

第 20 届 CPHOS 物理竞赛联考

理论试题

本试题于 2024 年 4 月 26 日 08:00 发布，最后更新于 2024 年 4 月 25 日 22:52。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

答题卡上传	阅卷	
2024/4/26 16:00 - 2024/4/29 10:00	2024/4/30 12:00 - 2024/5/4 18:00	
非正式成绩	成绩申诉	正式成绩
2024/5/4 20:00	2024/5/4 20:00 - 2024/5/5 18:00	2024/5/5 22:00

考生须知

1. 理论试题共 **7** 页，理论答题卡共 **8** 页，答题时间 **180** 分钟，试题满分 **320** 分。
2. 请在答题卡的指定答题区域内答题，试题和草稿纸上的内容将不会作为评分参考，不可申请答题卡加页。
3. 若发现试题存在问题，请向领队（教练）反映，由其转达至相关微信群聊。
4. 试题答案及相关分析均会在官方网站 www.cphos.cn 上发布。
5. 本次考试定位难度为高于复赛、略低于决赛。

一、(40 分) 旋转丝带

我们有时能在店铺前看到一些旋转的丝带，它的上端系在一个匀速旋转的物体上，整条丝带形成一种类似于等角螺旋线的形状并稳定旋转。本题将建立简单模型分析这一现象。

如图 1.1 所示，一条长为 l 的轻质丝带上端系在一个匀速旋转的物体上，悬挂点在水平面内做半径为 b ($b \ll l$)、角速度为 Ω 竖直向上的匀速圆周运动，下端系着一个质量为 m 的小球。丝带可视为不可伸长轻软细绳，小球可视为质点。重力加速度大小为 g 。

在角速度为 Ω 竖直向上的转动系中，稳定时丝带与小球保持静止。以地面系中悬挂点轨迹的圆心为原点，原点到悬挂点为 x 轴正方向，竖直向下为 z 轴正方向，与 x 轴、 z 轴垂直并能构成右手系的方向为 y 轴正方向，建立空间直角坐标系。

(1) 忽略任何空气阻力，则稳定时小球会被“甩开”，但丝带仍在 xOz 平面内呈直线。在 $\Omega^2 l \ll g$ 的近似条件下，求稳定时小球被甩开的距离 ΔR ($\Delta R \ll b$)，它被定义为悬挂点有旋转和无旋转的条件下小球到 z 轴的距离差，保留到首阶非零项。

(2) 从上一问中可见，忽略空气阻力将不能解释“丝带呈类似于等角螺旋线的形状”的现

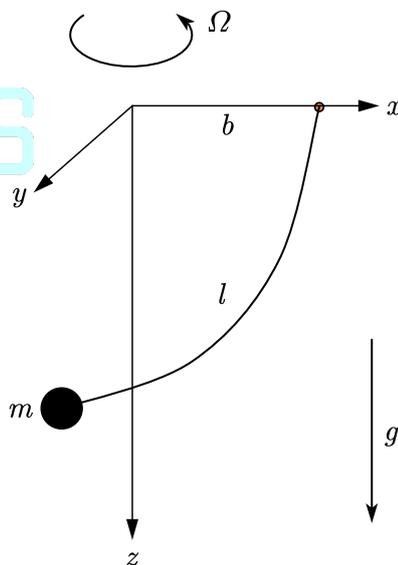


图 1.1 旋转丝带

象，因此，在本小问中，我们考虑丝带和小球受到的空气阻力。设地面系中空气静止。

丝带上的绳元相对空气的速度为 \vec{v}_r 、迎风长度为 ds_{\perp} 时，受到空气阻力

$$d\vec{f} = -\eta\vec{v}_r ds_{\perp} \quad (1.1)$$

小球相对空气有速度 \vec{v}_r 时，受到空气阻力

$$\vec{f} = -\xi\vec{v}_r \quad (1.2)$$

其中 η 和 ξ 均为已知常量。

为方便计算，假设本题中的参数满足以下关系：

$$\frac{\Omega^2 l}{g} = \frac{\pi}{4}, \quad \eta = \frac{2m}{g}\Omega^3, \quad \xi = m\Omega \quad (1.3)$$

