末态条件：

$$x=\frac{\gamma_0 M}{\gamma_u^2 n_0 Sm}\frac{v_0^2}{2u(u+v_0)} \tag{20}$$

数值结果为

$$\frac{x}{(n_0 S)^{-1}}=406.3 \tag{21}$$

【方法二】

在相对粒子流静止的惯性参考系求解，利用能量守恒和动量守恒：

$$E=\gamma_{c0}Mc^2+n_0 Smc^2 x' \tag{17'}$$

$$P=\gamma_{c0}Mv_{c0} \tag{18'}$$

利用P、E与v的关系：

$$v'=\frac{Pc^2}{E}=\frac{av_{c0}}{a+x'},\text{其中}a=\frac{\gamma_{c0}M}{n_0 Sm} \tag{19'}$$

利用洛伦兹变换：

$$\mathrm{d}x=\gamma_u(\mathrm{d}x'-u\mathrm{d}t')$$

以及：

$$\mathrm{d}t'=\frac{\mathrm{d}x'}{v'}$$

得到：

$$\mathrm{d}x=\mathrm{d}x'\gamma_u\left(1-\frac{u}{v_{c0}}-\frac{u}{v_{c0}}\frac{x'}{a}\right)$$

可知，小行星在地面仍前进，对应着：

$$x'\le\frac{v_{c0}-u}{u}a$$

积分并化简：

$$x=\frac{\gamma_0 M}{\gamma_u^2 n_0 Sm}\frac{v_0^2}{2u(u+v_0)} \tag{20'}$$

数值结果为

$$\frac{x}{(n_0 S)^{-1}}=406.3 \tag{21'}$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 26 分：

第（1.1）小问 8 分：（1）（2）（3）（4）（5）式各 1 分，（6）式 2 分，（7）式 1 分；

第（1.2）小问 8 分：（8）（9）（10）（11）式各 2 分；

第（1.3）小问 10 分：（12）式 5 分，（13）（14）式各 2 分，（15）式 1 分；

第（2）问 14 分：

方法一：（17）（18）（19）式各 3 分，（20）式 4 分，（21）式 1 分；

方法二：（17′）（18′）（19′）式各 3 分，（20′）式 4 分，（21′）式 1 分。

【对（1.2）问的补充讨论】

有些同学可能会采用这种方法（方法二）:

（1.2）相对小行星静止的惯性系中：

$$\Delta p_2 = \gamma_c m v_c \tag{8′}$$

$$F_2 = \gamma_c^2 m n_0 v_c^2 S \tag{9′}$$

相对粒子流静止的惯性系中：

$$\Delta p_2' = \gamma_c m v_c \tag{10′}$$

把碰撞的研究对象分为三个部分：小行星、粒子、相互作用能。“相互作用能”可以被理解为空间中存在的相互作用力场的能量。

（在方法一中，这部分“相互作用能”被算入小行星的增加的静能。但考虑到，两个基本粒子发生碰撞时，任意一者的静能不得增加。这时为了保证动量和能量的守恒性，必须将“相互作用能”单独计算，如下:）

初态相互作用能为 0，末态相互作用能的大小为：

$$E_{int} = (\gamma_c - 1) m c^2 \tag{11′}$$

在相对小行星静止的惯性系中，相互作用能的动量为 0，但变换到相对粒子流静止的惯性系中时，由相对论能量-动量变换：

$$p_{int} = \gamma_c \left(0 + \frac{v_c}{c}\frac{E_{int}}{c}\right) \tag{12′}$$

故初态动量为 0，末态动量为$\gamma_c(\gamma_c - 1) m v_c$，动量变化量为：

$$\Delta p_{int} = p_{int} - 0 = p_{int}$$

碰撞过程动量守恒，小行星、粒子和相互作用能的动量改变之和为 0，故小行星的动量改变：

$$\Delta p^* = \Delta p_{int} + \Delta p_2' = \gamma_c^2 m v_c$$

受力为：

$$F_2' = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t'} \Delta p^* = \gamma_c^2 m n_0 v_c^2 S \tag{13′}$$

（1.3）在本问所描述情况下：

$$\gamma = 1, F = F_2, \gamma' = \gamma_c, F' = F_2', v = v_c$$

在（1.2）问的理解下，由于单独分出了“相互作用能”，剩余的力F不对小行星做功：

$$W_2 = 0$$

由洛伦兹变换：

$$-F_2' = \frac{1}{\gamma_c} \frac{\left(-F_2 + \frac{v_c}{c} \cdot W_2\right)}{\sqrt{1 - v_c^2/c^2}} \tag{14′}$$

可得：

$$F_2' = \gamma_c^2 m n_0 v_c^2 S \tag{15′}$$

这与（1.2）问中的结论一致。

两种做法的受力F_2'结论不同是因为：原方法认为“相互作用能”会瞬间把动量传递给小行星，并和小行星一同运动；而方法二认为“相互作用能”在这一瞬间是存在在小行星之外的独立部分，其动量没有立刻传给小行星，而是在接下来的时间$\tau \ll \frac{n_0 S}{v_c}$(即小行星运动的特征时间)内传递给小行星。只要说清楚相应的适用场景，这两种模型都是合理的。比如，当写出方程

$$-F'_{2(1)} = \frac{\mathrm{d}(M'\gamma_c v_c)}{\mathrm{d}t'} - \gamma_c v_c m \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t'}$$

（M'为某时刻小行星静质量）时，必须使用方法一的受力$F'_{2(1)}$；当写出方程

$$-F'_{2(2)} = M'\frac{\mathrm{d}(\gamma_c v_c)}{\mathrm{d}t'}$$

时，必须使用方法二的受力$F'_{2(2)}$。

题干中说明“损耗的动能全部瞬时传递给小行星”，因此我们使用原解答中的做法。但无论如何，“相互作用能”必须总是要传递给系统，而不能散失在空间中，因为这里相互作用的力场是接触力。

版权信息

命题人

黄文杰 杨 帆 张天昊 沈熙皓 赵瀚宏 张颢续 丁卓立

审题人

田向晨 郭笑呈 张颢续 黄文杰 杨 帆 张天昊 沈熙皓 丁卓立 赵瀚宏 陆伊炀
曹云博 付亦轩 傅知远 刘家亦 吴弈笛 王泽华 任宇桐 吴恒旭 余博文

联系方式

微信公众号
CPHOS

官方网站
www.cphos.cn

CPHOS 论坛

邮箱
service@cphos.cn

微信小程序
CPHOS 物理竞赛联考