

# 第 21 届 CPHOS 物理竞赛联考

## 理论试题

本试题于 2024 年 7 月 25 日 21:00 发布, 最后更新于 2024 年 7 月 25 日 20:55。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试, 有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名, 报名后方可参与联考。联系方式见试题末尾。

本次考试 CPHOS 不组织阅卷, 请各位教练、同学自行阅卷。考试反馈可以通过扫描参考答案中的二维码填写。

### 考生须知

1. 理论试题共 5 页, 理论答题卡共 8 页, 答题时间 180 分钟, 试题满分 320 分。
2. 请在答题卡的指定答题区域内答题, 试题和草稿纸上的内容将不会作为评分参考, 不可申请答题卡加页。
3. 若发现试题存在问题, 请向领队(教练)反映, 由其转达至相关微信群聊。
4. 试题答案及相关分析均会在官方网站 [www.cphos.cn](http://www.cphos.cn) 上发布。

### 一、(40 分) 挂在桌子边缘的衣服

什么时候衣服能挂在桌子的边缘? 为回答这个问题, 考虑如下简化模型。

$A, B$  是两个质量均为  $m$  的质点, 它们之间用一根长为  $L$ 、质量可忽略不计、不可伸长的绳连接, 如图 1.1 所示。它们被放置于顶角为  $\alpha$  的光滑水平桌面上, 桌面的边缘也是光滑的(边缘只能提供垂直于桌面边缘的约束力)。重力加速度大小为  $g$ 。

(1) 作为进一步的简化, 考虑此系统的一种特殊的运动方式, 此运动方式满足:

- a. 初始时  $A, B$  两质点都在桌面边缘处静止, 即将下落, 且  $AO = BO$ , 其中  $O$  是桌子的顶点;
- b.  $A, B$  两质点的运动关于过桌角对角线的竖直平面是对称的;
- c.  $A, B$  两质点运动时无“摆动”, 即  $A, B$  都做直线运动。

(1.1) 求绳段  $AA'$  与竖直方向的夹角  $\beta$ 。 $A'$  是这样一个空间点:  $A'$  保持为绳与靠近  $A$  点一侧桌边缘的接触点。

(1.2) 求  $P$  点的加速度。 $P$  是这样一点:  $P$  保持为绳与桌角对角线的交点。

(2) 为使衣服能挂在桌面边缘, 一种可行的方案是使桌面倾斜。仍然采用上述模型, 但桌子有倾斜, 桌子法线方向、挂绳和质点的桌角对角线方向在同一竖直平面内, 如图 1.2 所示。求能使系统平衡的桌角对角线与水平方向的夹角  $\theta$ , 用  $\alpha$  表示。

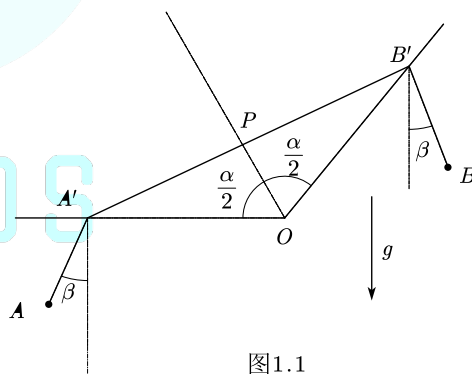


图 1.1

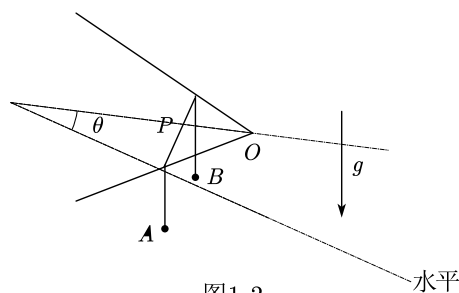


图 1.2

## 二、(40 分) 把皮球踢上台阶

一个有意思的课间活动是把皮球踢上台阶，我们来建立模型分析这个问题。在本题中，皮球可视作一个质量为 $m$ 、半径为 $R$ 的匀质薄球壳，台阶高度也为 $R$ 。重力加速度为 $g$ 。