(2.1) 定义复数

$$\tilde{R} = x + iy \quad (1.4)$$

丝带的稳定形状可由 $\tilde{R} = \tilde{R}(z)$ 描述。先假设丝带形状的变化是小幅的，即 $\left|\frac{d\tilde{R}}{dz}\right| \ll 1$ 。分析绳元的受力平衡可得 $\tilde{R}(z)$ 满足

$$\frac{d^2\tilde{R}}{dz^2} = \tilde{k}^2\tilde{R} \quad (1.5)$$

其中 \tilde{k} 为实部为正的复数。试求 \tilde{k} 的表达式，用 l 表示。

(2.2) 为了求出前一小问的微分方程在本题情景下的特解，需要边界条件。它可以表达为

$$\begin{cases} \tilde{R}(0) = b \\ \frac{d\tilde{R}}{dz}(l) = \tilde{k}_0\tilde{R}(l) \end{cases} \quad (1.6)$$

通过分析小球的受力平衡，给出此处的复数 \tilde{k}_0 ，用 l 表示。

(2.3) 利用前两小问得出的结果，给出小球到 z 轴的距离 $R = |\tilde{R}(l)|$ 与小球和 z 轴构成的平面相对于 xOz 平面转过的角度 $\phi = \arg \tilde{R}(l)$ ，其中 R 用 b 表示， ϕ 以从上往下看顺时针为正。在求解过程中，你会发现 $\left|\frac{d\tilde{R}}{dz}\right| \ll 1$ ，因此我们的假设是合理的。

二、(40分) 范德瓦尔斯气体

范德瓦尔斯方程是荷兰物理学家范德瓦尔斯于1873年提出的一种实际气体状态方程，将被理想气体模型所忽略的气体分子自身大小和分子之间的相互作用力考虑进来，以便更好地描述气体的宏观物理性质。本题将建立气体分子相互作用的微观模型，并基于此推导出范德瓦尔斯方程。

如图2.1所示，假设某种气体分子可视为质量为 m 、半径为 r_1 的刚性球，质量集中于球心。两个分子在球心间距离小于 r_0 ($r_0 > 2r_1$) 时有吸引力 f_0 ($f_0 > 0$)，在距离大于等于 r_0 时无相互作用。该种分子无转动、振动自由度。考虑无重力空间中的一个底面积为 S 、高为 l 、体积为 $V = Sl$ 的圆柱容器 Ω ，其中有1 mol该气体，整个系统处在温度为 T 的平衡态，容器壁上的压强为 p 。已知阿伏伽德罗常数 N_A 和玻尔兹曼常数 k ，系统的平均分子数密度为 $n = N_A/V$ ，如未加特殊说明，各结果中不得出现 V 和 N_A 。

在近似条件 $r_1 \ll r_0 \ll l$ 、 \sqrt{S} 、 $nf_0r_0^4 \ll kT$ 及 $N_Ar_1^3 \ll V$ 下，原本的理想气体状态方程可修正为范德瓦尔斯方程：

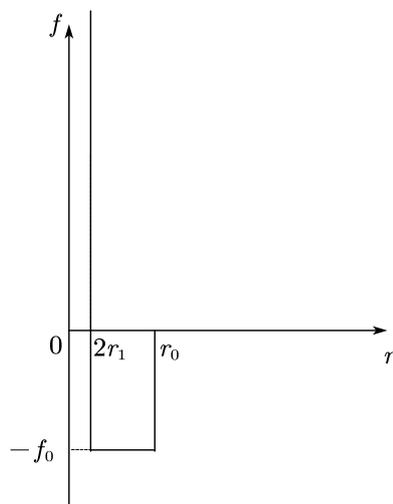


图2.1 气体分子相互作用力

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = N_A kT \quad (2.1)$$

而内能公式也与理想气体的不同：

$$U = U(T, V) \quad (2.2)$$

其中 a, b 为和 r_0, r_1, f_0 有关的常数。下面我们求解 a, b 与内能函数的具体形式 $U(T, V)$ 。只需给出最低阶修正。

(1) 在一阶近似下，我们认为分子数密度处处为 n 。但是，由于分子固有体积的存在，分子球心可能存在的所有位置并不占满整个 Ω ，而是只占满了 Ω 的一部分，记为 Ω_1 ；由于分子间作用力场的各向同性与分子数密度的均匀性，处于 Ω 内的某一块区域 Ω_0 内的分子受到的分子间净作用力为零。

(1.1) 设 Ω_0 内单个分子沿平行于圆柱容器对称轴方向的速度为 v_i 。已知本题条件下对于每个平动自由度的能量均分定理仍然成立，且由于 Ω_0 很接近 Ω ，可认为 v_i^2 在 Ω_0 内和在 Ω 内的平均值近似相等，均记为 $\overline{v_i^2}$ 。求 $\overline{v_i^2}$ 。

