

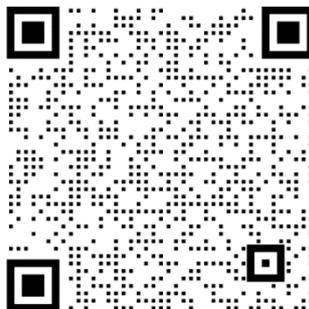
第 21 届 CPHOS 物理竞赛联考

理论试题 参考答案

本试题于 2024 年 7 月 25 日 21:00 发布，最后更新于 2024 年 7 月 25 日 20:49。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。联系方式见试题末尾。

本次考试 CPHOS 不组织阅卷，如果您愿意向我们提供考试成绩以供内部评估，可以扫描右侧二维码或者点击下方链接填写问卷。



<https://doc.weixin.qq.com/forms/AFAAEQeRAG4AboAGAYPAOQtUxcyG50Tbf?page=1>

考生须知

1. 理论试题共 **5** 页，理论答题卡共 **8** 页，答题时间 **180** 分钟，试题满分 **320** 分。
2. 请在答题卡的指定答题区域内答题，试题和草稿纸上的内容将不会作为评分参考，不可申请答题卡加页。
3. 若发现试题存在问题，请向领队（教练）反映，由其转达至相关微信群聊。
4. 试题答案及相关分析均会在官方网站 www.cphos.cn 上发布。

一、（40 分）挂在桌子边缘的衣服

什么时候衣服能挂在桌子的边缘？为回答这个问题，考虑如下简化模型。

A, B 是两个质量均为 m 的质点，它们之间用一根长为 L 、质量可忽略不计、不可伸长的绳连接，如图 1.1 所示。它们被放置于顶角为 α 的光滑水平桌面上，桌面的边缘也是光滑的（边缘只能提供垂直于桌面边缘的约束力）。重力加速度大小为 g 。

（1）作为进一步的简化，考虑此系统的一种特殊的运动方式，此运动方式满足：

- a. 初始时 A, B 两质点都在桌面边缘处静止，即将下落，且 $AO = BO$ ，其中 O 是桌子的顶点；
- b. A, B 两质点的运动关于过桌角对角线的竖直平面对称的；
- c. A, B 两质点运动时无“摆动”，即 A, B 都做直线运动。

（1.1）求绳段 AA' 与竖直方向的夹角 β 。 A' 是这样一空间点： A' 保持为绳与靠近 A 点一侧桌边缘的接触点。

（1.2）求 P 点的加速度。 P 是这样一空间点： P 保持为绳与桌角对角线的交点。

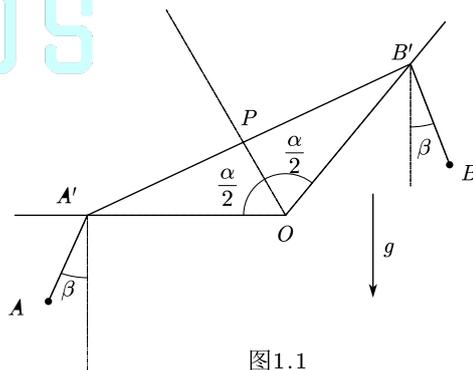


图 1.1

(2) 为使衣服能挂在桌面边缘, 一种可行的方案是使桌面倾斜。仍然采用上述模型, 但桌子有倾斜, 桌子法线方向、挂绳和质点的桌角对角线方向在同一竖直平面内, 如图1.2所示。求能使系统平衡的桌角对角线与水平方向的夹角 θ , 用 α 表示。

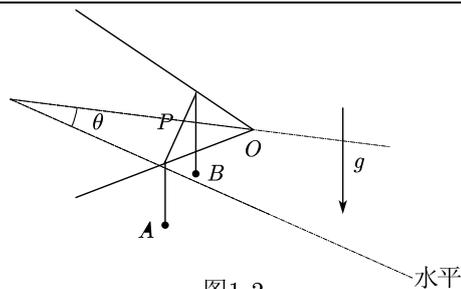


图1.2

参考解答:

(1)

(1.1) 设桌边缘对接触到桌边绳段的约束力是 \vec{N} , 两边绳对接触到桌面的绳段拉力分别为 \vec{T}_1 和 \vec{T}_2 。

分析桌边缘的受力:

$$\vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \quad (1)$$

记桌边缘方向单位矢量为 \hat{e} , 则 $\hat{e} \cdot \vec{N} = 0$ 。由式 (1) 知

$$\hat{e} \cdot (\vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2) = 0 \quad (2)$$

因此

$$\hat{e} \cdot (\vec{T}_1 + \vec{T}_2) = 0 \quad (3)$$

绳中张力处处相等, 记 \vec{T}_1 方向单位矢量为 $\hat{\tau}_1$, \vec{T}_2 方向单位矢量为 $\hat{\tau}_2$:

$$\hat{e} \cdot (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2) = 0 \quad (4)$$

假设 $\hat{\tau}_2$ (如题解图 1) 不在由 \hat{e} 和重力加速度 \vec{g} 确定的竖直平面 Π 内。此时在 A' 参考系看来, 质点 A 所受惯性力方向平行于 \hat{e} , 外力只有重力和绳中张力, 绳会变长, 这样的条件下质点 A 一定会摆动, 因此 $\hat{\tau}_2$ 保持在平面 Π 内。

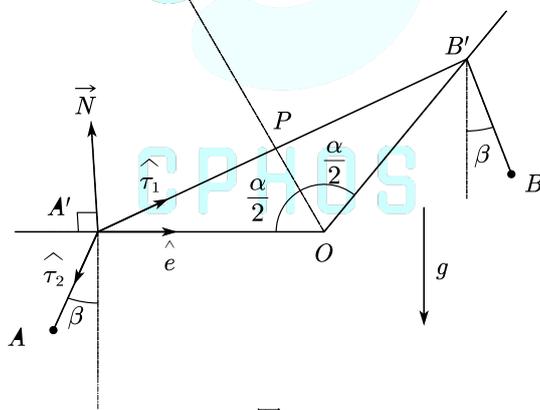


图1

几何关系:

$$\sin \beta = -\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\hat{e} \cdot \hat{\tau}_2 = \hat{e} \cdot \hat{\tau}_1 = \sin \frac{\alpha}{2} \quad (5)$$

故:

$$\beta = \frac{\alpha}{2} \quad (6)$$

(1.2) 由几何关系可知:

$$\text{质点 } A \text{ 在一条与水平面夹角为 } \frac{\alpha}{2} \text{ 的直线上运动} \quad (7)$$

对质点 A , 沿运动方向应用牛顿第二定律:

$$ma_A = mg \sin \frac{\alpha}{2} \quad (8)$$

故：

$$a_A = g \sin \frac{\alpha}{2} \quad (9)$$

加速度牵连：

$$a_{A'} = \frac{g \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \quad (10)$$

$$a_P = g \sin \frac{\alpha}{2} \quad (11)$$

(2) 记 $OP = x$ ，考虑几何关系可得系统势能：

$$V(x) = -2mg \left(x \sin \theta + \frac{L}{2} - x \tan \frac{\alpha}{2} \right) \quad (12)$$

平衡条件：

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

得：

$$\theta = \arcsin \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right) \quad (14)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 24 分：

第 (1.1) 小问 12 分：分析桌边缘小段绳 4 分，(5) (6) 式各 4 分；

第 (1.2) 小问 12 分：(9) (11) 式各 6 分；

第 (2) 问 16 分：(12) (14) 式各 8 分。

二、(40 分) 把皮球踢上台阶

一个有意思的课间活动是把皮球踢上台阶，我们来建立模型分析这个问题。在本题中，皮球可视为一个质量为 m 、半径为 R 的匀质薄球壳，台阶高度也为 R 。重力加速度为 g 。

(1) 如图 2.1 所示，踢皮球的腿被模型化为一根始终与球有相对滑动（在接触点处腿相对于球向上滑动）的竖直圆柱，它与球之间的滑动摩擦因数为 μ ，对球的推力为水平恒力 F 。全过程中，球受到的腿对它的作用力的作用点始终在球的最右端，即与球心等高处。本小问中，皮球与台阶之间始终无相对滑动，二者之间的滚动摩擦也可忽略。初始时，皮球静止在地面上，试求为将这个球滚上这级台阶并且保证它不与台阶脱离，推力 F 应该满足的条件，并给出为使上述 F 有解， μ 应当满足的条件。不考虑球与别的台阶发生碰撞的情况。

