第 22 届 CPHOS 物理竞赛联考

理论试题

本文件于 2024 年 8 月 27 日 9: 00 首次发布，最后更新于 2024 年 8 月 22 日 17: 35 。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见文件末尾。

考生须知

1. 理论试题共 **7** 页，理论答题卡共 **8** 页，答题时间 **180** 分钟，试题满分 **320** 分。
2. 请在答题卡的指定答题区域内答题，试题和草稿纸上的内容将不会作为评分参考，不可申请答题卡加页。
3. 若发现试题存在问题，请向领队（教练）反映，由其转达至相关微信群聊。
4. 试题答案及相关分析均会在官方网站 www.cphos.cn 上发布。
5. 本次考试定位难度为略高于决赛，请考生合理分配时间精力。

一、刚体（40 分）

有一个质量m、半径R的匀质半圆盘。如图1.1，将其切下一个半径$\frac{1}{2}R$的半圆拼在另一边。将其竖直放置于完全粗糙的水平面上。刚体的上表面光滑无摩擦。

（1）如图1.2，在该刚体的上表面放置一个质量为αm的小球（大小可略）。以如图两角度为坐标，求该系统可能的平衡位置，并利用计算说明该平衡是否稳定。

（2）令$\alpha=\frac{1}{2}$。对该系统施加一微扰，其运动可分解为数个简谐振动的叠加。求这几个简谐运动的角频率。

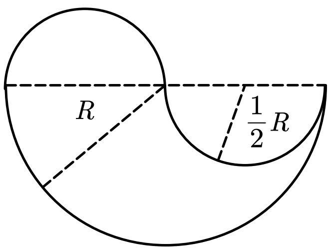

图1.1

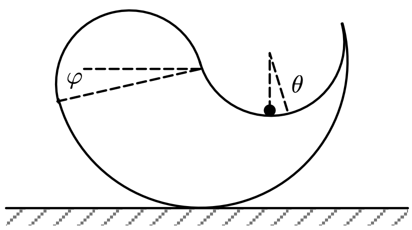

图1.2

二、台球（40 分）

台球是一项非常受欢迎的运动，而物理学知识能帮助我们更好地理解这项运动的底层原理。我们采用相对简单的模型：台球视为质量为m，半径为R的匀质刚性球体。

（1）如图2.1建立坐标系，z轴竖直向上，y轴由右手螺旋确定。现沿y轴正方向，在(x_0,z_0)处施加一个冲量I，求施加后瞬间球的运动状态（速度、角速度在x、y、z轴的分量）。

（2）接（1），将击打台球记为时间零点。已知台球与桌面的摩擦系数为μ视为小量，求t_0时刻台球的运动状态（速度、角速度在x、y、z轴的分量）。

（3）台球桌边并不是垂直的，而是形如图2.2的斜角形，碰撞点对台球的切面与桌面的夹角为θ。坐标系的选取规则如图，y轴垂直于桌边，x轴由右手螺旋确定。接（2），取$x_0=z_0=0$，台球在受到冲击t_0时间后撞到桌边。桌边有一定的弹性，与球相碰会先压缩后回弹，且回弹的支持力冲量与压缩的支持力冲量之比为e，球、桌面、桌边三体碰撞过程中球始终没有z方向的速度。台球与桌边的摩擦系数也为μ，μ为小量。已知各参量满足关系：

$$\frac{\mu-\mu\cos\theta+\mu^2\sin\theta}{(1-\mu^2)\sin\theta+2\mu\cos\theta}=\frac{\mu mgt_0}{I-\mu mgt_0}$$

