第 22 届 CPHOS 物理竞赛联考

理论答案

本文件于 2024 年 8 月 27 日 9: 00 首次发布，最后更新于 2024 年 8 月 22 日 17: 27 。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见文件末尾。

一、刚体（40 分）

有一个质量m、半径R的匀质半圆盘。如图1.1，将其切下一个半径$\frac{1}{2}R$的半圆拼在另一边。将其竖直放置于完全粗糙的水平面上。刚体的上表面光滑无摩擦。

（1）如图1.2，在该刚体的上表面放置一个质量为αm的小球（大小可略）。以如图两角度为坐标，求该系统可能的平衡位置，并利用计算说明该平衡是否稳定。

（2）令$\alpha=\frac{1}{2}$。对该系统施加一微扰，其运动可分解为数个简谐振动的叠加。求这几个简谐运动的角频率。

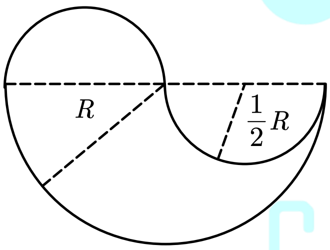


图1.1

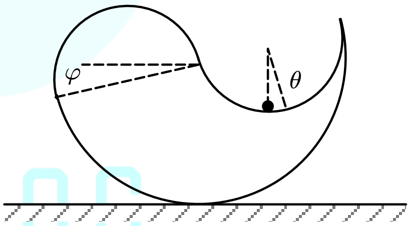


图1.2

解：（1）首先我们需要求图1.1所示刚体的质心位置。设半径为R的匀质半圆面质心距圆心aR，使该面状刚体绕边缘直径旋转一周，得

$$\frac{4}{3}\pi R^3=2\pi aR\cdot\frac{1}{2}\pi R^2 \tag{1}$$

即：

$$a=\frac{4}{3\pi} \tag{2}$$

如图1.1，设刚体的质心在原半圆圆心左侧x处，下方y处，可得

$$x=\frac{1}{m}\left[\frac{1}{4}m\cdot\frac{1}{2}R-\left(-\frac{1}{4}m\right)\cdot\frac{1}{2}R\right]=\frac{1}{4}R \tag{3}$$

$$y=\frac{1}{m}\left[m\cdot aR-\frac{1}{4}m\cdot\frac{1}{2}aR+\left(-\frac{1}{4}m\right)\cdot\frac{1}{2}aR\right]=\frac{3}{4}aR \tag{4}$$

以圆心为重力势能零点，系统总重力势能为

$$E_p = mg(-x\sin\varphi - y\cos\varphi) + \alpha mg\left(\frac{1}{2}R\sin\varphi - \frac{1}{2}R\cos\theta\right)$$
$$= \frac{1}{4}mgR[(2\alpha-1)\sin\varphi - 3a\cos\varphi - 2\alpha\cos\theta] \tag{5}$$

平衡位置要求$\frac{\partial E_p}{\partial\varphi}=0$，$\frac{\partial E_p}{\partial\theta}=0$，可据此求出$\theta$和$\varphi$的值。

$$\sin\theta = 0$$
$$(2\alpha-1)\cos\varphi + 3a\sin\varphi = 0$$

由几何关系可判断$\cos\varphi \neq 0$，得到

$$\theta = 0 \tag{6}$$

$$\varphi = \arctan\left[\frac{\pi}{4}(1-2\alpha)\right] \tag{7}$$

发现在满足（6）（7）式时，有

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial\varphi^2}\right|_{\varphi=\arctan\left[\frac{\pi}{4}(1-2\alpha)\right]} = \frac{1}{4}mgR\sqrt{(1-2\alpha)^2+\left(\frac{4}{\pi}\right)^2} > 0$$
$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} = \frac{1}{2}mgR\alpha > 0$$
$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial\theta\partial\varphi} = 0$$

知无论θ、φ发生何微扰，势能总会增大。因此，此平衡为稳定平衡。

（2）代入$\alpha=\frac{1}{2}$，得：

$$\theta = \varphi = 0 \tag{8}$$

刚体绕大半圆圆心的转动惯量为

$$I_O = \frac{1}{2}mR^2 \tag{9}$$

由平行轴定理，刚体绕其与地面接触点的转动惯量为

$$I_h = I_O - m(x^2+y^2) + m[x^2+(R-y)^2] = \left(\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}\right)mR^2 \tag{10}$$

刚体瞬时的运动可视为其绕与地面接触点的转动，设N为刚体对小球的支持力，由转动定理可得

$$I_h\ddot{\varphi} = mg(x\cos\varphi - y\sin\varphi) - N_y\left(\frac{1}{2}R\cos\varphi - \frac{1}{2}R\sin\theta\right) + N_x\left(R+\frac{R}{2}\sin\varphi - \frac{R}{2}\cos\theta\right) \tag{11}$$

在刚体瞬时静止的转动参考系中，计算质点的加速度只需要绕小半圆圆心的圆周运动。转移到地面系中，还应考虑惯性离心加速度、科里奥利加速度、切向加速度相平衡。近似到一阶时，我们只需要考虑切向加速度。列出地面系中质点相对小半圆弧的法向和切向受力方程。

$$\alpha mg - N = -\alpha m\cdot\frac{1}{2}R\ddot{\varphi} \tag{12}$$

$$-N\theta = \alpha m\left[\frac{1}{2}R\ddot{\theta} + R\ddot{\varphi}\right] \tag{13}$$

联立（11）（12）（13）三式，近似到最低阶，得到动力学方程。

$$\left(\frac{13}{2}-\frac{8}{\pi}\right)R\ddot{\varphi}+\frac{4}{\pi}g\varphi-2g\theta=0 \tag{14}$$

$$\frac{\ddot{\theta}}{2}R+\ddot{\varphi}R+g\theta=0 \tag{15}$$

利用复数表示，令$\theta=\tilde{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，$\varphi=\tilde{B}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，代入动力学方程得

$$\left(\frac{g}{R}-\frac{1}{2}\omega^2\right)\tilde{A}-\omega^2\tilde{B}=0 \tag{16}$$

$$-\frac{2g}{R}\tilde{A}+\left[\frac{4}{\pi}\frac{g}{R}-\left(\frac{13}{2}-\frac{8}{\pi}\right)\omega^2\right]\tilde{B}=0 \tag{17}$$

这是一个关于$\tilde{A}$、$\tilde{B}$的线性方程组。为使$\tilde{A}$、$\tilde{B}$都有非零解，必定有

$$\left(13-\frac{16}{\pi}\right)x^2+\left(\frac{24}{\pi}-34\right)x+\frac{16}{\pi}=0 \tag{18}$$

其中$x=\omega^2R/g$

取正数解，解得

$$\omega_1=1.7686\sqrt{\frac{g}{R}}\,,\omega_2=0.4538\sqrt{\frac{g}{R}} \tag{19}$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 16 分：（1）式 2 分，（2）（3）（4）各 1 分，（5）3 分，（6）（7）各 2 分，通过计算说明稳定平衡 4 分；

第（2）问 24 分：（8）（9）式各 1 分，（10）式 2 分，（11）（12）（13）式各 3 分，（14）（15）式各 2 分，（16）（17）式各 1 分，（18）式 3 分，（19）式 2 分。

二、台球（40 分）

台球是一项非常受欢迎的运动，而物理学知识能帮助我们更好地理解这项运动的底层原理。我们采用相对简单的模型：台球视为质量为m，半径为R的匀质刚性球体。

（1）如图2.1建立坐标系，z轴竖直向上，y轴由右手螺旋确定。现沿y轴正方向，在(x_0,z_0)处施加一个冲量I，求施加后瞬间球的运动状态（速度、角速度在x、y、z轴的分量）。

（2）接（1），将击打台球记为时间零点。已知台球与桌面的摩擦系数为μ视为小量，求t_0时刻台球的运动状态（速度、角速度在x、y、z轴的分量）。

（3）台球桌边并不是垂直的，而是形如图2.2的斜角形，碰撞点对台球的切面与桌面的夹角为θ。坐标系的选取规则如图，y轴垂直于桌边，x轴由右手螺旋确定。接（2），取$x_0=z_0=0$，台球在受到冲击t_0时间后撞到桌边。桌边有一定的弹性，与球相碰会先压缩后回弹，且回弹的支持力冲量与压缩的支持力冲量之比为e，球、桌面、桌边三体碰撞过程中球始终没有z方向的速度。台球与桌边的摩擦系数也为μ，μ为小量。已知各参量满足关系：

$$\frac{\mu-\mu\cos\theta+\mu^2\sin\theta}{(1-\mu^2)\sin\theta+2\mu\cos\theta}=\frac{\mu mgt_0}{I-\mu mgt_0}$$