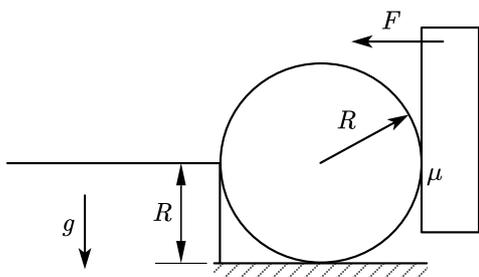


图 2.1

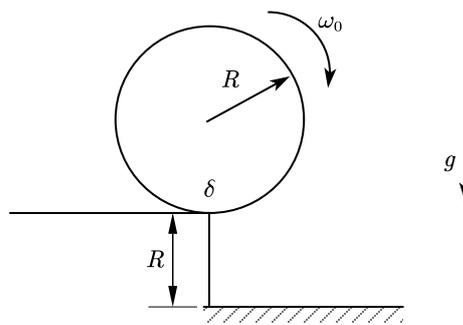


图 2.2

(2) 有时，皮球在滚上去之后会因别人捣乱而滚下来。为简单起见，我们把别人的捣乱看

作施加给球一个瞬时冲量，使之获得 ω_0 的初角速度。本小问中，认为台阶足够粗糙，台阶与球之间的滚动摩擦系数为 δ ，当支持力大小为 N 时，滚动摩擦力矩 $\tau = \delta \cdot N$ 。如图2.2所示，初始时球心位于台阶边沿的正上方。若球心与台阶边沿的连线与竖直方向夹角为 ϕ_0 时，该皮球与台阶发生脱离，试求解 ω_0 的表达式，并给出 $\phi_0 = \pi/6$ 、 $\delta = 0.1R$ 时的数值结果，系数保留3位有效数字。同样，不考虑球在此之前就与台阶脱离或发生碰撞的情况。

参考解答：

(1) 为了便于之后进行无量纲的运算，现设 $F = kmg$ ， k 为无量纲的比例系数。

易知，球壳绕接触点的转动惯量为：

$$I = \frac{2}{3}mR^2 + mR^2 = \frac{5}{3}mR^2 \quad (1)$$

记 θ 为接触点与球心连线和水平方向的夹角，由球壳绕接触点的角动量定理可知：

$$I\ddot{\theta} = \mu FR(1 + \cos \theta) + FR \sin \theta - mgR \cos \theta \quad (2)$$

将 I 和 F 代入可得：

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{d\theta} = \frac{6g}{5R} [-\cos \theta + k(\sin \theta + \mu(1 + \cos \theta))] \quad (3)$$

解这个微分方程，并代入初态可得：

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6g}{5R} [-\sin \theta + k(1 - \cos \theta + \mu(\theta + \sin \theta))] \quad (4)$$

下面来考察球在全过程中的运动情况及其条件：

条件一：排球可以滚上台阶，即对 $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，均有 $\dot{\theta}^2 > 0$ 。

定义函数：

$$G(\theta) = -\sin \theta + k(1 - \cos \theta + \mu(\theta + \sin \theta)) \quad (5)$$

自然可得：

$$G'(\theta) = -\cos \theta + k(\sin \theta + \mu(1 + \cos \theta))$$

临界时：

$$\exists \theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}], G(\theta_0) = 0, G'(\theta_0) = 0 \quad (6)$$

即：

$$k = \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0 + \mu(1 + \cos \theta_0)} \quad (7)$$

将之代入 $G(\theta_0) = 0$ 中：

$$-\sin \theta_0 + \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0 + \mu(1 + \cos \theta_0)} (1 - \cos \theta_0 + \mu(\theta_0 + \sin \theta_0)) = 0 \quad (8)$$

化简即得：

$$\cos \theta_0 - 1 + \mu(\cos \theta_0 \cdot \theta_0 - \sin \theta_0) = 0 \quad (9)$$

观察可得，式(9)左边随 θ_0 单调递减，且当 $\theta_0 = 0$ 时，该式恰好成立，故有：

$$\theta_0 = 0 \quad (10)$$

代入式(4)并令 $\dot{\theta}^2 > 0$ 得：

$$k = \frac{1}{2\mu}, F > \frac{mg}{2\mu} \quad (11)$$

经检验，此时的 F 满足条件。

条件二：在滚上台阶之前，球始终不会与台阶脱离。

即：

$$N = mg \sin \theta + F \cos \theta - \mu F \sin \theta - mR\dot{\theta}^2 \geq 0 \quad (12)$$

代入得:

$$\frac{N}{mg} = \sin \theta + k (\cos \theta - \mu \sin \theta) - \frac{6}{5} [-\sin \theta + k(1 - \cos \theta + \mu(\theta + \sin \theta))] \geq 0 \quad (13)$$

下面令 $\frac{dN}{d\theta} = 0$, 得:

$$k = \frac{11 \cos \theta}{6\mu + 11(\sin \theta + \mu \cos \theta)} \leq \frac{11}{17\mu} \quad (14)$$

下面进行讨论:

A、当 $k \geq \frac{11}{17\mu}$ 时, 恒有 $\frac{dN}{d\theta} \leq 0$;

B、当 $k < \frac{11}{17\mu}$ 时, N 随 θ 先增后减。

故综上所述, N 的极小值在 $\theta = 0$ 或 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时取得。 (15)

代入得到对应的支持力:

$$N(0) = F \quad (16)$$

$$N\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{11mg}{5} - \left[\frac{11}{5}\mu + \frac{6}{5}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\right]F \quad (17)$$

令支持力始终大于零可得:

$$F \leq \frac{11mg}{6 + (11 + 3\pi)\mu} \quad (18)$$

综上所述可得:

$$\frac{mg}{2\mu} < F \leq \frac{11mg}{6 + (11 + 3\pi)\mu} \quad (19)$$

容易得出, 为使 F 有解, μ 需要满足的条件为:

$$\mu > \frac{6}{11 - 3\pi} \approx 3.809 \quad (20)$$

(2) 易得, 绕接触点的转动惯量为:

$$I = \frac{5}{3}mR^2$$

定义 ϕ 为接触点与球心连线和竖直方向的夹角, 可以写出接触点处的支持力为:

$$N = m(g \cos \phi - R\dot{\phi}^2) \quad (21)$$

故有滚动摩擦力矩为:

$$\tau = \delta N = m\delta(g \cos \phi - R\dot{\phi}^2) \quad (22)$$

由球对接触点的角动量定理可知:

$$I\ddot{\phi} = mgR \sin \theta - \delta m(g \cos \phi - R\dot{\phi}^2) \quad (23)$$

代入化简, 并利用 $\frac{d\dot{\phi}^2}{d\phi} \cdot \frac{1}{2} = \ddot{\phi}$ 可得:

$$\frac{d\dot{\phi}^2}{d\phi} - \frac{6\delta}{5R}\dot{\phi}^2 = \frac{6g}{5R^2}(\sin \phi R - \delta \cos \phi) \quad (24)$$

易得该微分方程的通解:

$$\dot{\phi}_1^2 = Ce^{\frac{6\phi\delta}{5R}} \quad (25)$$

其中 C 为待定常数。该微分方程的特解为:

$$\dot{\phi}_2^2 = \frac{3g}{25R^2 + 36\delta^2} \cdot (-22\delta R \sin \phi + (12\delta^2 - 10R^2) \cos \phi) \quad (26)$$

代入初始条件:

$$\phi = 0, \dot{\phi} = \omega_0 \quad (27)$$

可以解出待定常数 C :

$$C = \omega_0^2 - \frac{g}{R} \cdot \frac{36\delta^2 - 30R^2}{25R^2 + 36\delta^2} \quad (28)$$

故可解出角速度与位形的关系:

$$\dot{\phi}^2 = \omega_0^2 e^{\frac{6\phi\delta}{5R}} - \frac{66\delta R \sin \phi}{25R^2 + 36\delta^2} \cdot \frac{g}{R} + \frac{g}{R} \frac{36\delta^2 - 30R^2}{25R^2 + 36\delta^2} \left(\cos \phi - e^{\frac{6\phi\delta}{5R}} \right) \quad (29)$$

在临界时, $N = 0$, 即:

$$R\dot{\phi}_0^2 = g \cos \phi_0 \quad (30)$$

将式 (29) 代入可得, 各参数应当满足的条件为:

$$\omega_0 = \sqrt{\cos \phi_0 - \frac{36\delta^2 - 30R^2}{25R^2 + 36\delta^2} \left(\cos \phi_0 - e^{\frac{6\phi_0\delta}{5R}} \right) + \frac{66\delta R \sin \phi_0}{25R^2 + 36\delta^2} e^{-\frac{3\phi_0\delta}{5R}} \sqrt{\frac{g}{R}}} \quad (31)$$

数值结果为

$$\omega_0 = 0.847 \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (32)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 24 分: (1) (2) (3) 式各 1 分, (5) (7) (11) (12) (14) (15) (17) 式各 2 分, (19) 式 3 分, (20) 式 4 分;

第 (2) 问 16 分: (21) (22) (23) 式各 1 分, (24) (26) (28) (29) (30) 式各 2 分, (32) 式 3 分。

三、(60 分) 带电粒子的相对论性运动

在惯性系 K 中, 以速度 v 沿 $+x$ 方向运动的粒子 1 带有电量 $q > 0$, 以速度 v' 沿 $+y$ 方向运动的粒子 2 具有电量 $q' > 0$ 。它们在原点处发生碰撞生成一个新的粒子 3。考虑相对论效应, 真空光速为 c 、真空介电常量为 ϵ_0 。

(1) 在碰撞前的瞬间, 存在以速度 \vec{v}_0 相对于 K 参考系运动的 K' 系, 使得 K' 中观测到 K 中点 (x, y, z) 处的磁感应强度为零。试求满足该条件所有可能的 \vec{v}_0 , 用分量 (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) 表示。本小问中, 为了简化答案, 你可以使用如下参数:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}; \lambda = \frac{\gamma' q'}{\gamma q} \left(\frac{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + \gamma'^2 y^2 + z^2} \right)^{\frac{3}{2}}; K = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0 (\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.1)$$