(1) 如图2.1所示，踢皮球的腿被模型化为一根始终与球有相对滑动（在接触点处腿相对于球向上滑动）的竖直圆柱，它与球之间的滑动摩擦因数为 $\mu$ ，对球的推力为水平恒力 $F$ 。全过程中，球受到的腿对它的作用力的作用点始终在球的最右端，即与球心等高处。本小问中，皮球与台阶之间始终无相对滑动，二者之间的滚动摩擦也可忽略。初始时，皮球静止在地面上，试求为将这个球滚上这级台阶并且保证它不与台阶脱离，推力 $F$ 应该满足的条件，并给出为使上述 $F$ 有解， $\mu$ 应当满足的条件。不考虑球与别的台阶发生碰撞的情况。

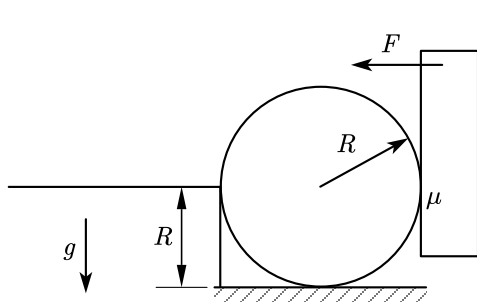


图2.1

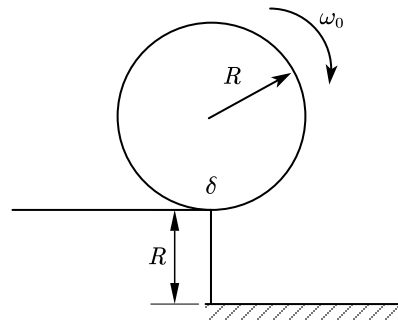


图2.2

(2) 有时，皮球在滚上去之后会因别人捣乱而滚下来。为简单起见，我们把别人的捣乱看作施加给球一个瞬时冲量，使之获得 $\omega_0$ 的初角速度。本小问中，认为台阶足够粗糙，台阶与球之间的滚动摩擦系数为 $\delta$ ，当支持力大小为 $N$ 时，滚动摩擦力矩 $\tau = \delta \cdot N$ 。如图2.2所示，初始时球心位于台阶边沿的正上方。若球心与台阶边沿的连线与竖直方向夹角为 $\phi_0$ 时，该皮球与台阶发生脱离，试求解 $\omega_0$ 的表达式，并给出 $\phi_0 = \pi/6$ 、 $\delta = 0.1R$ 时的数值结果，系数保留3位有效数字。同样，不考虑球在此之前就与台阶脱离或发生碰撞的情况。

## 三、(60 分) 带电粒子的相对论性运动

在惯性系 $K$ 中，以速度 $v$ 沿 $+x$ 方向运动的粒子1带有电量 $q > 0$ ，以速度 $v'$ 沿 $+y$ 方向运动的粒子2具有电量 $q' > 0$ 。它们在原点处发生碰撞生成一个新的粒子3。考虑相对论效应，真空光速为 $c$ 、真空介电常量为 $\epsilon_0$ 。

(1) 在碰撞前的瞬间，存在以速度 $\vec{v}_0$ 相对于 $K$ 参考系运动的 $K'$ 系，使得 $K'$ 中观测到 $K$ 中点 $(x, y, z)$ 处的磁感应强度为零。试求满足该条件所有可能的 $\vec{v}_0$ ，用分量 $(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$ 表示。本小问中，为了简化答案，你可以使用如下参数：

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}; \lambda = \frac{\gamma' q'}{\gamma q} \left( \frac{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + \gamma'^2 y^2 + z^2} \right)^{\frac{3}{2}}; K = \frac{\gamma q}{4\pi\epsilon_0 (\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.1)$$

(2) 在粒子速度均为低速情况下，若要求 $K'$ 中处处磁感应强度为零，求出 $\vec{v}_0$ 的近似值。

(3) 求新粒子3可能的最小速度大小，以及此时粒子1和2的静质量之比 $k = \frac{m_2}{m_1}$ 。

(4) 在(3)的条件下，求解碰撞后瞬间磁感线的参数方程。

提示：在以速度 $\vec{v}$ 相对于 $S$ 参考系运动的惯性系 $S'$ 中，电场和磁场平行于 $\vec{v}$ 的方向分量不变，而垂直于 $\vec{v}$ 的分量变化为

$$\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.2)$$

#### 四、(50 分) 圆偏振光的角动量

真空中有一束沿 $+z$ 方向传播的圆偏振光 $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\hat{x} + E_0 \sin(\omega t - kz)\hat{y}$ 。从量子的角度来看, 圆偏振光是由光子组成的, 这些光子拥有非零的自旋角动量。已知真空中电磁场的能量密度为 $w = \frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$ , 自旋角动量密度为 $\vec{s} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{A}$ , 其中 $\vec{A}$ 为磁矢势。只