求台球与桌边碰后的运动状态（速度、角速度在x、y、z轴的分量），答案中不能出现I。

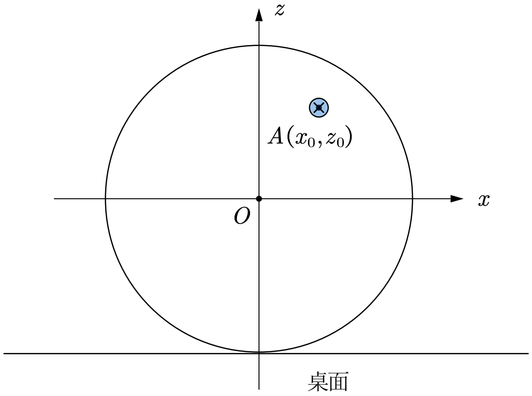


图2.1

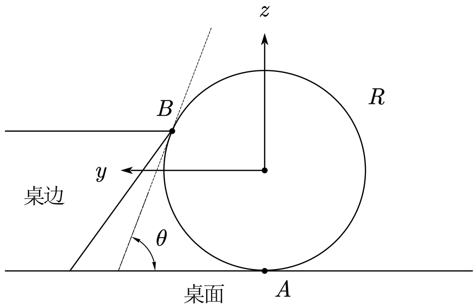


图2.2

解：（1）设台球桌面对球的支持力为N，则有：

$$N = mg$$

是有限量，因此摩擦力也是有限量，在极短的冲量作用时间内，桌面对球的力不提供冲量。对台球列质心运动方程：

$$m\vec{v}_c = I\vec{e}_y \tag{1}$$

解得：

$$\vec{v}_c = \frac{I}{m}\vec{e}_y \tag{2}$$

对质心列冲量矩方程：

$$\frac{2}{5}mR^2\vec{\omega}_0 = (x_0\vec{e}_x + z_0\vec{e}_z) \times I\vec{e}_y \tag{3}$$

解得：

$$\vec{\omega}_0 = \frac{5I}{2mR^2}(-z_0\vec{e}_x + x_0\vec{e}_z) \tag{4}$$

（2）由于摩擦系数μ是小量，因此在台球受到打击后，与桌边碰撞之前，v_z, ω_y, v_x是小量，ω_x, ω_z是正常量台球与桌面接触点的相对速度为：

$$v_{rx} = v_x - \omega_y R \tag{5}$$

$$v_{ry} = v_y + \omega_x R \tag{6}$$

从而对应的摩擦力分量：

$$f_x = -\frac{v_{rx}}{\sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2}}\mu mg \tag{7}$$

$$f_y = -\frac{v_{ry}}{\sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2}}\mu mg \tag{8}$$

近似至首阶非零项：

$$f_x = -\frac{v_x - \omega_y R}{v_c}\mu mg \tag{7'}$$

$$f_y = -\mu mg \tag{8'}$$

其中$v_c = I/m$。进一步写出质心运动方程：

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_x - \omega_y R}{v_c}\mu g \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\mu g \tag{10}$$

以及角动量方程：（注意$\vec{e}_{x,y,z}$是不转的）

$$\frac{2}{5}mR^2\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t}=0 \tag{11}$$

$$\frac{2}{5}mR^2\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t}=\frac{v_x-\omega_y R}{v_c}\mu mgR \tag{12}$$

$$\frac{2}{5}mR^2\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t}=-\mu mgR \tag{13}$$

（10）（13）式解得：

$$v_y=\frac{I}{m}-\mu gt \tag{14}$$

$$\omega_x=\frac{-5Iz_0}{2mR^2}-\frac{5\mu g}{2R}t \tag{15}$$

（9）（12）式联立，结合初始条件得：

$$\frac{2}{5}R\omega_y+v_x=0 \tag{16}$$

代入（9）或（12）结合初始条件得：

$$\omega_y=0 \tag{17}$$

$$v_x=0 \tag{18}$$

回头看这个结果也是可以理解的：刚性球与桌面只有点接触，ω_z不会带来接触点x方向的相对速度，因此初始状态下x方向无相对速度，也无x方向的摩擦力，从而也就没有a_x,β_y，继而接触点始终没有x方向的相对速度。

因此经过t_0时间后，台球的运动状态为：

$$v_y=\frac{I}{m}-\mu gt_0 \tag{19}$$

$$\omega_x=\frac{-5Iz_0}{2mR^2}-\frac{5\mu g}{2R}t_0 \tag{20}$$

$$\omega_z=\frac{5Ix_0}{2mR^2} \tag{21}$$

（3）取$x_0=z_0=0$，则碰桌边前的运动状态为：

$$v_{y0}=\frac{I}{m}-\mu gt_0$$

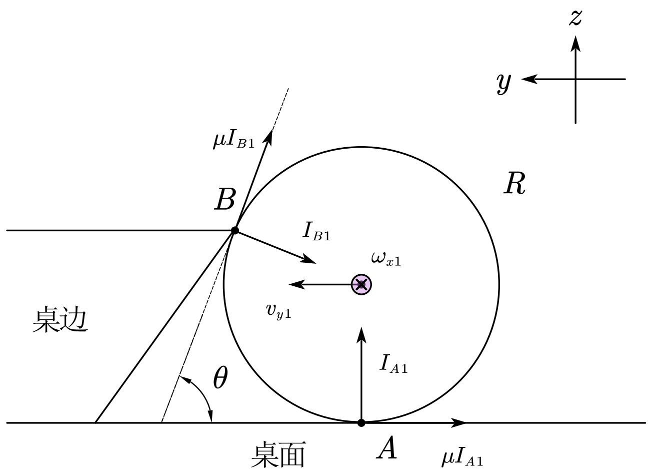
$$\omega_{x0}=-\frac{5\mu g}{2R}t_0$$

$$\omega_z=0$$

v_y由（14）给出。由于摩擦系数是小量，碰撞时台球远未达到纯滚。

碰撞过程发生在两个接触点上：台球与桌面的接触点（记为 A 点），台球与桌边的接触点（记为 B 点），如图。A 点的相对速度由碰撞前的指向桌边变为碰撞后的指出桌边，中间必有某状态相对速度为 0，相对速度反向意味着摩擦力反向；B 点同理。因此，我们不能直接对碰前碰后的状态列动量方程，我们无法处理总摩擦力冲量。题目给出“桌边有一定的弹性”是在提示我们把碰撞的过程拆分出来分析。

球刚刚碰上桌边时，AB 两点一定是滑动摩擦，这种状态会持续到 AB 两点中某一点的相对速度为 0 为止。我们先尝试求出这个状态。设 AB 两点都滑动的过程中，球心速度、角速度为v_{y1},ω_{x1}，此过程 AB 点的支持力冲量为I_{A1},I_{B1}。



动量方程：

$$mv_{y1} - mv_{y0} = -\mu I_{A1} - (\sin\theta + \mu\cos\theta)I_{B1} \tag{22}$$

角动量方程：

$$\frac{2}{5}mR^2\omega_{x1} - \frac{2}{5}mR^2\omega_{x0} = R(\mu I_{B1} - \mu I_{A1}) \tag{23}$$

题给条件碰撞过程中始终没有 z 方向运动：

$$I_{A1} = I_{B1}(\cos\theta - \mu\sin\theta) \tag{24}$$

从（21）式可以看出，总有$I_{B1} > I_{A1}$。联立（19）（20）（21）式，代入题给参数关系式（此式左边就是（20）式与（19）式等号右边的比值），得到此过程中v_{y1}与ω_{x1}的关系：

$$\frac{-v_{y1} + \left(\frac{I}{m} - \mu g t_0\right)}{\frac{2\omega_{x1}R}{5} + \mu g t_0} = \frac{(1-\mu^2)\sin\theta + 2\mu\cos\theta}{\mu - \mu\cos\theta + \mu^2\sin\theta} = \frac{I - \mu m g t_0}{\mu m g t_0} \tag{25}$$

此式可进一步化简为：

$$-v_{y1} = \frac{I - \mu m g t_0}{\mu m g t_0} \times \frac{2\omega_{x1}R}{5} \tag{25'}$$

若 A 点相对速度为 0，即：

$$v_{y1} + \omega_{x1}R = 0 \tag{26}$$

解得：

$$v_{y1} = \omega_{x1}R = 0 \tag{27}$$

若 B 点相对速度为 0，即：

$$v_{y1}\cos\theta - \omega_{x1}R = 0 \tag{28}$$

解得：

$$v_{y1} = \omega_{x1}R = 0 \tag{29}$$

也就是说，在$v_{y1} = \omega_{x1}R = 0$条件下，AB 点同时达到相对静止状态，同时整个球也刚好达到静止状态，这个状态刚好是球与桌边的最大压缩状态，后续桌边必须反弹，并且反弹时法向冲量（支持力冲量）是压缩时法向冲量（支持力冲量）的e倍。