(2) 在粒子速度均为低速情况下, 若要求 K' 中处处磁感应强度为零, 求出 \vec{v}_0 的近似值。

(3) 求新粒子 3 可能的最小速度大小, 以及此时粒子 1 和 2 的静质量之比 $k = \frac{m_2}{m_1}$ 。

(4) 在 (3) 的条件下, 求解碰撞后瞬间磁感线的参数方程。

提示: 在以速度 \vec{v} 相对于 S 参考系运动的惯性系 S' 中, 电场和磁场平行于 \vec{v} 的方向分量不变, 而垂直于 \vec{v} 的分量变化为

$$\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.2)$$

参考解答:

(1) 记 \vec{i} 、 \vec{j} 、 \vec{k} 分别为 x 、 y 、 z 方向的单位矢量, 且所有坐标系坐标轴的正方向对应平行, 在 $t = 0$ 时刻对齐。在以速度 $\vec{v} = v\vec{i}$ 相对 K 系运动的粒子 1 静止的 K_1 系中

$$E'_{x1} = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}; E'_{y1} = \frac{qy'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}; E'_{z1} = \frac{qz'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} \quad (1)$$

$$B'_{x1} = 0; B'_{y1} = 0; B'_{z1} = 0 \quad (2)$$

由电磁场的相对论变换公式, 在 K 系中

$$E_{x1} = E'_{x1}; E_{y1} = \gamma(E'_{y1} + vB'_{z1}); E_{z1} = \gamma(E'_{z1} - vB'_{y1}) \quad (3)$$

$$B_{x1} = B'_{x1}; B_{y1} = \gamma\left(B'_{y1} - \frac{v}{c^2}E'_{z1}\right); B_{z1} = \gamma\left(B'_{z1} + \frac{v}{c^2}E'_{y1}\right) \quad (4)$$

其中

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5)$$

由 Lorentz 变换, 令 $t = 0$ 为粒子碰撞的时刻, 则

$$x' = \gamma x; y' = y; z' = z; r' = \sqrt{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2} \quad (6)$$

将 (1) (2) (6) 式代入 (3) (4) 式得

$$E_{x1} = \frac{\gamma qx}{4\pi\epsilon_0 (\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; B_{x1} = 0 \quad (7)$$

$$E_{y1} = \frac{\gamma qy}{4\pi\epsilon_0 (\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; B_{y1} = -\frac{v}{c^2} E_{z1} \quad (8)$$

$$E_{z1} = \frac{\gamma qz}{4\pi\epsilon_0 (\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; B_{z1} = \frac{v}{c^2} E_{y1} \quad (9)$$

\vec{E}_1 的方向与 \vec{E}'_1 相同, 这是因为 $\frac{E_{x1}}{E'_{x1}} = \frac{E_{y1}}{E'_{y1}} = \frac{E_{z1}}{E'_{z1}}$ 。 \vec{E}_1 的大小为

$$E_1 = \sqrt{E_{x1}^2 + E_{y1}^2 + E_{z1}^2} = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^3}} \quad (10)$$

由 (7) (8) (9) 式得

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{v} \times \vec{E}_1}{c^2} \quad (11)$$

同理, 对于 2 号粒子, 我们记

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} \quad (12)$$

且可知 \vec{E}_2 与 \vec{E}'_2 的方向相同, 其大小

$$E_2 = \frac{\gamma' q'}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + \gamma'^2 y^2 + z^2)^3}} \quad (13)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\vec{v}' \times \vec{E}_2}{c^2} \quad (14)$$

可以直接用坐标变换的方法求解 \vec{v}_0 ，但过于麻烦。这里，我们用矢量的方法。矢量形式的电磁场变换公式为

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} = \frac{(\vec{B} \cdot \vec{v}_0)}{|\vec{v}_0|^2} \vec{v}_0 \quad (15)$$

以及

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma_0 \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}_0}{c^2} \times \vec{E} \right)_{\perp} = \gamma_0 \left[\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}_0}{c^2} \times \vec{E} \right) - \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}_0}{c^2} \times \vec{E} \right)_{\parallel} \right] \quad (16)$$

式中

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad (17)$$

由于平行分量可以表示为

$$\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}_0}{c^2} \times \vec{E} \right)_{\parallel} = \frac{1}{v_0^2} \left[\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}_0}{c^2} \times \vec{E} \right) \cdot \vec{v}_0 \right] \vec{v}_0 \quad (18)$$

因此

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma_0 \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}_0}{c^2} \times \vec{E} \right) - \gamma_0 \frac{(\vec{B} \cdot \vec{v}_0)}{|\vec{v}_0|^2} \vec{v}_0 \quad (19)$$

其中，我们利用了 $\vec{v}_0 \times \vec{E}$ 与 \vec{v}_0 垂直。因此，当磁场为 0 时

$$0 = \vec{B}' = \vec{B}'_{\parallel} + \vec{B}'_{\perp} = \gamma_0 \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}_0}{c^2} \times \vec{E} \right) + \frac{1 - \gamma_0}{v_0^2} (\vec{B} \cdot \vec{v}_0) \vec{v}_0 \quad (20)$$

用 \vec{v}_0 点乘式(20)的两边，由 $\vec{v}_0 \times \vec{E}$ 与 \vec{v}_0 垂直及 $\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 = v_0^2$ 可得

$$\vec{B} \cdot \vec{v}_0 = 0 \quad (21)$$

将(21)式代入(20)式可得

$$\vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v}_0 \times \vec{E} = 0 \quad (22)$$

下面我们求总磁场 \vec{B} ，它由两个粒子的磁场共同产生：

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{1}{c^2} (\vec{v}_1 \times \vec{E}_1 + \vec{v}_2 \times \vec{E}_2) = \frac{1}{c^2} (\vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2) \times \vec{E}_1 \quad (23)$$

最后一步是因为，前已论证 \vec{E}_1 与 \vec{E}'_1 平行、 \vec{E}_2 与 \vec{E}'_2 平行，又易知 \vec{E}'_1 与 \vec{E}'_2 平行，因此可得 \vec{E}_1 与 \vec{E}_2 平行；式中， λ 代表 \vec{E}_2 与 \vec{E}_1 大小之比：

$$\lambda = \frac{|\vec{E}_2|}{|\vec{E}_1|} = \frac{\gamma' q'}{\gamma q} \left(\frac{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + \gamma'^2 y^2 + z^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (24)$$

再将(23)式代入(22)式即有

$$(\vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2) \times \vec{E}_1 - \vec{v}_0 \times (\vec{E}_1 + \lambda \vec{E}_1) = 0 \Rightarrow [\vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2 - (1 + \lambda) \vec{v}_0] \times \vec{E}_1 = 0 \quad (25)$$

即 $\vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2 - (1 + \lambda) \vec{v}_0$ 与 \vec{E}_1 平行。因此

$$\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2 - \mu \vec{E}_1}{1 + \lambda} \quad (26)$$

其中 μ 为任意常数。将 \vec{v}_1 、 \vec{v}_2 、 \vec{E}_1 代入(26)式得

$$\begin{cases} v_{0x} = \frac{v - \mu Kx}{1 + \lambda} \\ v_{0y} = \frac{\lambda v - \mu Ky}{1 + \lambda} \\ v_{0z} = \frac{-\mu Kz}{1 + \lambda} \end{cases}, \quad K = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (27)$$

当然，由于 μ 是任意常数，我们可以把 $-\frac{\mu K}{1+\lambda}$ 整个记作 μ ，于是(27)式可以等价地表达为

$$\begin{cases} v_{0x} = \frac{v}{1 + \lambda} + \mu x \\ v_{0y} = \frac{\lambda v}{1 + \lambda} + \mu y \\ v_{0z} = \mu z \end{cases} \quad (28)$$

式中 μ 为任意常数。

(2) 在低速情形下， $\gamma \approx \gamma' \approx 1$ ，因此

$$\lambda = \frac{\gamma' q'}{\gamma q} \left(\frac{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + \gamma'^2 y^2 + z^2} \right)^{\frac{3}{2}} \approx \frac{q'}{q} \quad (29)$$

自动变为常数。若要求 \vec{v}_0 与 x, y, z 无关，需要令 $\mu = 0$ 。这样，(28)式变为

$$\vec{v}_0 = \left(\frac{qv}{q + q'}, \frac{q'v'}{q + q'}, 0 \right) \quad (30)$$

(3) 设 m_1 、 m_2 分别为粒子 1 和粒子 2 的静质量， $k = \frac{m_2}{m_1}$ 。粒子 1 的动量 \vec{p}_1 与粒子 2 的动量 \vec{p}_2 垂直，由动量守恒定律得 $p_1^2 + p_2^2 = p^2$ ：

$$\frac{m_1^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{m_2^2 v'^2}{1 - \frac{v'^2}{c^2}} = \frac{m^2 v_0^2}{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \quad (31)$$

其中 m 为新粒子的静质量， v_0 为新粒子的速度大小。由能量守恒定律得

$$\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad (32)$$

用式(31)除以(32)的平方，得

$$v_0 = \frac{\sqrt{v^2(c^2 - v'^2) + k^2 v'^2(c^2 - v^2)}}{\sqrt{c^2 - v'^2} + k\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (33)$$