求台球与桌边碰后的运动状态（速度、角速度在x、y、z轴的分量），答案中不能出现I。

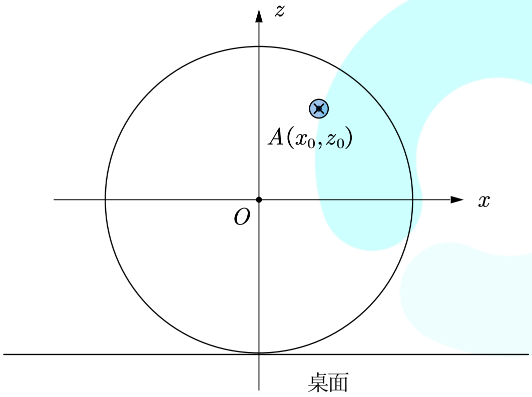

图2.1

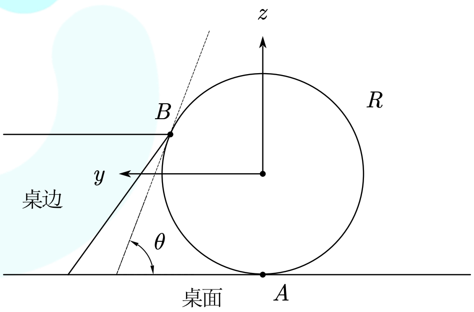

图2.2

三、单摆（40 分）

考虑一个重力场中的单摆，单摆摆长为l，摆球质量为m，重力加速度为g。以下各小问都只考虑单摆在摆平面内的运动。沿着竖直方向建立y坐标轴，y轴正方向竖直向下，摆球悬点以$y=\eta\cos\omega t$作小振动（$\eta\ll l$）。本题中，可引入$\omega_0=\sqrt{g/l}$和无量纲数$h=\omega^2\eta/4g$以简化表达式。

（1）考虑悬点的高频振动模式（$\omega_0\ll\omega$），由于悬点的高频振动，单摆的本征振动频率会有一阶偏移，设新的本征频率为Ω，则单摆的运动形式可以近似表达为

$$\theta(t)=A_0\cos\Omega t+A_{1p}\cos(\omega+\Omega)t+A_{1m}\cos(\omega-\Omega)t$$

在上述假设下，求出一阶近似下Ω的表达式，用$\chi=\eta/2l$、ω_0、ω表示。

提示：h不一定是小量。在代入近似解迭代时，须进行截断保证方程组闭合，从而可以使用本征值方法再恰当近似求解。

（2）考虑$\Omega=2\omega_0+2\varepsilon$（$\varepsilon\ll\omega_0$）的振动模式，微扰意义下，单摆的振幅将会有$e^{st}$慢变依赖。求出$s$与$\varepsilon$、$\omega_0$、$h$的关系，并指出当$\varepsilon$处于什么范围时单摆的振幅会指数增长。

提示：单摆的运动可以近似表达如下

$$\theta(t)=a(t)\cos\gamma t+b(t)\sin\gamma t$$

代入近似解迭代时，同样需要截断保证方程组闭合。

四、棋盘电阻（40 分）

小明在下棋时闲来无事，想测一下棋盘的电阻。我们考虑一个8×8的棋盘，由两种导电性能较差且电导率不同的金属组成。棋盘的两端分别与两片导电性能良好的金属片接触，一个直流电源用导线与两个金属片相连，测量流过导线的电流，即可得到棋盘的电阻。

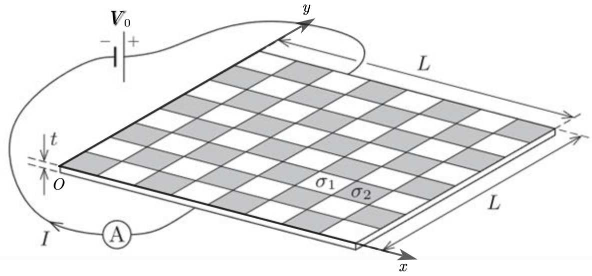

图4.1

棋盘的边长为L，厚度为t，金属片长为L，宽为t，完全贴合在棋盘侧面。电源电动势为V_0。在二维平面中，定义面电流密度矢量$\vec{\alpha}$，方向为正电荷流动方向，大小为与$\vec{\alpha}$垂直的单位长度上流过的电流。白色方块的二维电导率为σ_1，灰色方块的二维电导率为σ_2。即在白色方块区域，$\vec{\alpha}=\sigma_1\vec{E}$，灰色方块区域，$\vec{\alpha}=\sigma_2\vec{E}$。

为了简化问题，假设棋盘的厚度$t\ll L$，从而电流近似沿二维平面传播。方块与方块之间、棋盘与金属片之间的接触电阻可以忽略不计。

（1）如图所示，在棋盘上建立二维平面直角坐标系，以原点O作为电势零点。请给出棋盘方块区域内电势V满足的方程，和棋盘边界处以及棋盘方块间V满足的边界条件。

（2）在静电场中，电场沿不同路径的积分只和初末端点有关：

$$\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=V(a)-V(b)$$

将面电流密度矢量沿z轴负方向旋转 90 度，记为$\vec{\beta}$。

（2.1）请证明$\vec{\beta}$沿不同路径的积分也只和初末端点有关。

（2.2）将$\vec{\beta}$对路径的积分表示为

$$\int_a^b \vec{\beta}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=B(a)-B(b)$$