利用（19）式或（20）式可以求得桌边在压缩过程中的总支持力冲量：

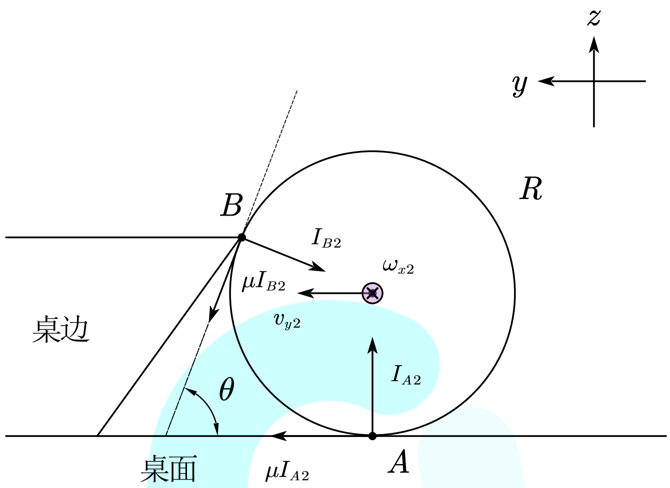
$$I_{in} = \frac{I - \mu m g t_0}{(1-\mu^2)\sin\theta + 2\mu\cos\theta} \tag{30}$$

反弹过程中总支持力冲量为：

$$I_{out} = e\frac{I - \mu m g t_0}{(1-\mu^2)\sin\theta + 2\mu\cos\theta} \tag{31}$$

现在来处理相对速度为 0 之后的问题，也就是反弹过程。反弹过程的主导是桌边的反弹力，相应地桌面会产生一个支持力冲量来平衡反弹冲量的竖直分量。如果 A 点想在反弹阶段中保持相对速度为 0（纯滚），必须要有一个和I_{out}同量级的摩擦力冲量，原因是球心速度变化是I_{out}量级的，要保持纯滚也需要有该量级的角速度变化，而角速度的变化来源于摩擦力冲量。然而μ始终是小量，根本无法提供I_{out}量级的摩擦力冲量，所以 A 点无法保持相对速度为 0；同理，B 点也无法保持相对速度为 0。也就是说上述临界状态之后，AB 两点又会沿着压缩过程中相反的方向滑动。

如图，设反弹过程 AB 点的支持力冲量为I_{A2},I_{B2}，球的速度、角速度为v_{y2},ω_{x2}。



动量方程：

$$mv_{y2} = \mu I_{A2} - (\sin\theta - \mu\cos\theta)I_{B2} \tag{32}$$

角动量方程：

$$\frac{2}{5}mR^2\omega_{x2} = R(-\mu I_{B2} + \mu I_{A2}) \tag{33}$$

竖直方向无运动：

$$I_{A2} = I_{B2}(\cos\theta + \mu\sin\theta) \tag{34}$$

末态满足：

$$I_{B2} = I_{out} \tag{35}$$

联立（29）（30）（31）（32）式，解得：

$$\begin{aligned} v_{y2} &= -e\left(\frac{I}{m} - \mu g t_0\right)\frac{(1-\mu^2)\sin\theta - 2\mu\cos\theta}{(1-\mu^2)\sin\theta + 2\mu\cos\theta} \\ &= -egt_0\frac{(1-\mu^2)\sin\theta - 2\mu\cos\theta}{1-\cos\theta+\mu\sin\theta} \end{aligned} \tag{36}$$

$$\omega_{x2} = -e\frac{5\mu g}{2R}t_0\frac{1-\cos\theta-\mu\sin\theta}{1-\cos\theta+\mu\sin\theta} \tag{37}$$

【（36）（37）式答案做了小量近似也可以给分】

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 6 分：（1）（2）式各 1 分，（3）（4）式各 2 分。

第（2）问 17 分：每式 1 分。

第（3）问 17 分：（25）（30）（36）（37）式各 2 分，其余每式 1 分。

三、单摆（40 分）

考虑一个重力场中的单摆，单摆摆长为l，摆球质量为m，重力加速度为g。以下各小问都只考虑单摆在摆平面内的运动。沿着竖直方向建立y坐标轴，y轴正方向竖直向下，摆球悬点以$y=\eta\cos\omega t$作小振动（$\eta\ll l$）。本题中，可引入$\omega_0=\sqrt{g/l}$和无量纲数$h=\omega^2\eta/4g$以简化表达式。

（1）考虑悬点的高频振动模式（$\omega_0\ll\omega$）, 由于悬点的高频振动，单摆的本征振动频率会有一阶偏移，设新的本征频率为Ω，则单摆的运动形式可以近似表达为

$$\theta(t)=A_0\cos\Omega t+A_{1p}\cos(\omega+\Omega)t+A_{1m}\cos(\omega-\Omega)t$$

在上述假设下，求出一阶近似下Ω的表达式，用$\chi=\eta/2l$、ω_0、ω表示。

提示：h不一定是小量。在代入近似解迭代时，须进行截断保证方程组闭合，从而可以使用本征值方法再恰当近似求解。

（2）考虑$\Omega=2\omega_0+2\varepsilon$（$\varepsilon\ll\omega_0$）的振动模式，微扰意义下，单摆的振幅将会有$e^{st}$慢变依赖。求出$s$与$\varepsilon$、$\omega_0$、$h$的关系，并指出当$\varepsilon$处于什么范围时单摆的振幅会指数增长。

提示：单摆的运动可以近似表达如下

$$\theta(t)=a(t)\cos\gamma t+b(t)\sin\gamma t$$

代入近似解迭代时，同样需要截断保证方程组闭合。

解：（1）悬点运动的加速度

$$a=-\omega^2\eta\cos\omega t \tag{1}$$

在悬点运动非惯性系中列出摆球的动力学方程，为方便相位加π

$$\ddot\theta+{\omega_0}^2(1+4h\cos\omega t)\theta=0 \tag{2}$$

由题干

$$\theta(t)=A_0\cos\Omega t+A_{1p}\cos(\omega+\Omega)t+A_{1m}\cos(\omega-\Omega)t \tag{3}$$

求二阶导得到

$$\ddot\theta=-\Omega^2A_0\cos\Omega t-(\omega+\Omega)^2A_{1p}\cos(\omega+\Omega)t-(\omega-\Omega)^2A_{1m}\cos(\omega-\Omega)t \tag{4}$$

代入方程，略去高阶项，得到

$$\begin{aligned}&\left[({\omega_0}^2-\Omega^2)A_0+2h{\omega_0}^2\left(A_{1m}+A_{1p}\right)\right]\cos\Omega t\\&+\left\{\left[{\omega_0}^2-(\omega-\Omega)^2\right]A_{1m}+2h{\omega_0}^2A_0\right\}\cos(\omega-\Omega)t\\&+\left\{\left[{\omega_0}^2-(\omega+\Omega)^2\right]A_{1p}+2h{\omega_0}^2A_0\right\}\cos(\omega+\Omega)t=0\end{aligned} \tag{5}$$

三角函数的系数为 0，从而得到本征方程

$$\begin{aligned}({\omega_0}^2-\Omega^2)A_0+2h{\omega_0}^2\left(A_{1m}+A_{1p}\right)=0\\\left[{\omega_0}^2-(\omega-\Omega)^2\right]A_{1m}+2h{\omega_0}^2A_0=0\\\left[{\omega_0}^2-(\omega+\Omega)^2\right]A_{1p}+2h{\omega_0}^2A_0=0\end{aligned} \tag{6}$$

系数行列式为 0，得到

$$\begin{aligned}&\omega^4{\omega_0}^2+(8h^2-2)\omega^2{\omega_0}^4+(1-8h^2){\omega_0}^6\\&-\left[\omega^4+(3-8h^2){\omega_0}^4\right]\Omega^2+(2\omega^2+3{\omega_0}^2)\Omega^4-\Omega^6=0\end{aligned} \tag{7}$$

考虑到$\omega_0\ll\Omega$和$\eta\ll l$，仅保留ω^6和ω^4项，得到

$$\Omega^2={\omega_0}^2+\frac{\chi^2}{2}\omega^2 \tag{8}$$

$$\Omega=\sqrt{{\omega_0}^2+\frac{\chi^2}{2}\omega^2} \tag{9}$$

（2）猜想方程有如下形式

$$\theta(t)=a(t)\cos\gamma t+b(t)\sin\gamma t \tag{10}$$

其中$\gamma=\omega_0+\varepsilon$。

考虑到$a(t)$和$b(t)$缓变，其导数只保留到一阶

$$\ddot{\theta}=\left(2\gamma\dot{b}-\gamma^2a\right)\cos\gamma t-\left(2\gamma\dot{a}+\gamma^2b\right)\sin\gamma t \tag{11}$$