取极值时，令 $\frac{dv_0}{dk} = 0$ ，得到

$$k = \frac{m_2}{m_1} = \frac{v^2}{v'^2} \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}} \quad (34)$$

此时，(33)式可写为

$$v_0 = \frac{vv'}{\sqrt{v^2 + v'^2}} \quad (35)$$

(4) 为了求解碰后的磁场分布，我们还需知道碰撞后粒子 3 的速度 \vec{v}_0 的方向。设 \vec{v}_0 与 x 轴的夹角为 θ ，由动量守恒定律

$$\tan \theta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{kv'}{v} \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2 - v'^2}} \quad (36)$$

将 (34) 式代入 (36) 式即有

$$\tan \theta = \frac{v}{v'} \quad (37)$$

让坐标系绕 z 轴逆时针旋转 θ 角, 这样一来, 电磁场可以用 (7) (8) (9) 来描述。无论是直接看磁场的方向, 还是通过求解磁感线方程 $\frac{B'_x}{dx'} = \frac{B'_y}{dy'} = \frac{B'_z}{dz'}$, 即

$$\frac{0}{dx'} = -\frac{v_0 z'}{dy'} = \frac{v_0 y'}{dz'} \quad (38)$$

均可得出磁感线为圆的结论, 且这些圆所在平面均与 x' 轴垂直:

$$z' dz' + y' dy' = 0 \Rightarrow y'^2 + z'^2 = C_2^2 \quad (39)$$

其中, C_2^2 为大于等于 0 的任意常数。设原先这些圆所在平面为 $x' = C$, 绕 z 轴顺时针旋转 θ 角转换到原坐标系中后, 这些圆所在的平面可以用下面的方程描述:

$$y = \cot \theta \cdot x + C_1 = \frac{v'}{v} x + C_1 \quad (40)$$

其中 C_1 为任意常数, 其与 C 的关系为 $C = C_1 \sin \theta$ 。该圆的圆心坐标为

$$O': (C \cos \theta, C \sin \theta, 0) = \left(\frac{C_1 v v'}{v^2 + v'^2}, \frac{C_1 v^2}{v^2 + v'^2}, 0 \right) \quad (41)$$

将该圆投影到 yOz 平面上, 并令 C_2 (任意常数) 为投影前圆的半径。则投影后的图形的中心坐标为 $O'' \left(0, \frac{C_1 v^2}{v^2 + v'^2}, 0 \right)$, 且原先的圆变为半长轴为 C_2 、半短轴为 $C_2 \cos \theta = \frac{C_2 v'}{\sqrt{v^2 + v'^2}}$ 的椭圆。 yOz 平面上投影出的新椭圆在该平面上的方程即可可写为

$$\frac{\left(y - \frac{C_1 v^2}{v^2 + v'^2} \right)^2}{\left(\frac{C_2 v'}{\sqrt{v^2 + v'^2}} \right)^2} + \frac{z^2}{C_2^2} = 1 \quad (42)$$

结合 (40) 式和 (42) 式, 利用椭圆的参数方程的知识, 可得磁感线的参数方程, 即

$$x(\phi) = -\frac{C_2 v}{\sqrt{v^2 + v'^2}} \cos \phi + \frac{C_1 v v'}{v^2 + v'^2} \quad (43)$$

$$y(\phi) = \frac{C_2 v'}{\sqrt{v^2 + v'^2}} \cos \phi + \frac{C_1 v^2}{v^2 + v'^2} \quad (44)$$

$$z(\phi) = C_2 \sin \phi \quad (45)$$

其中 ϕ 为参数, C_1 、 C_2 为任意常数。

评分标准: 本题满分 60 分。

第 (1) 问 25 分: (7) (8) (9) (15) (18) (19) (20) (22) (25) (26) 式各 2 分, (27) 式【或 (28) 式】5 分;

第 (2) 问 5 分: (29) 式 1 分, (30) 式 4 分;

第 (3) 问 10 分: (31) (32) 式各 1 分, (33) 式 2 分, (34) (35) 式各 3 分;

第 (4) 问 20 分: (37) 式 2 分, 得出磁感线为圆【(39) 式或其等价表述】得 8 分, (40) (41) (43) (44) (45) 式各 2 分。

四、(50 分) 圆偏振光的角动量

真空中有一束沿 $+z$ 方向传播的圆偏振光 $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\hat{x} + E_0 \sin(\omega t - kz)\hat{y}$ 。从量

子的角度来看,圆偏振光是由光子组成的,这些光子拥有非零的自旋角动量。已知真空中电磁场的能量密度为 $w = \frac{1}{2}\epsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$, 自旋角动量密度为 $\vec{s} = \epsilon_0\vec{E} \times \vec{A}$, 其中 \vec{A} 为磁矢势。只

考虑时间振荡的磁矢势项时,对于单色平面电磁波有 $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ 。

(1) 求这束圆偏振光的光强 I (单位时间内通过单位面积的能量) 与空间中的角动量密度 \vec{s} 。

(2) 量子化后,圆偏振光中单光子能量 $E = \hbar\omega$ 。利用(1)中求解的结果,求出单个光子的角动量 \vec{L}_γ 。

(3) 让这束光垂直入射一个厚度为 d 、横截面积为 S 的波晶片,此波晶片 x, y 方向的线偏振光的折射率分别为 n_o, n_e 。此时,光子的角动量不再是沿着某一固定方向的本征态,而是处于两个自旋相反方向的叠加态。求出单光子角动量的期望值 $\langle\vec{L}_\gamma\rangle$, 并求解固定住此波晶片所需的力矩大小。本小问中不考虑光的吸收与反射,即只需要考虑通过波晶片后相位的变化。

(4) 旋光晶体对于左旋与右旋偏振光有着不同的折射率。现有一块厚度为 d' 的旋光晶体,对于该波矢大小为 k 的光线,左旋与右旋的折射率分别为 n_+ 与 n_- 。让第(3)问中出射的光继而垂直入射这一旋光晶体,之后再通过一偏振片使其变为 x 方向的线偏振光。求出射后的光子数密度 ρ'' 与单一光子角动量的期望值 $\langle\vec{L}_\gamma\rangle$ 。本小问中同样不考虑光的吸收与反射。

参考解答:

(1) 真空中的电磁波满足

$$E_0 = cB_0 \quad (1)$$

且电场与磁场始终相互垂直。

因此有

$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

$$w = \epsilon_0(E_x^2 + E_y^2) = \epsilon_0E_0^2(\langle\cos^2(\omega t - kz)\rangle + \langle\sin^2(\omega t - kz)\rangle) = \epsilon_0E_0^2 \quad (2)$$

继而得到光强

$$I = wc = \epsilon_0cE_0^2 \quad (3)$$

由 $\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, 对 x, y 方向分量分别积分得

$$\vec{A} = \frac{E_0}{\omega}(-\sin(\omega t - kz)\hat{x} + \cos(\omega t - kz)\hat{y}) \quad (4)$$

我们发现 \vec{A} 始终垂直于 \vec{E} 。由题给表达式 $\vec{s} = \epsilon_0\vec{E} \times \vec{A}$, 得自旋角动量密度

$$\vec{s} = \frac{\epsilon_0E_0^2}{\omega}\hat{z} \quad (5)$$

(2) 单个光子的能量

$$E_\gamma = \hbar\omega \quad (6)$$

光子数密度

$$n = \frac{w}{E_\gamma} = \frac{\epsilon_0E_0^2}{\hbar\omega} \quad (7)$$

因此,单个光子的角动量

$$\vec{L}_\gamma = \frac{\vec{s}}{n} = \hbar\hat{z} \quad (8)$$

(3) 经过波晶片后,圆偏振光的 x, y 方向的分量产生额外的相位差

$$\Delta\varphi = k(n_o - n_e)d \quad (9)$$

此时电场与磁矢势变为

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= E_0(\cos(\omega t - kz - \Delta\varphi)\hat{x} + \sin(\omega t - kz)\hat{y}) \\ \vec{A}' &= \frac{E_0}{\omega}(-\sin(\omega t - kz - \Delta\varphi)\hat{x} + \cos(\omega t - kz)\hat{y})\end{aligned}\quad (10)$$

此时空间中的角动量密度

$$\vec{s}' = \varepsilon_0 \vec{E}' \times \vec{A}' = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{\omega} \cos \Delta\varphi \hat{z} \quad (11)$$

光子全部通过，数密度不变，因此得到

$$\langle \vec{L}'_V \rangle = \frac{\vec{s}'}{n} = \hbar \cos \Delta\varphi \hat{z} = \hbar \cos(k(n_o - n_e)d) \hat{z} \quad (12)$$

维持平衡所需的力矩的大小等于单位时间内传递的角动量

$$\vec{M} = c(\vec{s} - \vec{s}')S \quad (13)$$

将式 (5) (11) 代入得

$$\vec{M} = c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{\omega} [1 - \cos(k(n_o - n_e)d)] S \hat{z} \quad (14)$$

(4)

【方法一】

第 (3) 问中出射的光可以表示成左旋偏振光与右旋偏振光的叠加

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= E_+(\cos(\omega t - kz + \varphi_+)\hat{x} + \sin(\omega t - kz + \varphi_+)\hat{y}) \\ &+ E_-(\cos(\omega t - kz + \varphi_-)\hat{x} - \sin(\omega t - kz + \varphi_-)\hat{y})\end{aligned}\quad (15)$$