考虑时间振荡的磁矢势项时, 对于单色平面电磁波有 $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 。

(1) 求这束圆偏振光的光强 $I$  (单位时间内通过单位面积的能量) 与空间中的角动量密度 $\vec{s}$ 。

(2) 量子化后, 圆偏振光中单光子能量 $E = \hbar\omega$ 。利用(1)中求解的结果, 求出单个光子的角动量 $\vec{L}_\gamma$ 。

(3) 让这束光垂直入射一个厚度为 $d$ 、横截面积为 $S$ 的波晶片, 此波晶片 $x, y$ 方向的线偏振光的折射率分别为 $n_o, n_e$ 。此时, 光子的角动量不再是沿着某一固定方向的本征态, 而是处于两个自旋相反方向的叠加态。求出单光子角动量的期望值 $\langle \vec{L}_\gamma \rangle$ , 并求解固定住此波晶片所需的力矩大小。本小问中不考虑光的吸收与反射, 即只需要考虑通过波晶片后相位的变化。

(4) 旋光晶体对于左旋与右旋偏振光有着不同的折射率。现有一块厚度为 $d'$ 的旋光晶体, 对于该波矢大小为 $k$ 的光线, 左旋与右旋的折射率分别为 $n_+$ 与 $n_-$ 。让第(3)问中出射的光继而垂直入射这一旋光晶体, 之后再通过一偏振片使其变为 $x$ 方向的线偏振光。求出射后的光子数密度 $\rho''$ 与单一光子角动量的期望值 $\langle \vec{L}_\gamma \rangle$ 。本小问中同样不考虑光的吸收与反射。

#### 五、(40 分) 范德瓦尔斯气体的临界点

众所周知, 范德瓦尔斯气体存在一个特殊的临界点, 在临界点附近, 范德瓦尔斯气体的相变为二级相变。二级相变存在一系列特征量 (被称作临界指数), 本题就来研究临界点附近相变的过程。

(1) 已知 1 mol 范德瓦尔斯气体的状态方程为

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \quad (5.1)$$

求该临界点的压强 $p_c$ 、摩尔体积 $v_c$ 和临界温度 $T_c$ 。

(2) 接下来, 我们考察临界点附近范德瓦尔斯气体的特性。

(2.1) 求临界点附近范德瓦尔斯气体的近似状态方程, 用 $\pi = \pi(\phi, \tau)$ 表示, 其中

$$\pi = \frac{p}{p_c} - 1, \quad \phi = \frac{v}{v_c} - 1, \quad \tau = \frac{T}{T_c} - 1 \quad (5.2)$$

代表无量纲化后对临界点压强、体积和温度, 要求 $\pi$ 精确至关于 $\phi$ 的三次项, 且每项系数保留到关于 $\tau$ 的最低阶项。

(2.2) 在温度比 $T_c$ 略小时, 气液共存的情况下, 气体和液体的密度差 $\Delta\rho \propto (-\tau)^\beta$ , 求临界指数 $\beta$ 。

(2.3) 在 $T = T_c$ 时, 压强随体积的变化满足 $\pi \propto \phi^\delta$ , 求临界指数 $\delta$ 。

(2.4) 在 $T > T_c$ ,  $v = v_c$ 时, 等温压缩率 $\kappa_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T$ 满足 $\kappa_T \propto \tau^{-\gamma}$ , 求临界指数 $\gamma$ 。

## 六、(40分) 光纤陀螺仪

光纤陀螺仪是一种检测物体转动的光学仪器，因为具有寿命长、启动迅速等优点，它近年来正在逐步取代机械陀螺仪的地位。它的主要原理是，当光学环路转动时，在不同行进方向上光线的光程相对静止状态都会有变化，因此可以通过干涉条纹的变化来测量光路的旋转角速度。