积化和差后略去频率为3γ的项，得到

$$\{2\gamma\dot{b}+[2{\omega_0}^2h-(\gamma^2-{\omega_0}^2)]a\}\cos\gamma t-\{2\gamma\dot{a}+[2{\omega_0}^2h+(\gamma^2-{\omega_0}^2)]b\}\sin\gamma t=0 \tag{12}$$

三角函数前面系数为 0，得到

$$\begin{aligned}2\gamma\dot{b}+[2{\omega_0}^2h-(\gamma^2-{\omega_0}^2)]a=0\\2\gamma\dot{a}+[2{\omega_0}^2h+(\gamma^2-{\omega_0}^2)]b=0\end{aligned} \tag{13}$$

由题干猜解的形式如下

$$\begin{aligned}a(t)=a_0\mathrm{e}^{st}\\b(t)=b_0\mathrm{e}^{st}\end{aligned} \tag{14}$$

代入方程组得到

$$\begin{aligned}2\gamma b_0s+[2{\omega_0}^2h-(\gamma^2-{\omega_0}^2)]a_0=0\\2\gamma a_0s+[2{\omega_0}^2h+(\gamma^2-{\omega_0}^2)]b_0=0\end{aligned} \tag{15}$$

由系数行列式为 0，化简得到

$$s^2={\omega_0}^2h^2-\varepsilon^2 \tag{16}$$

指数增长要求s为实数，故有

$$-\omega_0h<\varepsilon<\omega_0h \tag{17}$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 22 分：（1）（2）（4）（7）（9）式各 2 分，（6）（8）式各 6 分；

第（2）问 18 分：（11）（12）（14）（17）式各 2 分，（13）或（15）式 6 分，（16）式 4 分。

四、棋盘电阻（40 分）

小明在下棋时闲来无事，想测一下棋盘的电阻。我们考虑一个8×8的棋盘，由两种导电性能较差且电导率不同的金属组成。棋盘的两端分别与两片导电性能良好的金属片接触，一个直流电源用导线与两个金属片相连，测量流过导线的电流，即可得到棋盘的电阻。

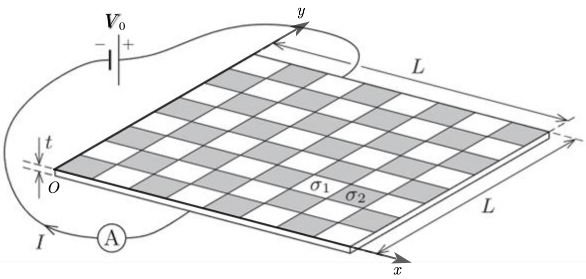


图4.1

棋盘的边长为L，厚度为t，金属片长为L，宽为t，完全贴合在棋盘侧面。电源电动势为V_0。在二维平面中，定义面电流密度矢量$\vec{\alpha}$，方向为正电荷流动方向，大小为与$\vec{\alpha}$垂直的单位长度上流过的电流。白色方块的二维电导率为σ_1，灰色方块的二维电导率为σ_2。即在白色方块区域，$\vec{\alpha}=\sigma_1\vec{E}$，灰色方块区域，$\vec{\alpha}=\sigma_2\vec{E}$。

为了简化问题，假设棋盘的厚度$t\ll L$，从而电流近似沿二维平面传播。方块与方块之间、棋盘与金属片之间的接触电阻可以忽略不计。

（1）如图所示，在棋盘上建立二维平面直角坐标系，以原点O作为电势零点。请给出棋盘方块区域内电势V满足的方程，和棋盘边界处以及棋盘方块间V满足的边界条件。

（2）在静电场中，电场沿不同路径的积分只和初末端点有关：

$$\int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = V(a) - V(b)$$

将面电流密度矢量沿z轴负方向旋转 90 度，记为$\vec{\beta}$。

（2.1）请证明$\vec{\beta}$沿不同路径的积分也只和初末端点有关。

（2.2）将$\vec{\beta}$对路径的积分表示为

$$\int_a^b \vec{\beta}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B(a) - B(b)$$

不妨设原点O处$B=0$，请给出棋盘方块区域内B满足的方程，和棋盘边界处以及棋盘方块间B满足的边界条件，并说明在$x=L$边界上B的物理意义。

（3）给出白色方块和灰色方块区域内V的导数和B的导数之间满足的关系。

（4）直接求解（1）（2）中的方程是困难的，但考虑到这个体系具有良好的对称性，可以通过该对称性给出的方程直接求出棋盘的电阻。请利用上述方程中V和B的对称性，求出棋盘的电阻。

提示：将体系旋转 90 度，新的棋盘与原棋盘相似。

解：（1）在棋盘内，电流的散度为 0，故在一个方块内部电场的散度也为 0。

$$\nabla\cdot\vec{E} = \nabla^2 V = 0 \tag{1}$$

即

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

在两种方块的交接边上，V满足

$$V\text{连续，}\sigma_1\frac{\partial V}{\partial n}\bigg|_1 = \sigma_2\frac{\partial V}{\partial n}\bigg|_2 \tag{2}$$

其中n为垂直于边的单位向量。

由于棋盘的导电性能较差，金属片导电性能较好，故认为金属片等势。

$$V|_{y=0} = 0,\ V|_{y=L} = V_0 \tag{3}$$

在另外两侧边界上，电流沿切向，即电场法向分量为零，故

$$\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0,\ \frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x=L} = 0 \tag{4}$$

（2）

（2.1）即证明$\vec{\beta}$的环路积分为零。

将环路积分分解为小环路之和，即证明$\vec{\beta}$在方块内环路积分为 0，并且在两种方块的交界处切向连续。将$\vec{\alpha}$和$\vec{\beta}$在直角坐标系表示为

$$\vec{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y)$$

$$\vec{\beta} = (\alpha_y, -\alpha_x)$$

利用斯托克斯公式，对方块内的小环路

$$\oint \vec{\beta}\mathrm{d}l = \iint \nabla\times\vec{\beta}\,\mathrm{d}S$$

$$\alpha_x = \sigma E_x, \alpha_y = \sigma E_y$$

$$\nabla\times\vec{\beta} = \partial_x\beta_y - \partial_y\beta_x = -\partial_x\alpha_x - \partial_y\alpha_y = -\sigma\left(\partial_x^2 V + \partial_y^2 V\right) = 0$$

故$\vec{\beta}$在单个方块内的环路积分为 0。
在两种金属交界处，由于法向电流连续，电流的法向分量对应$\vec{\beta}$的切向分量，故$\vec{\beta}$切向连续。
综上，$\vec{\beta}$的环路积分为 0。
在棋盘的一个方块内

$$\nabla\cdot\vec{\beta}=\partial_x\beta_x+\partial_y\beta_y=\partial_x\alpha_y-\partial_y\alpha_x=\sigma(\nabla\times E)=0$$

故

$$\nabla^2 B=0 \tag{5}$$

即

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}=0$$

在两种方块的交接面上，由$\vec{\alpha}$法向分量连续，$\vec{E}$切向分量连续，可得

$$B\text{连续，}\ \frac{1}{\sigma_1}\frac{\partial B}{\partial n}\bigg|_1=\frac{1}{\sigma_2}\frac{\partial B}{\partial n}\bigg|_2 \tag{6}$$

在边界上，在$x=0$和$x=L$处，$\vec{\beta}$垂直于边界，故B为常数。

$$B|_{x=0}=0\text{，}\ B|_{x=L}=\mathrm{Const} \tag{7}$$

考虑在$y=L$处沿x轴的积分

$$B(L)-B(0)=-\int_0^L\beta_x\,\mathrm{d}x=-\int_0^L\alpha_y\,\mathrm{d}x=I$$

$$B(L)=I,\text{即在}x=L\text{处}B\text{表示总电流} \tag{8}$$

在$y=0$和$y=L$处，$\vec{\beta}$平行于边界，故

$$\frac{\partial B}{\partial y}\bigg|_{y=0}=0\text{，}\ \frac{\partial B}{\partial y}\bigg|_{y=L}=0 \tag{9}$$