观测得到的左旋偏振光与右旋偏振光的光子数比为 $E_+^2 : E_-^2$ ，意味着

$$\langle \vec{L}'_V \rangle = \frac{E_+^2 - E_-^2}{E_+^2 + E_-^2} \hbar \hat{z} \quad (16)$$

又有

$$\sqrt{\langle \vec{E}'^2 \rangle} = \sqrt{E_+^2 + E_-^2} = E_0 \quad (17)$$

联立式 (12) (16) (17)，可得

$$\begin{aligned}E_+ &= \cos(\Delta\varphi/2) E_0 \\ E_- &= \sin(\Delta\varphi/2) E_0\end{aligned}\quad (18)$$

考虑 x 方向的电场的最大值，比较式 (10) (15)，有

$$E_+^2 + E_-^2 + 2E_+E_- \cos(\varphi_+ - \varphi_-) = E_0^2 \quad (19)$$

因而可将 (15) 改写为

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \cos(\Delta\varphi/2) E_0(\cos(\omega t - kz + \varphi)\hat{x} + \sin(\omega t - kz + \varphi)\hat{y}) \\ &+ \sin(\Delta\varphi/2) E_0(\sin(\omega t - kz + \varphi)\hat{x} + \cos(\omega t - kz + \varphi)\hat{y})\end{aligned}\quad (20)$$

(注：直接比较式 (10) (15) 也可计算得到 (20) 式，但计算量会大很多)

经过旋光晶体后，左、右旋偏振光产生额外的相位差

$$\Delta\varphi' = k(n_+ - n_-)d' \quad (21)$$

此时电场变为

$$\begin{aligned}\vec{E}'' &= \cos(\Delta\varphi/2) E_0(\cos(\omega t - kz + \varphi - \Delta\varphi')\hat{x} + \sin(\omega t - kz + \varphi - \Delta\varphi')\hat{y}) \\ &+ \sin(\Delta\varphi/2) E_0(\sin(\omega t - kz + \varphi)\hat{x} + \cos(\omega t - kz + \varphi)\hat{y})\end{aligned}\quad (22)$$

通过偏振片后

$$E_x = E_0[\cos(\Delta\varphi/2) \cos(\omega t - kz + \varphi - \Delta\varphi') + \sin(\Delta\varphi/2) \sin(\omega t - kz + \varphi)] \quad (23)$$

改写成线偏振光的形式

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - kz + \varphi') \quad (24)$$

其中

$$E_{x0}^2 = \left[\cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \sin\Delta\varphi' \right] E_0^2$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2} \sin(k(n_o - n_e)d) \sin(k(n_+ - n_-)d') \right] E_0^2 \quad (25)$$

此时能量密度变为

$$w'' = \varepsilon_0 \langle E_x^2 \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left[1 + \frac{1}{2} \sin(k(n_o - n_e)d) \sin(k(n_+ - n_-)d') \right] E_0^2 \quad (26)$$

光子数密度变为

$$n'' = \frac{w''}{\hbar\omega} = \frac{\varepsilon_0}{2\hbar\omega} \left[1 + \frac{1}{2} \sin(k(n_o - n_e)d) \sin(k(n_+ - n_-)d') \right] E_0^2 \quad (27)$$

线偏振光无角动量

$$\langle \vec{L}_y'' \rangle = 0 \quad (28)$$

【方法二】

考虑一线偏振光通过这一旋光晶体，其偏振方向会顺时针旋转 θ

$$\theta = \frac{k(n_+ - n_-)d'}{2} \quad (29')$$

第(3)问中出射的光可以看成两个线偏振光的叠加，因此 \vec{E}'' 也相当于 \vec{E}' 顺时针旋转 θ （加上一定的相位差）。再通过偏振片，相对于 \vec{E}' 投影到 $y = x \tan \theta$ 上。

最终的电场

$$E_x = E_0 (\cos(\omega t - kz - \Delta\varphi) \cos \theta + \sin(\omega t - kz) \sin \theta) \quad (30')$$

改写成线偏振光的形式

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - kz + \varphi') \quad (31')$$

其中

$$E_{x0}^2 = [\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos \theta \sin \theta \sin \Delta\varphi] E_0^2$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2} \sin(k(n_o - n_e)d) \sin(k(n_+ - n_-)d') \right] E_0^2 \quad (32')$$

与(25)一致。

之后过程与方法一相同。

评分标准：本题满分 50 分。

第(1)问 10 分：(1) (2) (3) (4) (5) 式各 2 分；

第(2)问 5 分：(6) (7) 式各 2 分，(8) 式 1 分；

第(3)问 15 分：(9) (11) (14) 式各 2 分，(10) (12) (13) 式各 3 分；

第(4)问 20 分：

【方法一】(15) (16) (17) (18) (20) (21) (23) (25) (28) 式各 2 分，(26) (27) 式各 1 分（用其他方法从(15)式得到(20)式也可得到(16) (17) (18)式的分）；

【方法二】(29') (30') 式各 6 分，(32') (26) (27) (28) 式各 2 分。

五、(40 分) 范德瓦尔斯气体的临界点

众所周知，范德瓦尔斯气体存在一个特殊的临界点，在临界点附近，范德瓦尔斯气体的相变为二级相变。二级相变存在一系列特征量（被称作临界指数），本题就来研究临界点附近相变的过程。

(1) 已知 1 mol 范德瓦尔斯气体的状态方程为

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (5.1)$$

求该临界点的压强 p_c 、摩尔体积 v_c 和临界温度 T_c 。

(2) 接下来, 我们考察临界点附近范德瓦尔斯气体的特性。

(2.1) 求临界点附近范德瓦尔斯气体的近似状态方程, 用 $\pi = \pi(\phi, \tau)$ 表示, 其中

$$\pi = \frac{p}{p_c} - 1, \quad \phi = \frac{v}{v_c} - 1, \quad \tau = \frac{T}{T_c} - 1 \quad (5.2)$$

代表无量纲化后对临界点压强、体积和温度, 要求 π 精确至关于 ϕ 的三次项, 且每项系数保留到关于 τ 的最低阶项。

(2.2) 在温度比 T_c 略小时, 气液共存的情况下, 气体和液体的密度差 $\Delta\rho \propto (-\tau)^\beta$, 求临界指数 β 。

(2.3) 在 $T = T_c$ 时, 压强随体积的变化满足 $\pi \propto \phi^\delta$, 求临界指数 δ 。

(2.4) 在 $T > T_c$, $v = v_c$ 时, 等温压缩率 $\kappa_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$ 满足 $\kappa_T \propto \tau^{-\gamma}$, 求临界指数 γ 。

参考解答:

(1) 将状态方程整理为

$$p = p(v, T) = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \quad (1)$$

临界情况满足

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_{T=T_c, v=v_c} = 0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_{T=T_c, v=v_c} = 0 \quad (3)$$

解得

$$\begin{cases} p_c = \frac{a}{27b^2} \\ v_c = 3b \\ T_c = \frac{8a}{27Rb} \end{cases} \quad (4)$$

(2.1) 把 p, v, T 用 π, τ, ϕ 表示, 并代入 (1) 中求出的 p_c, v_c, T_c , 化简得:

$$1 + \pi = \frac{4(1+\tau)}{1 + \frac{3}{2}\phi} - \frac{3}{(1+\phi)^2} \quad (5)$$

近似得

$$1 + \pi = 4(1+\tau) \left(1 - \frac{3}{2}\phi + \frac{9}{4}\phi^2 - \frac{27}{8}\phi^3 \right) - 3(1 - 2\phi + 3\phi^2 - 4\phi^3) \quad (6)$$

按题目要求化简并近似得

$$\pi(\phi, \tau) = 4\tau - 6\tau\phi + 9\tau\phi^2 - \frac{3}{2}\phi^3 \quad (7)$$

(2.2) 由麦克斯韦等面积法则可以确定等压情况下发生相变时和结束相变时的气体摩尔体积 v_g 和 v_l 。由三次函数的对称性, 气液相开始转变的两个点分居 $\pi - \phi$ 图像拐点 (ϕ_0, π_0) 的正左方 (ϕ_l, π_0) 与正右方 (ϕ_g, π_0) 。

先求拐点。求二阶导:

$$\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial \phi^2} \right)_\tau = 18\tau - 9\phi \quad (8)$$

拐点横坐标 ϕ_0 满足

$$\left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial \phi^2}\right)_{\tau, \phi=\phi_0} = 0 \quad (9)$$