不妨设原点O处$B=0$，请给出棋盘方块区域内B满足的方程，和棋盘边界处以及棋盘方块间B满足的边界条件，并说明在$x=L$边界上B的物理意义。

（3）给出白色方块和灰色方块区域内V的导数和B的导数之间满足的关系。

（4）直接求解（1）（2）中的方程是困难的，但考虑到这个体系具有良好的对称性，可以通过该对称性给出的方程直接求出棋盘的电阻。请利用上述方程中V和B的对称性，求出棋盘的电阻。

提示：将体系旋转 90 度，新的棋盘与原棋盘相似。

五、冬天晾衣服（40 分）

（1）我们将挂起的衣服简化为一块长为a、宽为b、厚度为d的均值薄板，其中$a > b \gg d$，如图一悬挂。衣服为纯棉，密度为ρ_1，单位质量比热容为c_1。显然棉质的衣服洗完后会留住一定量的水，设水在棉衣里均匀分布，初始密度为ρ_0。已知水的单位质量比热容为c_w，熔化热为L，冰的单位质量比热容为c_i。

（1.1）考虑衣服晾到室外后的弛豫过程，已知环境温度为$T_0 < T_L = 0°\mathrm{C}$，衣服的初始温度$T_1 > T_L = 0°\mathrm{C}$。设衣服与外界的热交换方式为热辐射，斯特潘常量为σ，可以忽略衣服的侧面传热。请求出衣服从晾到室外到完全结冰用时t_0，假设衣服的温度分布是均匀的。

（1.2）已知$T_1 = 18.0°\mathrm{C}$，$T_0 = -18.0°\mathrm{C}$，$a = 0.800\ \mathrm{m}$，$b = 0.600\ \mathrm{m}$，$d = 0.0200\ \mathrm{m}$，$\rho_1 = 100\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$，$\rho_0 = 10.0\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$，$c_1 = 1.25\ \mathrm{J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}}$，$c_w = 4.18\ \mathrm{J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}}$，$L = 335\ \mathrm{J \cdot g^{-1}}$，$c_i = 2.01\ \mathrm{J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}}$，$\sigma = 5.67 \times 10^{-9}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$。数值计算$t_0$的值，保留三位数字。请根据你得到的结果，结合生活实际，说明在弛豫过程中忽略衣服水分蒸发的合理性。

（2）此时衣服中的水已经变成冰，为了计算升华速率，建立模型如下：衣服中的冰与表面的水蒸气将达到化学平衡

$$\mu_i(P,T) = \mu_g(P,T) \tag{5.1}$$

其中，化学势μ满足$\mathrm{d}\mu = -s\mathrm{d}T + v\mathrm{d}P$，式中的$s,v$代表单粒子的熵和体积。单粒子定容热容$c_V = c_V(T)$。水蒸气将随着扩散以及自然对流挥发。假设空气十分干燥，从而我们可以认为水蒸气从衣服表面逃逸后迅速地扩散，从而衣服中的冰可以不断地减少。假设冰在衣服中保持密度均匀。

（2.1）证明水蒸气作为理想气体的化学势$\mu_g(P,T)$如下式：

$$\mu_g(P,T) = kT(\phi(T) + \ln P) \tag{5.2}$$

再设冰的化学势$\mu_i(p_0,T_0) = \mu_i$恒定且已知，计算衣服表面水蒸气的密度ρ，设水分子质量m_0。

提示：

1、本问中，用大小写区分单粒子物理量和广延量。

2、取单原子分子理想气体，这在数量级估算中是合适的，统计力学告诉我们$\phi(T)$的形式为（没有代入的必要）

$$\phi(T) = -\frac{5}{2}\ln T + \frac{3}{2}\ln\frac{2\pi m_0 k}{h^2} \tag{5.3}$$

（2.2）为了解决扩散模型的测度问题，设水蒸气在d_0的尺度内线性减少至0，同时扩散只垂直于衣服表面，进行一维稳态扩散，密度扩散系数为D。请求出衣服晾干的特征时间t_1，答案用题给字母表示。