（3）

$$\partial_x B=-\beta_x=-\alpha_y=-\sigma E_y=\sigma\partial_y V \tag{10}$$

$$\partial_y B=-\beta_y=\alpha_x=\sigma E_x=-\sigma\partial_x V \tag{11}$$

（4）
对于原方程，可以将解表示为

$$I=f(\sigma_1,\sigma_2)V \tag{12}$$

将体系整体旋转 90 度，做以下替换

$$B\to V, V\to -B$$

$$\sigma_1'=\frac{1}{\sigma_2},\sigma_2'=\frac{1}{\sigma_1},I'=V_0,\ V_0'=I$$

可以将替换后的方程理解为：在原来的金属片处施加电压V',原来白色方块处的电导率为$1/\sigma_2$,原来灰色方块处的电导率为$1/\sigma_1$，此时，截面流过的总电流为I'。
故对$(I',V_0',\sigma_1',\sigma_2')$组成的新体系，有

$$I'=f(\sigma_1',\sigma_2')V'$$

代入I',σ_1',σ_2',V,得

$$V=f\left(\frac{1}{\sigma_2},\frac{1}{\sigma_1}\right)I \tag{13}$$

由（12）（13）式得到：

$$f\left(\frac{1}{\sigma_2},\frac{1}{\sigma_1}\right)f(\sigma_1,\sigma_2)=1$$

由于σ_1,σ_2有交换对称性

$$1=f\left(a,\frac{1}{a}\right)f\left(\frac{1}{a},a\right)=f^2\left(a,\frac{1}{a}\right),f\left(a,\frac{1}{a}\right)=1$$

若σ_1,σ_2变为原来的k倍，电导率也应该变为原来的k倍。故

$$f(\sigma_1,\sigma_2)=\sqrt{\sigma_1\sigma_2}f\left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}},\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}\right)=\sqrt{\sigma_1\sigma_2} \tag{14}$$

联立（12）（13）（14）式，得

$$f(\sigma_1,\sigma_2)=\sqrt{\sigma_1\sigma_2}$$

故棋盘电阻为

$$R=\frac{V}{I}=\frac{1}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}} \tag{15}$$

评分标准：本题满分 40 分。
第（1）问 10 分：（1）（2）式各 2 分，（3）（4）式各 3 分；
第（2）问 15 分：
第（2.1）小问 6 分：证明环路积分 6 分（意思对即可）；
第（2.2）小问 9 分：（5）（6）（7）（9）式各 1 分，（8）式 5 分；
第（3）问 5 分：（10）式 3 分，（11）式 2 分；
第（4）问 10 分：（12）（13）（14）式各 2 分，（15）式 4 分。

五、冬天晾衣服（40 分）

（1）我们将挂起的衣服简化为一块长为a、宽为b、厚度为d的均值薄板，其中$a>b\gg d$，如图一悬挂。衣服为纯棉，密度为ρ_1，单位质量比热容为c_1。显然棉质的衣服洗完后会留住一定量的水，设水在棉衣里均匀分布，初始密度为ρ_0。已知水的单位质量比热容为c_w，熔化热为L，冰的单位质量比热容为c_i。

（1.1）考虑衣服晾到室外后的弛豫过程，已知环境温度为$T_0<T_L=0℃$，衣服的初始温度$T_1>T_L=0℃$。设衣服与外界的热交换方式为热辐射，斯特潘常量为σ，可以忽略衣服的侧面传热。请求出衣服从晾到室外到完全结冰用时t_0，假设衣服的温度分布是均匀的。

（1.2）已知$T_1=18.0℃$，$T_0=-18.0℃$，$a=0.800\ \mathrm{m}$，$b=0.600\ \mathrm{m}$，$d=0.0200\ \mathrm{m}$，$\rho_1=100\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，$\rho_0=10.0\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，$c_1=1.25\ \mathrm{J\cdot g^{-1}\cdot K^{-1}}$，$c_w=4.18\ \mathrm{J\cdot g^{-1}\cdot K^{-1}}$，$L=335\ \mathrm{J\cdot g^{-1}}$，$c_i=2.01\ \mathrm{J\cdot g^{-1}\cdot K^{-1}}$，$\sigma=5.67\times10^{-9}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$。数值计算$t_0$的值，保留三位数字。请根据你得到的结果，结合生活实际，说明在弛豫过程中忽略衣服水分蒸发的合理性。

（2）此时衣服中的水已经变成冰，为了计算升华速率，建立模型如下：衣服中的冰与表面的水蒸气将达到化学平衡

$$\mu_i(P,T)=\mu_g(P,T) \tag{5.1}$$

其中，化学势μ满足$\mathrm{d}\mu=-s\mathrm{d}T+v\mathrm{d}P$，式中的$s,v$代表单粒子的熵和体积。单粒子定容热容$c_V=c_V(T)$。水蒸气将随着扩散以及自然对流挥发。假设空气十分干燥，从而我们可以认为水蒸气从衣服表面逃逸后迅速地扩散，从而衣服中的冰可以不断地减少。假设冰在衣服中保持密度均匀。

（2.1）证明水蒸气作为理想气体的化学势$\mu_g(P,T)$如下式：

$$\mu_g(P,T)=kT(\phi(T)+\ln P) \tag{5.2}$$

再设冰的化学势$\mu_i(p_0,T_0)=\mu_i$恒定且已知，计算衣服表面水蒸气的密度ρ，设水分子质量m_0。
提示：

1、本问中，用大小写区分单粒子物理量和广延量。
2、取单原子分子理想气体，这在数量级估算中是合适的，统计力学告诉我们$\phi(T)$的形式为（没有代入的必要）

$$\phi(T)=-\frac{5}{2}\ln T+\frac{3}{2}\ln\frac{2\pi m_0 k}{h^2} \tag{5.3}$$

（2.2）为了解决扩散模型的测度问题，设水蒸气在d_0的尺度内线性减少至0，同时扩散只垂直于衣服表面，进行一维稳态扩散，密度扩散系数为D。请求出衣服晾干的特征时间t_1，答案用题给字母表示。

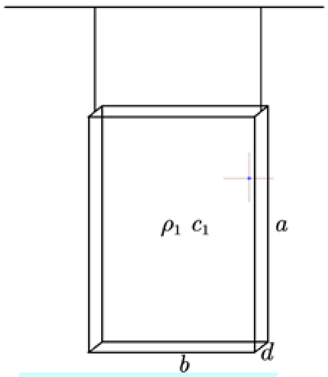


图5.1

备注：本题的模型由命题人杜撰而成，为了能算出结果进行了不少相当不精确的近似，做题时认可就行，请不要纠结细节问题。

解：
（1.1）冷却过程分为两段考虑：
1、衣服中的水未结冰时，传热方程

$$abd(\rho_1 c_1+\rho_0 c_w)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-2\sigma T^4 ab+2\sigma T_0^4 ab \tag{1}$$

容易分离变量

$$\mathrm{d}t=-\frac{d(\rho_1 c_1+\rho_0 c_w)}{2\sigma}\frac{\mathrm{d}T}{T^4-T_0^4} \tag{2}$$

积分

$$\Delta t_1=\frac{d(\rho_1 c_1+\rho_0 c_w)}{2\sigma}\int_{T_L}^{T_1}\frac{\mathrm{d}T}{T^4-T_0^4} \tag{3}$$

$$\Delta t_1=\frac{d(\rho_1 c_1+\rho_0 c_w)}{4\sigma T_0^3}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{T_1-T_0}{T_1+T_0}\frac{T_L+T_0}{T_L-T_0}+\arctan\frac{T_L}{T_0}-\arctan\frac{T_1}{T_0}\right) \tag{4}$$

2、相变过程

$$abd\rho_0 L=2\sigma(T_L^4-T_0^4)ab\Delta t_2 \tag{5}$$

故

$$\Delta t_2=\frac{d\rho_0 L}{2\sigma(T_L^4-T_0^4)} \tag{6}$$

则衣服结冰的总用时

$$\Delta t=\Delta t_1+\Delta t_2=\frac{d(\rho_1 c_1+\rho_0 c_w)}{4\sigma T_0^4}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{T_1-T_0}{T_1+T_0}\frac{T_L+T_0}{T_L-T_0}+\arctan\frac{T_L}{T_0}-\arctan\frac{T_1}{T_0}\right)+\frac{d\rho_0 L}{2\sigma(T_L^4-T_0^4)} \tag{7}$$

（1.2）代值即得

$$\Delta t = 7.08 \times 10^2 \text{ s} \tag{8}$$

结果的数量级大致准确，并且显然远小于衣服晾干的特征时间10^5 s，故忽略蒸发是合理的。

（2.1）理想气体内能，仍用大小写区分单粒子物理量和广延量，注意$C_P = C_V + Nk$

$$U(P,T) = \int C_P(T)\mathrm{d}T + U_0 \tag{9}$$

计算熵，利用热力学公式

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}U + P\mathrm{d}V}{T} \tag{10}$$