解得

$$\phi_0 = 2\tau \quad (10)$$

代入得拐点纵坐标

$$\pi_0 = \pi(\phi_0, \tau) = 4\tau - 12\tau^2 + 24\tau^3 \quad (11)$$

相变开始和结束点的横坐标 $\phi = \phi_l, \phi_g$ 满足方程

$$\pi(\phi, \tau) = \pi_0 \quad (12)$$

代入解得

$$\phi_{g,l} = 2\tau \pm 2\sqrt{-\tau + 3\tau^2} \quad (13)$$

设气体的摩尔质量为 μ ，则密度差为

$$\Delta\rho = \frac{\mu}{v_l} - \frac{\mu}{v_g} \quad (14)$$

在临界点附近用 ϕ 表达上式，代入 $\phi_{g,l}$ 并近似得

$$\Delta\rho = \frac{4\mu}{v_c} \sqrt{-\tau} \quad (15)$$

因此

$$\beta = \frac{1}{2} \quad (16)$$

(2.3) 往 (2.1) 小问中给出的 $\pi = \pi(\phi, \tau)$ 里代入 $\tau = 0$ ，得

$$\pi = -\frac{3}{2}\phi^3 \quad (17)$$

因此

$$\delta = 3 \quad (18)$$

(2.4) 在临界点附近用 (π, ϕ, τ) 近似表达 κ_T ：

$$\kappa_T = -\frac{1}{v_c} \cdot \frac{v_c}{p_c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \pi}\right)_\tau \quad (19)$$

化简得

$$\kappa_T = -\frac{1}{p_c} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \phi}\right)_\tau^{-1} \quad (20)$$

将 (2.1) 小问中求出的 $\pi = \pi(\phi, \tau)$ 求导得

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial \phi}\right)_\tau = -6\tau + 18\tau\phi - \frac{3}{2}\phi^2 \quad (21)$$

在题给 $\phi = 0$ 条件下将其代入 (20) 式，得

$$\kappa_T = \frac{1}{6p_c\tau} \quad (22)$$

故

$$\gamma = 1 \quad (23)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 15 分：(2) (3) 式各 3 分，(4) 式 9 分；

第 (2) 问 25 分：

第 (2.1) 小问 6 分：(5) 式 1 分，(6) 式 3 分，(7) 式 2 分；

第 (2.2) 小问 8 分：(10) (11) 式 1 分，(13) 式 3 分，(14) (15) (16) 式各 1 分；

第 (2.3) 小问 4 分: (17) 式 3 分, (18) 式 1 分;

第 (2.4) 小问 7 分: (20) 式 2 分, (22) 式 3 分, (23) 式 2 分;

六、(40 分) 光纤陀螺仪

光纤陀螺仪是一种检测物体转动的光学仪器, 因为具有寿命长、启动迅速等优点, 它近年来正在逐步取代机械陀螺仪的地位。它的主要原理是, 当光学环路转动时, 在不同行进方向上光线的光程相对静止状态都会有变化, 因此可以通过干涉条纹的变化来测量光路的旋转角速度。

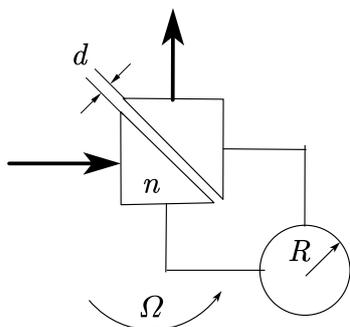


图 6.1

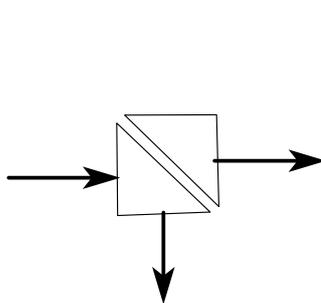


图 6.2

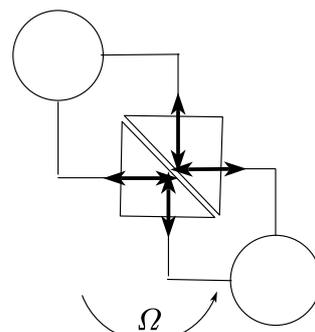


图 6.3

如图 6.1 所示为一个光纤陀螺仪的简化模型图。两块等大的等腰直角三棱镜折射率为 $n = 1.500$, 其斜面平行相对放置, 距离为 d 。折射率可以近似为 1 的、盘绕形成 N 匝半径为 R 的圆环的光纤和两个直角三棱镜的各一个直角边的中心相连。假设光纤可以将入射到界面上的所有光波导入光纤内。波长为 λ 的单色光从某一直角边中心入射, 出射光线从另一条直角边中心射出。假设图中所有其他长度量相比 NR 而言都可以忽略。整个系统在平面内相对静止参考系以角速度 Ω 转动。

(1) 如图 6.2 所示, 首先要精确选取距离 d 的值, 使得在没有光纤加入且没有旋转时, 透射光和反射光的强度相等。试求满足要求的 d 的值, 用 λ 表示。在之后的问题中, 假设 d 总是取为这个数值。

(2) 接下来, 加入光纤, 并让体系以极小的角速度 Ω 旋转, 注意虽然 NR 非常大, 但是由于 Ω 很小, 因此产生的光程差为波长的量级。

(2.1) 在牛顿力学的框架下, 试推导沿角速度同向通过光纤和沿角速度反向通过光纤的两束光线的光程差 Δ , 用 Ω, N, R 等表示。

(2.2) 接下来, 考虑两束光线的干涉, 试推导出射光强的相对值 $I(\Delta)$, 它被定义为角速度为 Ω 时的光强和角速度为 0 时的光强之比。在本小问中, 假设由于制作工艺不精, d 的数值比第 (1) 问中结果大了 0.001λ 。

(3) 如图 6.3 所示, 我们还可以考虑光线在双光纤系统内形成谐振的可能性。两个完全相同, 参数如前所述的光纤分别连接在两个侧边上, 使得在没有任何外部持续输入的情况下光学系统内部可以形成稳定的光场分布。试由此导出角速度 Ω 满足的关系式。假设所有侧面的光波均可导入光纤中。

提示: 本题中光线的偏振方向垂直纸面, 这样的光线从折射率为 n_1 的介质中以入射角 θ_1 入射到折射率为 n_2 的介质中时, 折射角为 θ_2 , 振幅的反射、透射率分别为

$$r = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}, t = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (6.1)$$

上式中, 我们已约定复振幅中辐角相位为 $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ 。

参考解答:

(1) 反射光的相对振幅为

$$S = r + tr't'e^{i\delta} + tr'r'r't'e^{2i\delta} + \dots = r \frac{1 - e^{i\delta}}{1 - r^2 e^{i\delta}} \quad (1)$$

其中, 我们利用了斯托克斯倒逆关系 $r' = -r$, $tt' + r^2 = 1$ 。振幅反射率 r 为

$$r = \frac{n \cos \theta - i\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}{n \cos \theta + i\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}} = e^{-2i \arctan \frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}{n \cos \theta}} \equiv e^{-2i\delta_r} \quad (2)$$

其中 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 。而相位差现在成为一个虚数:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2d \cos \theta' = \frac{4\pi id}{\lambda} \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1} \equiv i\kappa \quad (3)$$

反射光强是反射振幅的模方, 代入化简得

$$I_r = \frac{\cosh \kappa - 1}{\cosh \kappa - \cos 4\delta_r} \quad (4)$$

利用半反半透的条件, 得 $\cosh \kappa + \cos 4\delta_r = 2$ 。最终代入得

$$d = \frac{\lambda}{4\pi\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}} \operatorname{arccosh} \left[2 - \cos \left(4 \arctan \frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}{n \cos \theta} \right) \right] = 0.2561\lambda \quad (5)$$

(2)

(2.1) 沿着角速度相同方向的光, 其相对速度为

$$v_+ = c - \Omega R \quad (6)$$

两束光传播所需时间差为

$$\Delta t = \frac{2\pi NR}{c - \Omega R} - \frac{2\pi NR}{c + \Omega R} \quad (7)$$

小量近似至首阶, 可得

$$\Delta = c\Delta t = \frac{4\pi N\Omega R^2}{c} \quad (8)$$

(2.2) 参加干涉的两束光, 其复振幅分别为

$$U_1 = S^2 e^{i\Delta}, \quad U_2 = T^2 \quad (9)$$

注意上式中的符号: 因为光程采用 e^{ikx} 约定下菲涅耳公式才是题目中给出的形式, 因此沿角速度方向传播的光线所行光程更长, 其相位应为正值。总光强可以表示为:

$$I' = |U_1 + U_2|^2 = \frac{(1 - e^{-\kappa})^4 + e^{-2\kappa}(2 - 2\cos 4\delta_r)^2 + e^{-\kappa}(1 - e^{-\kappa})^2 \cdot 4\cos \Delta (\cos 4\delta_r - 1)}{(1 + e^{-2\kappa} - 2e^{-\kappa} \cos 4\delta_r)^2} \quad (10)$$

但是实际上只有相对光强需要计算:

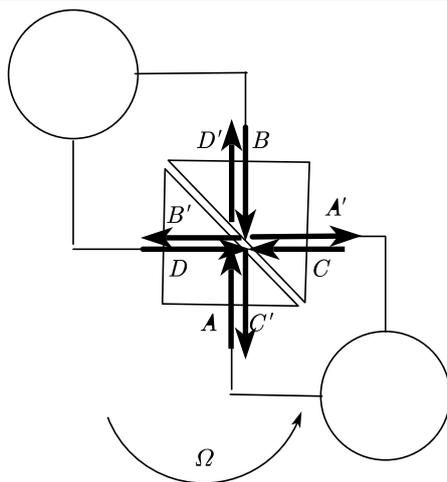
$$I(\Delta) = \frac{(1 - \cosh \kappa)^2 + (1 - \cos 4\delta_r)^2 + 2(1 - \cosh \kappa)(1 - \cos 4\delta_r) \cos \Delta}{(2 - \cosh \kappa - \cos 4\delta_r)^2} \quad (11)$$