现在考察单个分子与容器壁的碰撞，如图2.2所示。当该分子的球心刚离开 Ω_0 时，它的速度沿平行于圆柱容器对称轴方向的分量为 v_i 。设有近似条件 $mv_i^2 \gg nf_0 r_0^4$ 。根据(1.1)小问中的结论，这样的分子占了绝大多数。

(1.2) 求当以该分子球心为球心、半径为 r_0 的球在 Ω_1 外部的球冠部分的半顶角为 θ_0 时，该分子受到的分子间净作用力大小 $f_z = f_z(\theta_0)$ 。

(1.3) 求从该分子刚离开 Ω_0 到刚撞上 Ω_1 的边界的过程中，分子间净作用力对该分子所做的功 W 。

(1.4) 求该分子在碰撞容器壁时给予容器壁的冲量 ΔP 。

(2) 分子在往返容器两底面时，与容器内的其他分子也发生了碰撞，这可视为一个等效分子在容器两底面间往返并碰撞容器壁。但由于分子固有体积的存在，容器两底面间的有效长度小于 l 。考察该分子与其他分子的碰撞时，由于两个分子的间距不能小于 $2r_1$ ，且碰撞点只分布在迎着该分子相对速度的半球面上，因此可将该分子看作质点，而将其余每个分子的占据的有效区域看作半径为 $2r_1$ 的刚性半球。分子占据的有效体积为所有刚性半球的体积和。并且，由于分子数密度的均匀性，可认为分子占据的有效区域在容器底面方向上均匀分布。已知此处可忽略该分子球心在 Ω_0 外的减速效应。试求该分子在容器两底面间往返的时间 Δt 。

(3) 利用以上两问的分析，我们可以从微观相互作用角度求解最初的问题。

(3.1) 求范德瓦尔斯方程(2.1)式中的常数 a, b 。

(3.2) 求范德瓦尔斯气体内能公式(2.2)式的具体形式 $U = U(T, V)$ ，本问中结果可包含 V 。

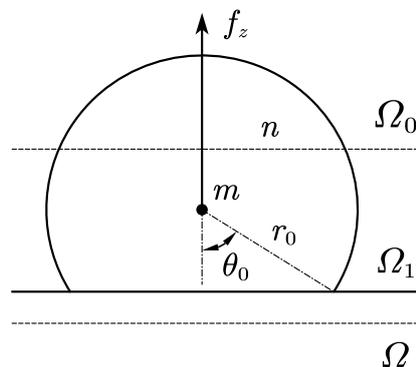
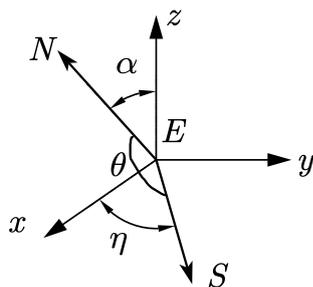
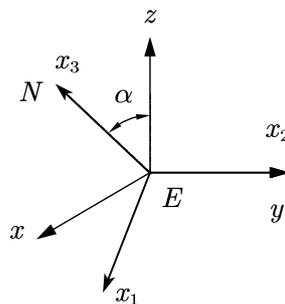


图2.2 分子与容器壁的碰撞

三、(40分) 潮汐力引起的岁差

天文学上，称地球的自转轴（地轴）绕黄道面法线缓慢旋转进动的现象叫做岁差，其中黄道面为地球绕太阳公转的轨道所在的平面。该现象的定性解释如下：地球并非完美圆球，而是一个扁球体，月亮和太阳作用在赤道附近的隆起上的引力的净力矩使地轴进动。本题中我们将计算太阳引起的地轴进动的角速度。

图3.1 $Exyz$ 坐标系图3.2 $Ex_1x_2x_3$ 坐标系

(1) 如图3.1所示, 在地球质心静止的参考系中, 以地球质心 E 为坐标原点建立空间直角坐标系 $Exyz$, 取黄道面为 Exy 平面, 某时刻地轴 EN 位于 Ezx 平面内。设该时刻地轴 EN 与 z 轴的夹角为 α , 从地球质心 E 指向太阳 S 的径矢 ES 与 x 轴的夹角为 η , EN 与 ES 的夹角为 θ 。请在坐标系 $Exyz$ 中写出该时刻 EN 和 ES 的单位方向向量 \hat{e}_N 和 \hat{e}_S , 并用 α 和 η 表示该时刻的 $\cos \theta$ 。