理想气体状态方程

$$PV = NkT \tag{11}$$

联立可以写出$S(p,T)$的积分形式结果

$$S(P,T) = \int \frac{C_P}{T}\mathrm{d}T - Nk\ln P + S_0 \tag{12}$$

又由化学势的表达式，不难得到

$$\mathrm{d}\mu = \frac{\mathrm{d}U + \mathrm{d}PV - \mathrm{d}TS}{N} \tag{13}$$

对上式积分即得

$$\mu = \frac{1}{N}(U + PV - TS) + \mu_0 \tag{14}$$

联立上面各式可以得到

$$\mu = \int c_P\,\mathrm{d}T - T\int \frac{c_P}{T}\mathrm{d}T + kT\ln P - Ts_0 + u_0 \tag{15}$$

故可以看出

$$\mu = kT(\phi(T) + \ln P) \tag{16}$$

式中

$$\phi(T) = \frac{1}{kT}\int c_P\,\mathrm{d}T - \int \frac{c_P}{kT}\mathrm{d}T + \frac{u_0 - Ts_0}{kT} \tag{17}$$

再利用化学平衡条件

$$\mu_g = \mu_i \tag{18}$$

容易解得水蒸气的分压为

$$P = \exp\left(\frac{\mu_i(p_0,T_0)}{kT_0} - \phi(T_0)\right) \tag{19}$$

则水蒸气的密度为

$$\rho = nm_0 = \frac{m_0}{kT_0}\exp\left(\frac{\mu_i(p_0,T_0)}{kT_0} - \phi(T_0)\right) \tag{20}$$

（2.2）由菲克扩散定律，单位时间内冰损失的质量为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = D\cdot\frac{\rho}{d_0}\cdot 2ab \tag{21}$$

故融化速率恒定，衣服晾干的时间为

$$t=\frac{\rho_0 d d_0 k T_0}{2Dm_0}\exp\left(-\frac{\mu_i(p_0,T_0)}{kT_0}+\phi(T_0)\right) \tag{22}$$

评分标准：本题满分 40 分。
第（1.1）小问 12 分：（1）（2）（3）（4）（6）（7）式各 2 分；
第（1.2）小问 5 分：（8）式 3 分，分析 2 分；
第（2.1）小问 17 分：（9）（10）（11）（12）（13）（15）（19）式各 2 分，（20）式 3 分；
第（2.2）小问 6 分：（21）（22）式各 3 分。
若答题者忘记了衣服有两面，（1.1）（2.2）只能得一半的分，（1.2）只能得 2 分。

六、介质中的电磁波（40 分）

（1）为了求导体的光学常数，采用自由电子气模型。电子自由运动，数密度n_0，不发生碰撞，电子运动时会收到阻尼力$-m\beta\dot{\vec{r}}$，其中m为电子质量。外电场角频率ω。记材料复介电常数$\tilde{\epsilon}$和折射率$\hat{n}=\sqrt{\tilde{\epsilon}}=n(1+\mathrm{i}\kappa)$，求$n(\omega)$、$\kappa(\omega)$满足的两个方程。

（2）假设$\kappa\gg 1$, 求角频率为ω光波在金属中的吸收系数α。

大部分电磁波进入导体后都会快速衰减消失，但也有例外：阿尔文（Alfvén）波。阿尔文在太阳黑子的研究中发现了太阳中电离气体的磁流体波，现称之为阿尔文波。阿尔文波也可以存在于晶体和地球的大气层中。

（3）已知等离子体电导率σ，相对磁导率$\mu_r=1$，利用麦克斯韦方程组推出特定的点$\vec{r}$处磁场$\vec{B}(\vec{r})$与此处等离子体速度$\vec{v}$满足的方程。

（4）写出等离子体质量守恒方程与动量方程。用等离子体密度ρ、速度$\vec{v}$、压强p、电场和磁场表示。

（5）设$\vec{B}=\vec{B}_0+\vec{B}_1(\vec{r},t)$、$\rho=\rho_0+\rho_1(\vec{r},t)$，$B_1\ll B_0$，$\rho_1\ll\rho_0$，同时假设电流远大于位移电流，忽略$\nabla^2\vec{B}$，化简上述方程组并给出速度满足的方程（假设声速为$s$）。

（6）假设$\vec{v}=\vec{v}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$，$\vec{v}_A=\frac{\vec{B}_0}{\sqrt{\rho_0\mu_0}}$，求$\vec{k}$、$\vec{v}_0$、$\vec{B}_0$互相垂直与平行情况下的相速度，并说明什么时候上一问的假设是合理的。

解：（1）

电子运动方程

$$m\ddot{\vec{r}}+m\beta\dot{\vec{r}}=-e\vec{E},\qquad \vec{E}=\vec{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{1}$$

解得

$$\vec{r}=\frac{e\vec{E}_0}{m\omega(\omega+\mathrm{i}\beta)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{2}$$

$$\vec{j}=-n_0e\dot{\vec{r}}=\frac{\mathrm{i}n_0e^2\vec{E}_0}{m(\omega+\mathrm{i}\beta)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{3}$$

复介电常数

$$\tilde{\epsilon}=1+\mathrm{i}\frac{\tilde{\sigma}}{\epsilon_0\omega}=1-\frac{n_0e^2}{m\epsilon_0\omega(\omega+\mathrm{i}\beta)} \tag{4}$$

又由于$\tilde{\epsilon}=n^2(1-\kappa^2+2\mathrm{i}\kappa)$可以得到

$$n^2(1-\kappa^2)=1-\frac{n_0e^2}{m\epsilon_0(\omega^2+\beta^2)} \tag{5}$$

$$2n^2\kappa=\frac{n_0e^2\beta}{m\epsilon_0\omega(\omega^2+\beta^2)} \tag{6}$$

（2）

光强衰减率α满足

$$I=I_0\mathrm{e}^{-\alpha z} \tag{7}$$

由此可得：

$$\alpha=2nk\kappa\approx2\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{n_0e^2}{m\epsilon_0(\omega^2+\beta^2)}-1} \tag{8}$$

（3）

由麦克斯韦方程组和电流密度与电场的关系

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\epsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\ \vec{J}=\sigma\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)\end{cases} \tag{9}$$

消去$\vec{J},\vec{E}$得到：

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)=-\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\mu_0\sigma\nabla\times\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=-\nabla^2\vec{B} \tag{10}$$

（4）

质量守恒方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0 \tag{11}$$

动量方程

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\nabla p+\vec{J}\times\vec{B} \tag{12}$$

其中

$$\vec{J}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B}-\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{13}$$

（5）

对前两问得到的三个方程分别作小量分析，化简得到：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\vec{v}_1=0\\ \rho_0\dfrac{\partial\vec{v}_1}{\partial t}+s^2\nabla\rho_1+\dfrac{\vec{B}_0}{\mu_0}\times\left(\nabla\times\vec{B}_1\right)=0\\ \dfrac{\partial\vec{B}_1}{\partial t}=-\vec{B}_0\nabla\cdot\vec{v}_1+\left(\vec{B}_0\cdot\nabla\right)\vec{v}_1\end{cases} \tag{14}$$

消去$\vec{B}_1,\rho_1$得到

$$\rho_0\frac{\partial^2\vec{v}_1}{\partial t^2}-\rho_0s^2\nabla(\nabla\cdot\vec{v}_1)+\frac{\vec{B}_0}{\mu_0}\times\left[\nabla\times\left(\nabla\times\left(\vec{v}_1\times\vec{B}_0\right)\right)\right]=0 \tag{15}$$

（6）

记$\vec{v}_A=\frac{\vec{B}_0}{\sqrt{\rho_0\mu_0}}$并带入$\vec{v}=\vec{v}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

化简得：

$$-\omega^2\vec{v}_1+s^2\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{v}_1)-\vec{v}_A\times\{\vec{k}\times[\vec{k}\times(\vec{v}_1\times\vec{v}_A)]\}=0 \tag{16}$$

当$\vec{k}\cdot\vec{v}_A=0$时，化简得

$$\omega^2\vec{v}_1=(s^2+v_A^2)(\vec{k}\cdot\vec{v}_1)\vec{k} \tag{17}$$

波速

$$\frac{\omega}{k}=\sqrt{s^2+v_A^2} \tag{18}$$

当$\vec{k}\times\vec{v}_A=0$时，化简得

$$(\omega^2-k^2v_A^2)\vec{v}_1=(s^2-v_A^2)\vec{k}(\vec{k}\cdot\vec{v}_1) \tag{19}$$