这时可以注意到, 如果严格满足 (1) 中的条件, 相对光强将成为无穷大! 这是因为此时在 $\Delta = 0$ 时系统处于消光状态。(注意到入射光分成两束后从左侧出射的情况, 两束光都是经历了一次反射和一次透射, 所以相位一致, 相干相长。由能量守恒, 从上面出射的光一定是相干相消。) 利用题给条件数值计算, 可得

$$I(\Delta) = 1 + 26905(1 - \cos \Delta) \quad (12)$$

这就是光纤陀螺仪的测量精度非常高的原因。

(3) 在达成稳定谐振状态时, 空间的光场处处为常数, 同时应该满足各个光学仪器本身的边界条件。由此, 设出三棱镜斜边处的各个复振幅值如下图所示:



由此可以列出方程：

$$A = A'e^{-i\Delta/2}, \quad B = B'e^{-i\Delta/2}, \quad C = C'e^{i\Delta/2}, \quad D = D'e^{i\Delta/2} \quad (13)$$

$$A' = DT + BS, \quad B' = CT + AS, \quad C' = BT + DS, \quad D' = AT + CS \quad (14)$$

其中：振幅反射率已经求出为

$$S = \frac{1 - e^{-\kappa}}{1 - e^{-\kappa}e^{-4i\delta_r}} e^{-2i\delta_r} \quad (15)$$

而之前并没有计算的振幅透射率可由下式计算：

$$T = tt'e^{\frac{i\delta}{2}} + trrt'e^{i\frac{3\delta}{2}} + \dots = e^{\frac{i\delta}{2}} \frac{1 - r^2}{1 - r^2e^{i\delta}} \quad (16)$$

代入先前计算结果可得

$$T = \frac{1 - e^{-4i\delta_r}}{1 - e^{-\kappa}e^{-4i\delta_r}} e^{-\frac{\kappa}{2}} \quad (17)$$

上述齐次方程组有解的条件，可以计算得为

$$\cos \Delta = \frac{(S^2 - T^2)^2 - 2T^2 + 1}{2S^2} \quad (18)$$

代入，恰好有

$$\cos \Delta = \cos 4\delta_r \quad (19)$$

因此可以得到

$$\Omega = \pm \frac{c}{NR^2} (n + 0.1024), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (20)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 12 分：(1) (2) (3) 式各 2 分，(4) (5) 式各 3 分；

(注：(1) 式如果把 r 换为 r' 、 r' 换为 r ，导致最后 S 的表达式相差一个符号，不扣分)

第 (2) 问 16 分：

第 (2.1) 小问 5 分：(6) 式 1 分，(7) (8) 式 2 分；

第 (2.2) 小问 11 分：(9) 式 2 分，(10) (11) (12) 式各 3 分；

(注：(9) 式写错相位差正负号不得分)

第 (3) 问 12 分：(13) (14) (15) 式 1 分，(17) (18) (19) 式 2 分，(20) 式 3 分。

七、(50 分) 原子链 Casimir 效应

众所周知，Casimir 效应给出了量子化谐振子非零基态能量的可观测量物理学效应。传统的 (一维) Casimir 效应是通过考虑两个相隔一定距离 d 的无穷大平行导体平板之间的模式求

和来体现的, 这涉及到一个著名的“求和” $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$ 。量子场论研究者面对这样的求和会使用类似 $n \rightarrow ne^{-an}$ 的“正规化核函数”首先获得一个封闭的结果, 再利用级数展开的方式使主导发散的项在物理上被消除, 并且获得有限的结果。上述结果事实上也可以用所谓 Euler-Maclaurin 求和公式严格化到一般的正规化核函数: 无论截断函数是何种形式, 只要满足少数相当一般化且自然的假定, 就可以获得相同的结果。

然而, 一个显著的问题是, 无论是直接地选取某个特定的函数正规化还是使用 Euler-Maclaurin 求和公式进行计算, 都不可避免地面临过度数学化导致的直观性丢失 (虽然对于某些正规化核函数, 物理意义的解释是可以做到的)。为了更“物理”地求解 Casimir 效应, 本题我们来考虑一维原子链体系的真空能, 并且直观地得到 Casimir 力的准确表达式。虽然这个结果对应的是声波一维的 Casimir 效应, 但由于声波与光波都满足线性波动方程, 这个结果应当是普遍的, 只要将声速换为光速就足够了。为了数学上的简单, 本题仅考虑一维的情况。

(1) Part I: 原始 Casimir 效应

我们首先考虑原始的一维 Casimir 效应。在这里, 你可以承认“求和公式”

$$1 + 2 + 3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12} \quad (7.1)$$

的合理性并直接使用它, 并且量子力学告诉我们, 单个角频率为 ω 谐振子的能级公式是

$$\epsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (7.2)$$

其中 n 为非负整数, 每个能级 ϵ_n 上有且仅有一个量子态。

(1.1) 考虑相距为 d 的无穷大平行导体平板, 我们可以用单色平面波的形式来求解对应的本征模式。将单色平面波解代入波动方程

$$\begin{aligned} c^2 \nabla^2 \phi(x, t) - \partial_t^2 \phi(x, t) &= 0 \\ c^2 \nabla^2 \mathbf{A}(x, t) - \partial_t^2 \mathbf{A}(x, t) &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

上式中, 简记 $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, 其中势满足 Lorentz 规范

$$\partial_t \phi + c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (7.4)$$

求出我们的一维问题中, 波矢大小 $|\mathbf{k}| = k$ 和角频率 ω 之间的关系 $\omega = \omega(k)$, 并且论证每一个角频率 ω 对应的振荡都可以视为简谐振动——也就是说, 我们可以在某种意义下将电磁场视为一系列独立的简谐振子的叠加。

(1.2) 电磁学告诉我们, 对于理想导体, 电场与磁场以驻波的形式在其中振荡。利用这一条件, 求解可能的波矢大小。允许引入一个待定的整数 n 以表示不同的波矢。

(1.3) 利用谐振子的能级公式, 计算体系的基态能量, 进而计算两板之间的相互作用力 F_{Cas} 。这个力是吸引力还是排斥力?

(2) Part II: 原子链 Casimir 效应

考虑一维原子链: 体系中有 N 个原子, 所有原子质量均为 m , 相邻两原子之间用原长为 a , 劲度系数为 K 的弹簧连接, 第一个球与最后一个球通过弹簧与固定的墙壁连接。静止时所有弹簧处于原长且所有原子处于一条直线上。约束所有原子只能在弹簧方向作一维振动。

(2.1) 我们先只考虑原子链中那些不位于边缘原子的行为。同样假设行波解 $A \cos(\omega t - kal)$ 与 $B \sin(\omega t - kal)$ 及其线性组合可以在原子链中传播 (其中 l 是原子编号), 求角频率 ω 和波矢 k 之间的关系。

(2.2) 现在考虑处于边缘的原子运动对振动的贡献:

(a) 由此计算可能的波矢 k (同样, 允许引入一个待定的整数 n 以表示不同的波矢), 并且说明, 当 N 很大时 (一般的原子链显然如此), 上述关系将退回到 (1.2) 中得到的关系, 其中

$$d = a(N + 2) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} aN.$$

(b) 对于特定的角频率 ω , 求出第 l 号原子的位移 $x_l(t)$, 说明它做的确实是角频率为 ω 的简谐振动。要求只保留两个由初始条件确定的常数, 并请简单分析它们的物理意义。

(2.3) 计算基态能量 E 的表达式, 并在 $N \gg 1$ 情况下展开。如果你的计算正确, 在认为 N 很大的时候, 基态总能量应该有形式 $E = (AN + C) + \Gamma/N + \mathcal{O}(N^{-2})$ 的形式。第一项是一个常数的衬底, 可以通过特定的安排或者平移能量密度来消除。因此, 第二项 Γ/N 给出了我们真正的真空能量。请计算 Γ 的值, 并求出相应的 Casimir 力。在计算中, 你可以利用如下的求和公式:

$$\sum_{n=1}^N \sin \left[\frac{\pi n}{2(N+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[-1 + \cot \left(\frac{\pi}{4 + 4N} \right) \right] \quad (7.5)$$

参考解答:

(1) (1.1) 事实上, 电势与磁矢势满足的方程均为著名的线性波动方程。在这个问题中, 我们可以将行波解

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (1)$$

带入上述波动方程, 能得到色散关系为

$$\omega = ck \quad (2)$$

有诸多手段可以论证上述自由电磁场能量对应着一系列简谐振子的叠加。一种计算量比较小的方法是, 我们考虑的波动方程解可以理解为两个方向行波的叠加, 即

$$u(x, t) = \sum_k [q_k(t)e^{ikx} + \bar{q}_k(t)e^{-ikx}] \quad (2')$$

其中 $q_k(t)$ 可以被理解为方程

$$\ddot{q}_k(t) + k^2 c^2 q_k(t) = 0 \quad (3)$$

的解, 而 e^{ikx} 在对全空间积分时可以被看作是正交的, 即

$$\int_0^L dx e^{i(k-k')x} = L \delta_{k,k'} \quad (4)$$

故在将能量密度对全空间积分得到总能量时, 有贡献的部分仅有求和

$$\sum_k (|\dot{q}_k|^2 + c^2 k^2 |q_k|^2) \quad (5)$$

以及一些不贡献动力学的模式。取出 q_k 的实部 q_k^r 与虚部 q_k^i , 这给出求和

$$\sum_k [(\dot{q}_k^r)^2 + c^2 k^2 (q_k^r)^2] + (r \leftrightarrow i) \quad (6)$$