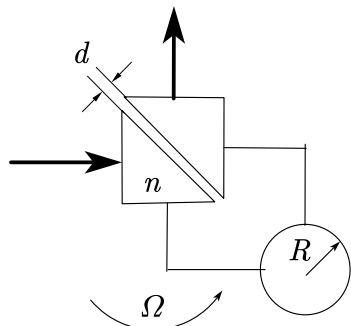


图6.1

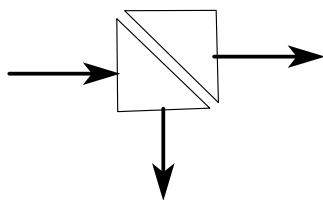


图6.2

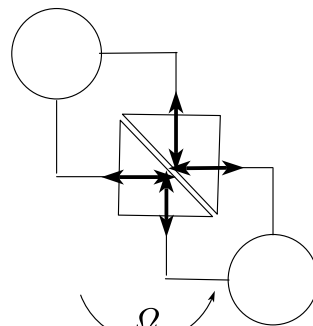


图6.3

如图6.1所示为一个光纤陀螺仪的简化模型图。两块等大的等腰直角三棱镜折射率为 $n = 1.500$ ，其斜面平行相对放置，距离为 $d$ 。折射率可以近似为1的、盘绕形成 $N$ 匝半径为 $R$ 的圆环的光纤和两个直角三棱镜的各一个直角边的中心相连。假设光纤可以将入射到界面上的所有光波导入光纤内。波长为 $\lambda$ 的单色光从某一直角边中心入射，出射光线从另一条直角边中心射出。假设图中所有其他长度量相比 $NR$ 而言都可以忽略。整个系统在平面内相对静止参考系以角速度 $\Omega$ 转动。

(1) 如图6.2所示，首先要精确选取距离 $d$ 的值，使得在没有光纤加入且没有旋转时，透射光和反射光的强度相等。试求满足要求的 $d$ 的值，用 $\lambda$ 表示。在之后的问题中，假设 $d$ 总是取为这个数值。

(2) 接下来，加入光纤，并让体系以极小的角速度 $\Omega$ 旋转，注意虽然 $NR$ 非常大，但是由于 $\Omega$ 很小，因此产生的光程差为波长的量级。

(2.1) 在牛顿力学的框架下，试推导沿角速度同向通过光纤和沿角速度反向通过光纤的两束光线的光程差 $\Delta$ ，用 $\Omega, N, R$ 等表示。

(2.2) 接下来，考虑两束光线的干涉，试推导出射光强的相对值 $I(\Delta)$ ，它被定义为角速度为 $\Omega$ 时的光强和角速度为0时的光强之比。在本小问中，假设由于制作工艺不精， $d$ 的数值比第(1)问中结果大了 $0.001\lambda$ 。

(3) 如图6.3所示，我们还可以考虑光线在双光纤系统内形成谐振的可能性。两个完全相同，参数如前所述的光纤分别连接在两个侧边上，使得在没有任何外部持续输入的情况下光学系统内部可以形成稳定的光场分布。试由此导出角速度 $\Omega$ 满足的关系式。假设所有侧面的光波均可导入光纤中。

提示：本题中光线的偏振方向垂直纸面，这样的光线从折射率为 $n_1$ 的介质中以入射角 $\theta_1$ 入射到折射率为 $n_2$ 的介质中时，折射角为 $\theta_2$ ，振幅的反射、透射率分别为

$$r = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}, t = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (6.1)$$

上式中，我们已约定复振幅中辐角相位为 $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ 。

## 七、(50 分) 原子链 Casimir 效应

众所周知, Casimir 效应给出了量子化谐振子非零基态能量的可观测物理学效应。传统的(一维)Casimir 效应是通过考虑两个相隔一定距离 $d$ 的无穷大平行导体平板之间的模式求和来体现的, 这涉及到一个著名的“求和” $1 + 2 + 3 + \dots = -\frac{1}{12}$ 。量子场论研究者面对这样的求和会使用类似 $n \rightarrow ne^{-an}$ 的“正规化核函数”首先获得一个封闭的结果, 再利用级数展开的方式使主导发散的项在物理上被消除, 并且获得有限的结果。上述结果事实上也可以用所谓 Euler-Maclaurin 求和公式严格化到一般的正规化核函数: 无论截断函数是何种形式, 只要满足少数相当一般化且自然的假定, 就可以获得相同的结果。

然而, 一个显著的问题是, 无论是直接地选取某个特定的函数正规化还是使用 Euler-Maclaurin 求和公式进行计算, 都不可避免地面临过度数学化导致的直观性丢失(虽然对于某些正规化核函数, 物理意义的解释是可以做到的)。为了更“物理”地求解 Casimir 效应, 本题我们来考虑一维原子链体系的真真空能, 并且直观地得到 Casimir 力的准确表达式。虽然这个结果对应的是声波一维的 Casimir 效应, 但由于声波与光波都满足线性波动方程, 这个结果应当是普遍的, 只要将声速换为光速就足够了。为了数学上的简单, 本题仅考虑一维的情况。