$\vec{k}\times\vec{v}_A=0$：

$$\frac{\omega}{k}=s \tag{20}$$

$\vec{k}\cdot\vec{v}_A=0$：

$$\frac{\omega}{k}=v_A \tag{21}$$

要使第六问的假设合理，由于$\omega^2/c^2\ll k^2$，只需要$k^2\ll\omega\mu_0\sigma$

即

$$\omega\ll\mu_0\sigma v^2 \tag{22}$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 8 分：（2）（3）（5）（6）式 1 分，（1）（4）式各 2 分；

第（2）问 2 分：（8）式 2 分；

第（3）问 6 分：（9）式 4 分，（10）式 2 分；

第（4）问 5 分：（1）（12）式 2 分，（13）式 1 分；

第（5）问 5 分：（14）式 3 分，（15）式 2 分；

第（6）问 14 分：（16）（17）（18）（19）（20）（21）（22）式 2 分。

七、金属光学（40 分）

电磁波在金属中传播时，金属内部可能存在自由电荷和传导电流。传导电流会产生焦耳热，此过程中电磁能被转化为热能，因而电磁波会发生衰减。由于金属的电导率通常很高，这种衰减效应非常显著，使得金属在一般情况下是不透明的。尽管如此，金属在光学中仍然有重要的作用，例如：金属的强吸收特性往往伴随有高反射特性，所以金属面可以用作优等的反射面。本题考虑一块各向同性的均匀金属介质，已知其相对介电常数为ε_r，相对磁导率为μ_r，电导率为σ。其中传播的电磁场满足麦克斯韦方程组：.

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases} \tag{7.1}$$

由此可以证明金属内电荷密度随时间指数衰减，即$\rho=\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$，其中$\tau$为弛豫时间。对于金属，这一时间比光波的振动周期还要短得非常多（典型值量级为10^{-18}秒）。因此，在研究金属中的电磁波时，可以认为金属内没有自由电荷。

（1）在此条件下，证明电场$\vec{E}$满足波动方程

$$\nabla^2\vec{E}-\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\sigma\mu_0\mu_r\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0 \tag{7.2}$$

并代入平面波解$\vec{E}=\vec{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$，求出色散关系，即折射率$\tilde{n}=\frac{kc}{\omega}$与角频率$\omega$之间满足的关系

（2）容易看到，金属介质中平面波传播所服从的基本方程，与透明电介质中的传播相比，差别仅在于金属介质的折射率$\tilde{n}$为复数，即$\tilde{n}=n(1+\mathrm{i}\kappa)$。若有一束角频率为$\omega$的平面波从空气（折射率为 1）入射到金属表面，入射角为θ_i。试求折射光相位传播方向与法向的夹角θ_1，以及其振幅衰减方向与法向的夹角θ_2（用n，κ，θ_i表示）

（3）将一束钠黄光（$\lambda=589.3\ \mathrm{nm}$）入射到块状铝的表面，已知此时$n=1.44$，$n\kappa=5.23$，本问中可取$\mu_r=1$。已知入射光为自然光，求入射角$\theta_i=\frac{\pi}{4}$时的反射光偏振度$P$与光强反射率大小$R$。

解：

（1）由麦克斯韦方程组

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\mu_0\mu_r\nabla\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\epsilon_0\epsilon_r\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \tag{2}$$

利用$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}=-\nabla^2\vec{E}$，可得

$$\nabla^2\vec{E}-\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\sigma\mu_0\mu_r\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0 \tag{3}$$

代入平面波解可得

$$k^2=\mu_0\mu_r\omega^2\left(\epsilon_0\epsilon_r+\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}\right) \tag{4}$$

折射率

$$\tilde{n}=\frac{kc}{\omega}=\sqrt{\mu_r\left(\epsilon_r+\mathrm{i}\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}\right)} \tag{5}$$

（2）设空气中波矢为k_0，则由x方向波矢连续可得

$$k_{tx}=k_{ix}=k_0\sin\theta_i \tag{6}$$

金属内波矢

$$k_t=\tilde{n}k_0 \tag{7}$$

z方向波矢

$$k_{tz}=\sqrt{k_t^2-k_{tx}^2}=\sqrt{n^2(1+\mathrm{i}\kappa)^2-\sin^2\theta_i}\,k_0 \tag{8}$$

折射光为

$$U=A_t\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_xx+k_zz-\omega t)} \tag{9}$$

相位传播方向

$$\theta_1=\arctan\frac{\mathrm{Re}(k_{tx})}{\mathrm{Re}(k_{tz})}=\arctan\frac{\sin\theta_i}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(n^2-n^2\kappa^2-\sin^2\theta_i+\sqrt{(n^2-n^2\kappa^2-\sin^2\theta_i)^2+4n^4\kappa^2}\right)}} \tag{10}$$

振幅衰减方向

$$\theta_2 = \arctan\frac{\mathrm{Im}(k_{tx})}{\mathrm{Im}(k_{tz})} = 0 \tag{11}$$

（3）对 s 光进行分析，设其振幅反射率为r_s，透射率为t_s，则有

切向电场E连续

$$1 + r_s = t_s \tag{12}$$

切向磁场强度H连续

$$k_{iz}(1 - r_s) = k_{tz}t_s \tag{13}$$

解得振幅反射率

$$r_s = \frac{k_{iz} - k_{tz}}{k_{iz} + k_{tz}} = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{(n + \mathrm{i}\kappa n)^2 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{(n + \mathrm{i}\kappa n)^2 - \sin^2\theta_i}} \tag{14}$$

光强反射率

$$R_s = |r_s|^2 \tag{15}$$

对 p 光进行分析，设其振幅反射率为r_p，透射率为t_p，则有

切向电场E连续

$$\left(1 - r_p\right)\cos\theta_i = t_p\frac{k_{tz}}{k_t} \tag{16}$$

切向磁场强度H连续

$$1 + r_p = \tilde{n}t_p \tag{17}$$

解得振幅反射率

$$r_p = \frac{\tilde{n}\cos\theta_i - \dfrac{k_{tz}}{k_t}}{\tilde{n}\cos\theta_i + \dfrac{k_{tz}}{k_t}} = \frac{(n + \mathrm{i}\kappa n)^2\cos\theta_i - \sqrt{(n + \mathrm{i}\kappa n)^2 - \sin^2\theta_i}}{(n + \mathrm{i}\kappa n)^2\cos\theta_i + \sqrt{(n + \mathrm{i}\kappa n)^2 - \sin^2\theta_i}} \tag{18}$$

光强反射率

$$R_p = \left|r_p\right|^2 \tag{19}$$

代入数值得

$$R_s = 0.8753\,;\ R_p = 0.7661 \tag{20}$$

反射光偏振度

$$P = \left|\frac{R_s - R_p}{R_s + R_p}\right| = 0.0665 \tag{21}$$

总光强反射率

$$R = \frac{1}{2}\left(R_s + R_p\right) = 0.8207 \tag{22}$$

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 8 分：（1）（2）式各 1 分，其余式各 2 分；

第（2）问 12 分：（6）-（11）式各 2 分；

第（3）问 20 分：（15）（19）式各 1 分，其余式各 2 分。

八、相对论（40 分）

让我们想象一下，有一颗叫蓝星的星球，这个星球上有和我们类似的文明。然而，因为

这个星球上缺少磁性物质，所以这个星球上的生命对于磁场并不了解。然而他们已经了解了与电场有关的知识，并且知道各个参考系中光速不变。现在，你需要做的就是在这一基础下，重新推出你所了解的关于相对论以及关于电磁学的内容。

（1）蓝星上的科学家X提出，时间和空间是相对的。假设有两个参考系S和S'，S'相对S以x轴正方向的速度v运动，那么两个参考系之间的x和t满足以下变换关系：$x' = Ax + Bt, t' = Cx + Dt$。又，此时$S$相对$S'$以速度$-v$运动，因此有$x = Ax' - Bt', t = -Cx' + Dt'$。同时，$S$和$S'$系中具有相同的光速$c$。试根据以上内容推出系数$A, B, C, D$。

（2）根据这一研究，蓝星上的科学家Y提出了时空图的概念，而一个粒子的运行可以由时空图上的一条线表示。由于粒子在不受外力作用时静止或作匀速直线运动，因此粒子在不受外力作用时，在时空图上对应的线为直线。定义时空图上的距离$\mathrm{d}l = \sqrt{-\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 + c^2\mathrm{d}t^2}$，可以推出粒子在不受外力作用时，沿时空图中的最短路线运行。拓展到多个粒子的情况，由于粒子的质量可以反映粒子的运动是否容易被改变，因此可以认为这些粒子沿时空图中各自运行的距离与其质量乘积的和$\sum m_i l_i$最小的路线运行。