这表明, 体系的能量可以看作一系列简谐振子能量的叠加。

(1.2) 利用驻波条件容易得到

$$k_n = \frac{\pi}{d} n \quad (7)$$

其中 $n \in \mathbb{Z}$;

(1.3) 同时引用上文驻波公式与谐振子零点能公式, 我们得到基态能量

$$E_g = \frac{1}{2} \hbar c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{d} n \quad (8)$$

引用上文提供的求和公式, 我们给出基态能量的表达式

$$E_g \equiv -\frac{\pi\hbar c}{24d} \quad (9)$$

求导出真空贡献的相互作用能量

$$F_{\text{Cas}} = -\frac{\pi\hbar c}{24d^2} \quad (10)$$

这就是所谓的 (1+1 维) Casimir 力。这是一个吸引力, 表明真空中两个不带电的平行板电容器之间仍然会产生与引力无关的吸引相互作用;

(2)

(2.1) 设第 l 号原子的位移为 $u_l(t)$, 牛顿运动定理可以给出运动方程

$$\ddot{u}_l + \omega_0^2(2u_l - u_{l+1} - u_{l-1}) = 0 \quad (11)$$

上述运动方程同样可以带入行波解得到色散关系, 经过计算得到

$$\omega(k) = 2\omega_0 \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \quad (12)$$

由于对于任意的 l 都有 $e^{ikal} \equiv e^{i(k+2m\frac{\pi}{a})al}$, 为了唯一确定波动模式, 只要让 k 取遍 $0 \sim \frac{2\pi}{a}$ 的范围就足够了。例如, 我们可以要求 $k \in (0, \frac{2\pi}{a}]$, 这样 $\sin \frac{ka}{2} \geq 0$ 。

(2.2)

(a) 为了计算边缘原子对体系的贡献, 我们考虑 $l=1$ 与 $l=N$ 两个原子满足的方程

$$\ddot{u}_1 + \omega_0^2(2u_1 - u_2) = 0 \quad (13)$$

$$\ddot{u}_N + \omega_0^2(2u_N - u_{N-1}) = 0 \quad (14)$$

对行波解的约束。为此, 考虑 $l=2$ 与 $l=N-1$ 两个原子满足的运动方程

$$\ddot{u}_2 + \omega_0^2(2u_2 - u_3 - u_1) = 0 \quad (15)$$

$$\ddot{u}_{N-1} + \omega_0^2(2u_{N-1} - u_N - u_{N-2}) = 0 \quad (16)$$

这表明边缘两个原子遵循与不处于边缘原子相同的运动规律。因此, 在形式上我们可以写下方程

$$\ddot{u}_1 + \omega_0^2(2u_1 - u_2 - u_0) = 0 \quad (17)$$

$$\ddot{u}_N + \omega_0^2(2u_N - u_{N+1} - u_{N-1}) = 0 \quad (18)$$

其中固定边界条件在此处就等价于

$$u_{N+1} = u_0 \equiv 0 \quad (19)$$

带入行波解 $Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{i(-kx-\omega t)}$ 得到本征方程

$$A + B = 0 \quad (20)$$

$$Ae^{i(N+1)ka} + Be^{-i(N+1)ka} = 0 \quad (21)$$

非平凡解 $A, B \neq 0$ 对应着波动的情况, 这样给出结果为 $2(N+1)ka = 2\pi n$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$ 。遵循上一问的论证, 应当选取 $n \in (0, N]$ 以保证不重复。综上所述我们得到

$$ka = \frac{\pi n}{N+1} \quad (22)$$

其中 $n = 1, 2, \dots, N$; 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 有 $aN \rightarrow d$, 进而给出本征模式

$$k \xrightarrow{aN \rightarrow d} \frac{\pi n}{d} \quad (23)$$

(b) 根据上述边界条件对应的方程, 相应的波动模式可以写为

$$u_l(t) = \sum_{n=1}^N A_n \sin\left(\frac{\pi n}{N+1}l\right) e^{-i\omega_n t} \quad (24)$$

其中

$$\omega_n = 2\omega_0 \left| \sin \left[\frac{\pi n}{2(N+1)} \right] \right| \quad (25)$$

或者写成基本的三角震荡形式

$$u_l(t) = \sum_{n=1}^N (a_n \sin \omega_n t + b_n \cos \omega_n t) \sin \left(\frac{\pi n}{N+1} l \right) \quad (24')$$

这仅仅包含 $2N$ 个决定于初值条件的参量，符合牛顿决定性原理的要求。所以，我们可以认为这个体系被我们完全理解了，并且每个本征模式都确实是简谐振动式的振荡。因此，我们可以认为上述定义的波动模式对应着一系列的谐振子，体系的能量表现为一系列具有 $\omega(k)$ 的简谐振子能量的叠加。

(2.3) 同理，我们考虑基态能量

$$E_g = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^N 2\omega_0 \cdot \sin \left[\frac{\pi n}{2(N+1)} \right] \quad (26)$$

上述求和可以使用裂项相消或者欧拉公式等比数列求和的方式计算，结果是

$$E_g = \frac{\hbar\omega_0}{2} \left[\cot \left(\frac{\pi}{4+4N} \right) - 1 \right] \quad (27)$$

利用泰勒展开公式 $\cot x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x + \mathcal{O}(x^2)$ ，取 $N \rightarrow \infty$ 极限得到

$$E_g = \frac{2\hbar\omega_0}{\pi} N + \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) - \frac{\hbar\omega_0\pi}{24N} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N^2} \right) = (\Delta N + C) + \frac{\Gamma}{N} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N^2} \right) \quad (28)$$

因此

$$\Gamma = -\frac{\hbar\omega_0\pi}{24} \quad (29)$$

根据题意，第一项是无关紧要的。现在来关注后面的项。

在从微观理论向宏观理论的过渡中，我们应该保持波动方程宏观参量——即波速 v ——的不变性，这样事实上表明 $\omega_0 a = v$ 在取 $N \rightarrow \infty$ 的极限下应当不发生改变；同时，根据体系的几何构型， $Na = d$ 在这一极限下应当不发生改变（这个极限在物理上通常被称为“热力学极限”）。因此，对 $\frac{1}{N^n}$ ($n \geq 2$) 阶的基态能量展开上下同乘 a^n ，这时该项将正比于 $\frac{v}{a^n} a^{n-1}$ ，在 $N \rightarrow \infty$ 的极限下收敛到 0，进而没有贡献，只留下 $n = 1$ 的项。（注：论证过程不计分）

因此，有意义的基态能量为

$$E_g^{\text{eff}} = -\frac{\hbar\omega_0 a \pi}{24d} \quad (30)$$

相应求得 Casimir 力

$$F_{\text{Cas}} = -\frac{\hbar\omega_0 a \pi}{24d^2} \equiv -\frac{\pi \hbar v}{24d^2} \quad (31)$$

其中 $v = \omega_0 a$ 为波速。与 (10) 式对比即知二者形式完全一致。

评分标准：本题满分 50 分。

第 (1) 问 20 分：

第 (1.1) 小问 10 分：(2) (6) 式各 3 分，论证共 4 分：各个模式均为简谐振动 2 分，不同模式之间不存在耦合 2 分；

第 (1.2) 小问 3 分：(7) 式 3 分；

第 (1.3) 小问 7 分：(8) (9) 式各 2 分，(10) 式 3 分；

第 (2) 问 30 分：

第 (2.1) 小问 4 分: (11) (12) 式各 2 分;

第 (2.2) 小问 15 分: (13) (14) (19) 式各 1 分, (20) (21) 式各 2 分, (22) 式 3 分, (23) 式 1 分, (24) 【或 (24') 式】 (25) 式各 2 分;

第 (2.3) 小问 11 分: (26) 式 2 分, (27) (28) (31) 式各 3 分。

【补充讨论】

1、本题计算本征模式与本征频率有一种标准方法, 即对角化刚度系数矩阵 (本题惯性系数矩阵正比于单位矩阵, 是平凡的)。若按本方法求解, 也可以相应给分。

2、之所以说正比于尺寸的项不重要, 是因为在引力没有参与动力学过程的情况下, 一个 (在实空间中的) 局域理论的动力学方程仅仅只和能量密度的坐标/坐标导数有关系, 能量密度的绝对大小不重要。由于谐振子本征态在场构型里局域在动量表象, 在实空间中非局域, 改变其能量零点违背了理论局域性的要求, 在物理上不被允许, 因此零点能本身是不可消除的。

版权信息

命题人

田向晨 孙榕希 张健明 肖慎兴 杨帆 赵瀚宏 向昕宇

审题人

杨岱旭 肖慎兴 王泽华 龚俊安 吴翔宇 熊程宇 孙浩晰 傅知远 孙榕希

联系方式



微信公众号
CPHOS



官方网站
www.cphos.cn



CPHOS 论坛

邮箱

service@cphos.cn

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考