(2) 假设地球是一个绕地轴质量分布旋转对称的刚性扁球体。如图3.2所示, 以地球质心 E 为原点建立固连在地球上的空间直角坐标系 $Ex_1x_2x_3$, 该时刻 x_2 轴与 y 轴重合, x_3 轴沿地轴方向, 沿 x_1 、 x_2 、 x_3 轴的转动惯量分别为 I_1 、 $I_2(=I_1)$ 、 I_3 。已知太阳可以视作质量为 M 的质点, 地球质量为 m , $|\overline{ES}| = r$, 引力常量为 G 。试求该时刻太阳对地球的引力势能 V , 取无穷远点为势能零点, 结果保留到 r^{-3} 项, 用 $G, M, m, r, I_1, I_3, \cos \theta$ 表示。

(3) 试求出太阳对地球的引力力矩(用坐标系 $Exyz$ 中的分量表示), 结果用 $G, M, m, r, I_1, I_3, \alpha, \eta$ 表示。考虑到地轴进动十分缓慢, 可以认为在地球绕太阳公转一周的时间内地轴的取向不变, 再求该力矩的平均值, 结果用 $G, M, m, r, I_1, I_3, \alpha$ 表示。

(4) 设 α 为常数, 地球自转角速度记为 ω , 待求的、地轴绕 z 轴缓慢旋转的角速度记为 $\dot{\phi}$ ($\dot{\phi} \ll \omega$)。求出一阶近似下的进动角速度 $\dot{\phi}$ 。结果用 $G, M, \omega, r, I_1, I_3, \cos \alpha$ 表示。

四、(60分) 水旋涡

当快速水平地甩动装有一定量水的矿泉水瓶时, 瓶中将有可能会形成一个水旋涡。本题尝试研究这种现象。

如图4.1所示, 在一个足够高的、底面半径为 R 的圆柱形水瓶中, 装有密度为 ρ 、体积为 V 的水。假设 V 足够大, 以至于不用讨论液面形状的不同可能性。

请在答题卡第4页作答第(1)(2)两问

(1) 稳定旋转的液面

(1.1) 当液体整体绕水瓶的对称轴以角速度 ω 旋转时, 以水瓶底面中心为原点, 水瓶对称轴为 z 轴, 建立柱坐标系 (r, φ, z) 。试求出液面方程 $z = z(r, \varphi)$, 并求这种能够形成液面形状的水体积 V 的最小值。

(1.2) 试计算液体相对于对称轴的总角动量 $L = L(\omega)$ 。

(2) 水旋涡的形成

如图4.1所示, 长为 l 的手臂 ($l \gg R$) 抓着水瓶, 绕某竖直轴在水平面内以匀角速度 Ω 旋转, 水瓶的对称轴保持竖直; 待液体相对水瓶静止后, 迅速停止转动, 使水瓶静止。最终, 水达到(1)问中所描述的稳定运动情形。假设停止过程很短, 忽略水瓶壁对水的粘滞阻力(即认为只有正压力)。本问认为 V 与 $\frac{\Omega^2 l^2 R^2}{g}$ 同量级。

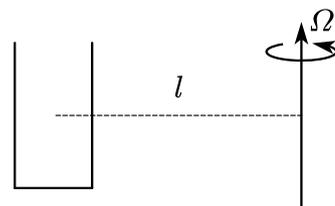


图4.1 甩动水瓶

(2.1) 求液体稳定后, 水整体转动的角速度 ω_e 所满足的方程。

(2.2) 当 $\omega_e \ll \sqrt{\frac{gV}{R^4}}$ 时, 求 ω_e 的近似解, 保留至非零最低阶小量。

请在答题卡第5页作答第(3)问

(3) 水旋涡的衰减

本部分假设仅水瓶侧壁对水有粘滞阻力, 并且认为此阻力较小, 每一时刻液体均以相同的角速度在转动。已知瓶壁单位面积的阻力为

$$\vec{f} = -\alpha p \vec{v} \quad (4.1)$$

其中, α 为常量, p 为液体对瓶壁的正压强 (不考虑大气压), \vec{v} 为液体相对瓶壁的速度。保持水瓶固定, 已知 $t = 0$ 时, $\omega = \omega_e$, 试求水的角速度随时间的变化关系 $\omega = \omega(t)$ (结果中不必代入 ω_e)。