备注：本题的模型由命题人杜撰而成，为了能算出结果进行了不少相当不精确的近似，做题时认可就行，请不要纠结细节问题。

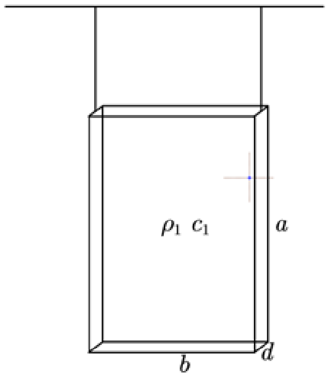

图5.1

六、介质中的电磁波（40 分）

（1）为了求导体的光学常数，采用自由电子气模型。电子自由运动，数密度n_0，不发生碰撞，电子运动时会收到阻尼力$-m\beta\dot{\vec{r}}$，其中m为电子质量。外电场角频率ω。记材料复介电常数$\tilde{\epsilon}$和折射率$\hat{n}=\sqrt{\tilde{\epsilon}}=n(1+\mathrm{i}\kappa)$，求$n(\omega)$、$\kappa(\omega)$满足的两个方程。

（2）假设$\kappa \gg 1$, 求角频率为ω光波在金属中的吸收系数α。

大部分电磁波进入导体后都会快速衰减消失，但也有例外：阿尔文（Alfvén）波。阿尔文在太阳黑子的研究中发现了太阳中电离气体的磁流体波，现称之为阿尔文波。阿尔文波也可以存在于晶体和地球的大气层中。

（3）已知等离子体电导率σ，相对磁导率$\mu_r=1$，利用麦克斯韦方程组推出特定的点$\vec{r}$处磁场$\vec{B}(\vec{r})$与此处等离子体速度$\vec{v}$满足的方程。

（4）写出等离子体质量守恒方程与动量方程。用等离子体密度ρ、速度$\vec{v}$、压强p、电场和磁场表示。

（5）设$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}_1(\vec{r},t)$、$\rho=\rho_0+\rho_1(\vec{r},t)$，$B_1 \ll B_0$，$\rho_1 \ll \rho_0$，同时假设电流远大于位移电流，忽略$\nabla^2\vec{B}$，化简上述方程组并给出速度满足的方程（假设声速为$s$）。

（6）假设$\vec{v}=\vec{v}_0 e^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$，$\vec{v}_A=\frac{\vec{B}_0}{\sqrt{\rho_0\mu_0}}$，求$\vec{k}$、$\vec{v}_0$、$\vec{B}_0$互相垂直与平行情况下的相速度，并说明什么时候上一问的假设是合理的。

七、金属光学（40 分）

电磁波在金属中传播时，金属内部可能存在自由电荷和传导电流。传导电流会产生焦耳热，此过程中电磁能被转化为热能，因而电磁波会发生衰减。由于金属的电导率通常很高，这种衰减效应非常显著，使得金属在一般情况下是不透明的。尽管如此，金属在光学中仍然有重要的作用，例如：金属的强吸收特性往往伴随有高反射特性，所以金属面可以用作优等的反射面。本题考虑一块各向同性的均匀金属介质，已知其相对介电常数为ε_r，相对磁导率为μ_r，电导率为σ。其中传播的电磁场满足麦克斯韦方程组：.

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}\tag{7.1}$$

由此可以证明金属内电荷密度随时间指数衰减，即$\rho=\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$，其中$\tau$为弛豫时间。对于金属，这一时间比光波的振动周期还要短得非常多（典型值量级为10^{-18}秒）。因此，在研究金属中的电磁波时，可以认为金属内没有自由电荷。

（1）在此条件下，证明电场$\vec{E}$满足波动方程

$$\nabla^2\vec{E}-\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\sigma\mu_0\mu_r\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0\tag{7.2}$$

并代入平面波解$\vec{E}=\vec{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$，求出色散关系，即折射率$\tilde{n}=\frac{kc}{\omega}$与角频率$\omega$之间满足的关系

（2）容易看到，金属介质中平面波传播所服从的基本方程，与透明电介质中的传播相比，差别仅在于金属介质的折射率$\tilde{n}$为复数，即$\tilde{n}=n(1+\mathrm{i}\kappa)$。若有一束角频率为$\omega$的平面波从空气（折射率为 1）入射到金属表面，入射角为θ_i。试求折射光相位传播方向与法向的夹角θ_1，以及其振幅衰减方向与法向的夹角θ_2（用n，κ，θ_i表示）