## (1) Part I: 原始 Casimir 效应

我们首先考虑原始的一维 Casimir 效应。在这里, 你可以承认“求和公式”

$$1 + 2 + 3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12} \quad (7.1)$$

的合理性并直接使用它, 并且量子力学告诉我们, 单个角频率为 $\omega$ 谐振子的能级公式是

$$\epsilon_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (7.2)$$

其中 $n$ 为非负整数, 每个能级 $\epsilon_n$ 上有且仅有一个量子态。

(1.1) 考虑相距为 $d$ 的无穷大平行导体平板, 我们可以用单色平面波的形式来求解对应的本征模式。将单色平面波解代入波动方程

$$\begin{aligned} c^2 \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 \phi(\mathbf{x}, t) &= 0 \\ c^2 \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

上式中, 简记 $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ ,  $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ , 其中势满足 Lorentz 规范

$$\partial_t \phi + c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (7.4)$$

求出我们的一维问题中, 波矢大小 $|\mathbf{k}| = k$ 和角频率 $\omega$ 之间的关系 $\omega = \omega(k)$ , 并且论证每一个角频率 $\omega$ 对应的振荡都可以视为简谐振动——也就是说, 我们可以在某种意义下将电磁场视为一系列独立的简谐振子的叠加。

(1.2) 电磁学告诉我们, 对于理想导体, 电场与磁场以驻波的形式在其中振荡。利用这一条件, 求解可能的波矢大小。允许引入一个待定的整数 $n$ 以表示不同的波矢。

(1.3) 利用谐振子的能级公式, 计算体系的基态能量, 进而计算两板之间的相互作用力 $F_{\text{Cas}}$ 。这个力是吸引力还是排斥力?

## (2) Part II: 原子链 Casimir 效应

考虑一维原子链: 体系中有 $N$ 个原子, 所有原子质量均为 $m$ , 相邻两原子之间用原长为 $a$ , 劲度系数为 $K$ 的弹簧连接, 第一个球与最后一个球通过弹簧与固定的墙壁连接。静止时所有弹簧处于原长且所有原子处于一条直线上。约束所有原子只能在弹簧方向作一维振动。

(2.1) 我们先只考虑原子链中那些不位于边缘原子的行为。同样假设行波解 $A \cos(\omega t - kal)$ 与 $B \sin(\omega t - kal)$ 及其线性组合可以在原子链中传播(其中 $l$ 是原子编号), 求角频率 $\omega$ 和波矢 $k$ 之间的关系。



(2.2) 现在考虑处于边缘的原子运动对振动的贡献:

(a) 由此计算可能的波矢  $k$  (同样, 允许引入一个待定的整数  $n$  以表示不同的波矢), 并且说明, 当  $N$  很大时 (一般的原子链显然如此), 上述关系将退回到 (1.2) 中得到的关系, 其中

$$d = a(N + 2) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} aN.$$

(b) 对于特定的角频率  $\omega$ , 求出第  $l$  号原子的位移  $x_l(t)$ , 说明它做的确实是角频率为  $\omega$  的简谐振动。要求只保留两个由初始条件确定的常数, 并请简单分析它们的物理意义。

(2.3) 计算基态能量  $E$  的表达式, 并在  $N \gg 1$  情况下展开。如果你的计算正确, 在认为  $N$  很大的时候, 基态总能量应该有形式  $E = (\Delta N + C) + \Gamma/N + \mathcal{O}(N^{-2})$  的形式。第一项是一个常数的衬底, 可以通过特定的安排或者平移能量密度来消除。因此, 第二项  $\Gamma/N$  给出了我们真正的真空能量。请计算  $\Gamma$  的值, 并求出相应的 Casimir 力。在计算中, 你可以利用如下的求和公式:

$$\sum_{n=1}^N \sin \left[ \frac{\pi n}{2(N+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[ -1 + \cot \left( \frac{\pi}{4 + 4N} \right) \right] \quad (7.5)$$

### 版权信息

#### 命题人

田向晨 孙榕希 张健明 肖慎兴 杨帆 赵瀚宏 向昕宇

#### 审题人

杨岱旭 肖慎兴 王泽华 龚俊安 吴翔宇 熊程宇 孙浩晰 傅知远 孙榕希

### 联系方式



微信公众号  
CPHOS



官方网站  
[www.cphos.cn](http://www.cphos.cn)



CPHOS 论坛

邮箱

[service@cphos.cn](mailto:service@cphos.cn)

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考