五、(40分) 中性原子在电磁场中的运动

与带电粒子在电磁场中的运动不同, 中性原子在电磁场中的运动具有独特的特点。

(1) 如果把中性原子模型化为相对介电常数为 ϵ_r , 半径为 R 的匀质球体, 试求解原子的电极化率 α 。这里 α 定义为在原子静止时, 该原子感应出的电偶极矩 p 与外电场 E_0 之比 $p = \alpha E_0$ 。

(2) 我们考虑在某种特殊情况下上述原子的运动规律。空间直角坐标系中, 有着均匀的正 z 方向磁场 B , 其中如果 $B < 0$ 则代表磁场方向实际上沿着 $-z$ 。将均匀带电绝缘细线 $+\lambda$ 固定于 z 轴处。现将一个中性原子置于 $x = r_0 \gg R, y = z = 0$ 处, 并以 $+y$ 方向的初速度 v_0 释放。忽略推迟效应和相对论效应。假设原子质量均匀分布, 密度为 ρ 。

(2.1) 如果原子恰好作圆周运动, 试求 v_0 的值。

(2.2) 如果释放时原子的速度为 $v = kv_0 (k > 0)$, 试求解原子此后在 $r \gg R$ 近似仍成立时所满足的轨迹方程, 要求给出在柱坐标系中 (r, θ, z) 三坐标的表达式, 统一以 θ 为参数表示。

六、(60分) 晶体

本题研究平面电磁波在各向异性线性电介质中的传播。在以下各问中, 均约定随时间简谐变化的物理量 A 取如下形式:

$$A(\vec{r}, t) = A_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = A_0 \text{Re} (e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}) \quad (6.1)$$

其中 A_0 是不依赖时空位置的常数。同时, 忽略电介质中一切磁效应, 即有 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, 其中 μ_0 为真空磁导率。

(1) (1.1) 记单色平面波的波矢为 $\vec{k} = k \cdot \hat{k}$, 角频率为 ω 。利用无源空间中平面电磁波的各电磁学量满足的如下频域麦克斯韦方程组:

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}, \quad \vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D} \quad (6.2)$$

试求晶体内平面波在稳定传播时 \vec{D}, \vec{E} 间满足的关系, 关系式中可出现 \hat{k} 和 $\tau = \omega/kc$, 其中 c 为真空光速。

(1.2) 对于各向异性线性电介质, 其介电关系可由下式描述:

$$\begin{cases} D_x = \epsilon_0 \epsilon_x E_x \\ D_y = \epsilon_0 \epsilon_y E_y \\ D_z = \epsilon_0 \epsilon_z E_z \end{cases} \quad (6.3)$$

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 分别对应三个主轴方向的相对介电常量。相应地, ω 和 k 的依赖关系与均匀介质中不同。设波矢 $\hat{k} = e_x \hat{x} + e_y \hat{y} + e_z \hat{z}$, 求能沿该方向传播的电磁波角频率 ω , 用 $c, k, \alpha = \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z, \beta = \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_z \epsilon_x + \epsilon_y \epsilon_z, \gamma = \epsilon_x e_x^2 + \epsilon_y e_y^2 + \epsilon_z e_z^2, \delta = \epsilon_x \epsilon_y e_z^2 + \epsilon_z \epsilon_x e_y^2 + \epsilon_y \epsilon_z e_x^2$ 表示。

(2) 一种特殊的各向异性介质是单轴晶体, 即 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_o^2$, $\varepsilon_z = n_e^2$ ($n_e \neq n_o, n_e > 0, n_o > 0$), 此时称 z 轴方向为光轴方向。考虑如图6.1所示的单轴晶体, 其界面法向与光轴方向夹角为 θ , 一束自然光以垂直界面的方向入射。以光轴方向为 z 轴方向建立空间直角坐标系。

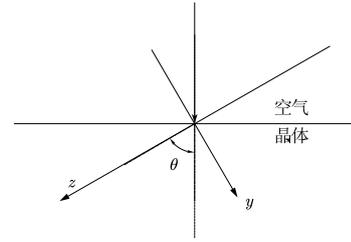


图6.1 单轴晶体

(2.1) 根据界面处波矢切向连续, 在晶体内的电磁波波矢方向一定沿界面法向。已知沿该方向传播的电磁波可以有两种偏振模式, 试结合(1.1)问中的基本方程, 在如图坐标系中写出两种偏振状态 1、2 的电场方向单位矢量 \hat{E}_1 , \hat{E}_2 并求出对应折射率 n_1 , n_2 , 其中折射率定义为 $n = \frac{kc}{\omega}$ 。