现在考虑两个粒子，质量分别为m_1, m_2，在$t = 0$时二者位于x_1, x_2处，之后在(x_k, t_k)处碰撞后，在$t = t_1$时位于x_1', x_2'。试根据以上结论找到该过程中的守恒量。（用两个粒子的质量和速度表示）

（3）之后蓝星上的科学家Y设想了这样一个场景：考虑一条通电导线。导线中有等量且均匀分布的线密度λ的正负电荷，其中负电荷具有沿导线的速度v。距离导线d处有一个以相同的速度v运动的点电荷。试在仅考虑电场的情况下，在相对导线静止的参考系S和以速度v运动的参考系S'中分别求出点电荷所受的力。

可以发现二者是不一致的，因此人们设想电流还会产生一种场，即磁场。为使两个参考系中的电荷受力符合实际情况，试求出S中点电荷处的磁场大小。

（4）考虑参考系S中有一个静电荷分布$\rho(x, y, z)$，试由电荷是相对论不变量以及S系中的关于静电的定理，在相对S系在x方向以速度$+v$运动的S′系中验证以下结论：

（4.1）$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$；

（4.2）$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$。

提示：相对论电磁场变换：

$$\begin{cases} E_x' = E_x, E_y' = \gamma(E_y - vB_z), E_z' = \gamma(E_z + vB_y) \\ B_x' = B_x, B_y' = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), B_z' = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right) \end{cases} \tag{8.1}$$

其中，$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$。

解：（1）由已知：

$$x' = Ax + Bt,\ \ t' = Cx + Dt \tag{1}$$

$$x = Ax' - Bt',\ \ t = -Cx' + Dt' \tag{2}$$

联立得：

$$A = D,\ \ A^2 - BC = 1 \tag{3}$$

又，考虑S系中一个光子，满足$x = ct$。那么在S'系中：

$$x' = (Ac + B)t,\ \ t' = (D + Cc)t \tag{4}$$

由光速不变：$\frac{x'}{t'}=c$，得到：

$$\frac{B}{c^2}=C \tag{5}$$

由于S′系的点$x'=0$对应S系的$x=vt$，故：

$$B=-vA \tag{6}$$

联立以上结果，得到：

$$A=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad B=-\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad C=-\frac{v}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad D=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{7}$$

（2）由已知，(x_k,t_k)的取值使得以下表达式L的值取极小值：

$$L=\sum_{i=1,2}m_i\left(\sqrt{c^2t_k^2-(x_k-x_i)^2}+\sqrt{c^2(t_1-t_k)^2-(x_i'-x_k)^2}\right) \tag{8}$$

因此：

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}=\sum_{i=1,2}m_i\left(\frac{x_k-x_i}{\sqrt{c^2{t_k}^2-(x_k-x_i)^2}}-\frac{x_i'-x_k}{\sqrt{c^2(t_1-t_k)^2-(x_i'-x_k)^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{c}\sum_{i=1,2}\left(\frac{m_iv_i}{\sqrt{1-{v_i}^2/c^2}}-\frac{m_iv_i'}{\sqrt{1-{v_i}'^2/c^2}}\right)=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_k}=\sum_{i=1,2}m_ic^2\left(-\frac{t_k}{\sqrt{c^2{t_k}^2-(x_k-x_i)^2}}-\frac{t_1-t_k}{\sqrt{c^2(t_1-t_k)^2-(x_i'-x_k)^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{c}\sum_{i=1,2}\left(\frac{m_ic^2}{\sqrt{1-{v_i}^2/c^2}}-\frac{m_ic^2}{\sqrt{1-{v_i}'^2/c^2}}\right)=0 \tag{10}$$

因此，存在守恒量

$$\sum\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

（即动量）和

$$\sum\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

（即能量）。

（3）由于尺缩效应，S系中负电荷的密度变为了原来的$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$倍。

因此，在S′系中，正负电荷密度：

$$\lambda_+=\frac{\lambda}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad \lambda_-=\lambda\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{11}$$

故，S′系中：

$$\lambda'=\lambda_+-\lambda_-=\frac{\lambda v^2}{c\sqrt{c^2-v^2}} \tag{12}$$

S'系中电荷受力：

$$F'=\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}\times\frac{v^2}{c\sqrt{c^2-v^2}} \tag{13}$$

而由于S系中正负电荷相等，故在仅考虑电场的情况下，S系中点电荷不受力。
而根据力变换，S系中点电荷本应受到的力为：

$$F=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}F'=\frac{qv^2\lambda}{2\pi\epsilon_0 dc^2} \tag{14}$$

故S系中点电荷处的磁场为：

$$B=\frac{F}{qv}=\frac{v\lambda}{2\pi\epsilon_0 dc^2} \tag{15}$$

（4）设S系中的电场为$E(x,y,z)$，且S系中无磁场。则根据电磁场变换，S'系中的电磁场为：

$$E_x'(x',y',z',t')=E_x(\gamma(x+vt),y,z) \tag{16}$$

$$E_y'(x',y',z',t')=\gamma E_y(\gamma(x+vt),y,z) \tag{17}$$

$$E_z'(x',y',z',t')=\gamma E_z(\gamma(x+vt),y,z) \tag{18}$$

$$B_x'(x',y',z',t')=0 \tag{19}$$

$$B_y'(x',y',z',t')=-\frac{\gamma v}{c^2}E_z(\gamma(x+vt),y,z) \tag{20}$$

$$B_z'(x',y',z',t')=\frac{\gamma v}{c^2}E_y(\gamma(x+vt),y,z) \tag{21}$$

由S系中高斯定理：

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=-\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{22}$$

又，由尺缩效应：

$$\rho'=\gamma\rho \tag{23}$$

故：

$$\nabla\cdot\vec{E}'=\frac{\partial E'_x}{\partial x'}+\frac{\partial E'_y}{\partial y'}+\frac{\partial E'_z}{\partial z'}=\gamma\frac{\partial E_x}{\partial x}+\gamma\frac{\partial E_y}{\partial y}+\gamma\frac{\partial E_z}{\partial z}=-\frac{\gamma\rho}{\epsilon_0}=-\frac{\rho'}{\epsilon_0} \tag{24}$$

故第一式得证。
由S系中静电场无旋：

$$\nabla\times\vec{E}=0\Rightarrow\frac{\partial E_x}{\partial y}=\frac{\partial E_y}{\partial x},\ \frac{\partial E_y}{\partial z}=\frac{\partial E_z}{\partial y},\ \frac{\partial E_z}{\partial x}=\frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{25}$$

因此：

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{E}'&=\left(\frac{\partial E_z{}'}{\partial y'}-\frac{\partial E_y{}'}{\partial z'}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial E_x{}'}{\partial z'}-\frac{\partial E_z{}'}{\partial x'}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial E_y{}'}{\partial x'}-\frac{\partial E_x{}'}{\partial y'}\right)\hat{z}\\&=\left(\gamma\frac{\partial E_z}{\partial y}-\gamma\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\gamma^2\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\gamma^2\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z}\\&=(1-\gamma^2)\frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{y}-(1-\gamma^2)\frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{x}=\frac{\gamma^2v^2}{c^2}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\hat{y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{x}\right)\end{aligned} \tag{26}$$

又：

$$\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'}=\frac{\partial B_x{}'}{\partial t'}\hat{x}+\frac{\partial B_y{}'}{\partial t'}\hat{y}+\frac{\partial B_z{}'}{\partial t'}\hat{z}=\frac{\gamma^2v^2}{c^2}\left(-\frac{\partial E_z}{\partial x}\hat{y}+\frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{x}\right) \tag{27}$$

故：

$$\nabla\times\vec{E}'=-\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'}\tag{28}$$

故第二式得证。

用同样的方法，可以用这一方式推出全部麦克斯韦方程组，进而建立起电磁学的完整体系。

评分标准：本题满分 40 分。

第（1）问 8 分：（1）-（6）式各 1 分，答案 2 分。

第（2）问 8 分：（7）-（9）式各 2 分，答案 2 分。

第（3）问 6 分：（11）-（14）式各 1 分，答案 2 分。

第（4）问 18 分：（16）-（23）式各 1 分，（24）-（28）式各 2 分。

版权信息

命题人

吴彦玺 戴正宇 高铭泽 丁卓立 熊程宇 杨 帆 张书源 吴愉轩

审题人

孙镕希 曹云博 任宇桐 吴弈笛 马浩然 刘家亦 吴彦玺 戴正宇 高铭泽 丁卓立 熊程宇 杨 帆 张书源 吴愉轩

联系方式

微信公众号
CPHOS

官方网站
www.cphos.cn

CPHOS 论坛

邮箱
service@cphos.cn

微信小程序
CPHOS 物理竞赛联考