（3）将一束钠黄光（$\lambda=589.3\ \mathrm{nm}$）入射到块状铝的表面，已知此时$n=1.44$，$n\kappa=5.23$，本问中可取$\mu_r=1$。已知入射光为自然光，求入射角$\theta_i=\frac{\pi}{4}$时的反射光偏振度$P$与光强反射率大小$R$。

八、相对论（40 分）

让我们想象一下，有一颗叫蓝星的星球，这个星球上有和我们类似的文明。然而，因为这个星球上缺少磁性物质，所以这个星球上的生命对于磁场并不了解。然而他们已经了解了与电场有关的知识，并且知道各个参考系中光速不变。现在，你需要做的就是在这一基础下，重新推出你所了解的关于相对论以及关于电磁学的内容。

（1）蓝星上的科学家X提出，时间和空间是相对的。假设有两个参考系S和S'，S'相对S以x轴正方向的速度v运动，那么两个参考系之间的x和t满足以下变换关系：$x'=Ax+Bt,t'=Cx+Dt$。又，此时S相对S'以速度$-v$运动，因此有$x=Ax'-Bt',t=-Cx'+Dt'$。同时，S和S'系中具有相同的光速c。试根据以上内容推出系数A,B,C,D。

（2）根据这一研究，蓝星上的科学家Y提出了时空图的概念，而一个粒子的运行可以由时空图上的一条线表示。由于粒子在不受外力作用时静止或作匀速直线运动，因此粒子在不受外力作用时，在时空图上对应的线为直线。定义时空图上的距离$\mathrm{d}l=\sqrt{-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2+c^2\mathrm{d}t^2}$，可以推出粒子在不受外力作用时，沿时空图中的最短路线运行。拓展到多个粒子的情况，由于粒子的质量可以反映粒子的运动是否容易被改变，因此可以认为这些粒子沿时空图中各自运行的距离与其质量乘积的和$\sum m_il_i$最小的路线运行。

现在考虑两个粒子，质量分别为m_1,m_2，在$t=0$时二者位于x_1,x_2处，之后在(x_k,t_k)处

碰撞后，在$t=t_1$时位于$x_1{}',x_2{}'$。试根据以上结论找到该过程中的守恒量。（用两个粒子的质量和速度表示）

（3）之后蓝星上的科学家Y设想了这样一个场景：考虑一条通电导线。导线中有等量且均匀分布的线密度λ的正负电荷，其中负电荷具有沿导线的速度v。距离导线d处有一个以相同的速度v运动的点电荷。试在仅考虑电场的情况下，在相对导线静止的参考系S和以速度v运动的参考系S' 中分别求出点电荷所受的力。

可以发现二者是不一致的，因此人们设想电流还会产生一种场，即磁场。为使两个参考系中的电荷受力符合实际情况，试求出S中点电荷处的磁场大小。

（4）考虑参考系S中有一个静电荷分布$\rho(x,y,z)$，试由电荷是相对论不变量以及S系中的关于静电的定理，在相对S系在x方向以速度$+v$运动的S′系中验证以下结论：

（4.1）$\nabla\cdot\vec{E}=-\frac{\rho}{\epsilon_0}$；（4.2）$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$。

提示：相对论电磁场变换（其中$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$）

$$\begin{cases} E_x{}'=E_x,E_y{}'=\gamma\left(E_y-vB_z\right),E_z{}'=\gamma\left(E_z+vB_y\right) \\ B_x{}'=B_x,B_y{}'=\gamma\left(B_y+\dfrac{v}{c^2}E_z\right),B_z{}'=\gamma\left(B_z-\dfrac{v}{c^2}E_y\right) \end{cases} \tag{8.1}$$

版权信息

命题人

吴彦玺 戴正宇 高铭泽 丁卓立 熊程宇 杨 帆 张书源 吴愉轩

审题人

孙镕希 曹云博 任宇桐 吴弈笛 马浩然 刘家亦 吴彦玺 戴正宇 高铭泽 丁卓立 熊程宇 杨 帆 张书源 吴愉轩

联系方式

微信公众号 CPHOS

官方网站 www.cphos.cn

CPHOS 论坛

邮箱 service@cphos.cn

微信小程序 CPHOS 物理竞赛联考