(2.2) 光强定义为能流密度的平均值 $I = \langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle$, 根据(1)问中信息, 对于单一偏振态的光束, 将光强用 n , c 及 \vec{E} 、 \vec{D} 的模方平均值 E 、 D 表示。

(2.3) 仅考虑在界面一次的折反射过程, 求出透射光强与入射光强的比值 $\frac{I_t}{I_0}$, 并代入 $n_o = 1.658$ 、 $n_e = 1.486$ 、 $\theta = 30^\circ$ 计算数值结果, 保留 3 位有效数字。

七、(40 分) 用粒子束拦截陨石

一颗静质量为 M , 半径为 R 的球状小行星以大小为 v_0 的初速度径向撞向地球, 地球准备径向发射一束高能粒子流进行拦截, 粒子流轨迹延长线穿过小行星球心。已知粒子流由中子构成, 静质量为 m , 速度均匀为 u 。在束流静止系中粒子数密度为 n_0 , 粒子流的横截面积 $S \ll R^2$ 。忽略一切万有引力。为方便表达结果, 记 $v_c = \frac{v_0 + u}{1 + \frac{v_0 u}{c^2}}$, $\gamma_c = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_c^2}{c^2}}}$, 已知 v_0, u 与光速 c 同量级, $\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v_c^2}{c^2}}} \ll M$, 本题中所有答案只用保留到首阶。

(1) 在本问中, 请利用 v_c 和 γ_c 表达你的答案。

(1.1) 假设粒子与小行星发生完全弹性碰撞。发生碰撞的初始时刻, 分别在相对小行星静止的惯性系和相对粒子流静止的惯性系中, 计算单个粒子与小行星碰撞前后的粒子动量改变 Δp_1 和 $\Delta p'_1$, 并由此计算小行星受到的平均力 F_1 和 F'_1 。

(1.2) 假设粒子与小行星发生完全非弹性碰撞, 并假设碰后粒子黏附在小行星上, 损耗的动能全部瞬时传递给小行星, 束流粒子静质量不变。发生碰撞的初始时刻, 分别在相对小行星静止的惯性系和相对粒子流静止的惯性系中, 计算单个粒子与小行星碰撞前后粒子的动量改变 Δp_2 和 $\Delta p'_2$, 并由此给出小行星受到的平均力 F_2 和 F'_2 。本问中, 不允许使用相对论性力变换公式。

(1.3) 用相对论性力变换公式和相对小行星静止的惯性系中的计算结果重新计算(1.2)问中小行星受到的平均力 F'_2 。

已知若惯性系 S' 相对惯性系 S 以 x 轴方向速度 v 运动, 那么联系两个参考系的受力关系为如下相对论力变换公式:

$$W' = \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{W - Fv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, F' = \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{F - \frac{Wv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.1)$$

其中, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_F^2}{c^2}}}$ 是力 F 的作用点的移动速率 v_F 的洛伦兹因子, 而 W 是力 F 的功率。

(2) 接 (1.2) 问情景, 假设粒子与小行星发生完全非弹性碰撞, 并假设碰后粒子黏附在小行星上。在地球系中计算小行星受到阻力后向行进的最远距离 x , 用 $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$, $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$, u, v_0, M, m, n_0, S 表示, 并代入 $u = 0.6c$ 、 $v_0 = 0.8c$ 、 $M = 1000m$ 计算 $\frac{x}{(n_0 S)^{-1}}$ 的数值, 保留 4 位有效数字。

版权信息

命题人

黄文杰 杨帆 张天昊 沈熙皓 赵瀚宏 张颖续 丁卓立

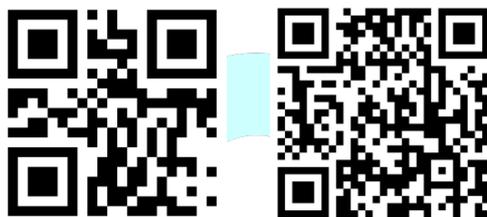
审题人

田向晨 郭笑呈 张颖续 黄文杰 杨帆 张天昊 沈熙皓 丁卓立 赵瀚宏 陆伊炆
曹云博 付亦轩 傅知远 刘家亦 吴弈笛 王泽华 任宇桐 吴恒旭 余博文

联系方式



微信公众号
CPHOS



官方网站
www.cphos.cn CPHOS 论坛

邮箱

service@cphos.cn

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考

CPHOS