

## 第 23 届 CPHOS 物理竞赛联考（复赛模拟赛）

### 理论试题参考答案及评分标准

本文件于 2024 年 9 月 11 日 10:30 发布，最后更新于 2024 年 9 月 11 日 10:26。

CPHOS 物理竞赛联考是开放性公益性的考试，有意向参与的教师和学生可以关注“CPHOS”微信公众号进行报名，报名后方可参与联考。请使用“CPHOS 物理竞赛联考”微信小程序完成答题卡上传、阅卷、成绩查询等操作。联系方式见试题末尾。

#### 一、（40 分）锥形陀螺

陀螺是一种拥有悠久历史的儿童玩具，同时其中的原理也可以在航海等多方面应用。现在我们考虑一个质量均匀分布的圆锥形陀螺，如图1.1所示，其半顶角为 $\alpha$ ，高为 $h$ ，质量为 $m$ 。使陀螺在水平地面上绕其顶点转动，顶点固定在原点 $O$ 处。不考虑可能的阻力。

（1）计算陀螺绕其轴线的转动惯量 $I_1$ 。

（2）现在使陀螺旋转时其轴线与竖直方向夹角恒定为 $\beta$ ，当陀螺轴线绕竖直方向公转角速度为 $\omega$ 时，求陀螺的角动量，用水平与竖直分量大小表示即可。令 $k^2 = \frac{g}{\omega^2 h}$ ， $g$ 为重力加速度。

（3）求此时陀螺转动的最小总角速度大小 $\omega_0$ 表达式，并代入 $\alpha = \frac{\pi}{12}$ 、 $\beta = \frac{\pi}{6}$ 计算数值，系数保留 3 位小数。

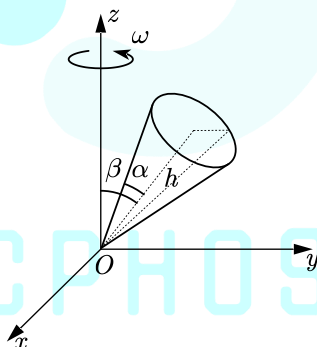


图1.1 圆锥在地面上转动

解：（1）记陀螺密度为 $\rho$ 。考虑对于距离顶点 $x$ 处薄片

$$r = x \tan \alpha \quad (1)$$

$$dm = \rho \pi r^2 dx \quad (2)$$

对质量

$$m = \int dm = \frac{\pi \rho h^2}{3 \cot^2 \alpha} \quad (3)$$

故

$$\rho = \frac{3m \cot^2 \alpha}{\pi h^2} \quad (4)$$

对转动惯量

$$dI_1 = \frac{1}{2} dm r^2 \quad (5)$$

$$I_1 = \int dI_1 = \frac{3}{10} m h^2 \tan^2 \alpha \quad (6)$$

(2) 【理解一、“角动量”为圆锥相对于原点的角动量】

对陀螺，过顶点垂直轴线方向

$$dI_2 = \frac{1}{4} dm r^2 + dm x^2 \quad (7)$$

$$I_2 = \int dI_2 = \frac{3}{20} (4 + \tan^2 \alpha) m h^2 \quad (8)$$

对陀螺质心

$$h_c = \frac{\int x dm}{m} = \frac{3}{4} h \quad (9)$$

记陀螺角速度沿轴向分量为 $\omega_1$ ，垂直分量为 $\omega_2$ 。

对角动量，有

$$L_{\parallel} = I_1 \omega_1 \sin \beta - I_2 \omega_2 \cos \beta \quad (10)$$

$$L_{\perp} = I_1 \omega_1 \cos \beta + I_2 \omega_2 \sin \beta \quad (11)$$

由角动量定理，可得

$$\frac{dL}{dt} = \omega L_{\parallel} = M \quad (12)$$

此时对于力矩 $M$

$$M = m g h_c \sin \beta \quad (13)$$

联立可化简得

$$2\omega_1 \sin \beta \tan^2 \alpha - \omega_2 \cos \beta (4 + \tan^2 \alpha) = 5k^2 \omega \sin \beta \quad (14)$$

对于陀螺的公转，考虑陀螺底部中心

$$v = \omega h \sin \beta = \omega_2 h \quad (15)$$

即

$$\omega_2 = \omega \sin \beta \quad (16)$$

由 (14) (16) 式可得

$$\omega_1 = \frac{5k^2 + (4 + \tan^2 \alpha) \cos \beta}{2 \tan^2 \alpha} \omega \quad (17)$$

代入，有

$$L_{\parallel} = \frac{3}{4} k^2 m \omega h^2 \sin \beta \quad (18)$$

$$L_{\perp} = \frac{3}{20} m \omega h^2 [(4 + \tan^2 \alpha) + 5k^2 \cos \beta] \quad (19)$$

(3) 直接写出总角速度大小

$$\omega_{all} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \quad (20)$$

即

$$\omega_{all} = \omega \frac{\sqrt{25k^4 + 10k^2(4 + \tan^2 \alpha) \cos \beta + 4 \tan^4 \alpha \sin^2 \beta + (4 + \tan^2 \alpha)^2 \cos^2 \beta}}{2 \tan^2 \alpha} \quad (21)$$

由题，考虑到 $k\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$ ，由均值不等式有

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{10 \cos \beta (4 + \tan^2 \alpha) + 10 \sqrt{\cos^2 \beta (4 + \tan^2 \alpha)^2 + 4 \sin^2 \beta \tan^4 \alpha}}}{2 \tan^2 \alpha} \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (22)$$

代入数值

$$\omega_0 = 58.487 \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (23)$$

【理解二、“角动量”为圆锥相对于圆锥质心的角动量】

由于题目中未明确指出“角动量”的参考点，所以若考生计算圆锥相对于圆锥质心的角动量可以按照以下答案及评分标准得分：

$$I_{c1} = I_1 = \frac{3}{10} m h^2 \tan^2 \alpha \quad (6')$$

$$I_{c2} = I_2 - m h_c^2 = \frac{3}{80} (1 + 4 \tan^2 \alpha) m h^2 \quad (8')$$

对角动量

$$L_{c\parallel} = I_{c1} \omega_1 \sin \beta - I_{c2} \omega_2 \cos \beta \quad (10')$$

$$L_{c\perp} = I_{c1} \omega_1 \cos \beta + I_{c2} \omega_2 \sin \beta \quad (11')$$

代入，有

$$L_{c\parallel} = \frac{3}{4} m \omega h^2 \sin \beta \left( k^2 + \frac{3}{4} \cos \beta \right) \quad (18')$$

$$L_{c\perp} = \frac{3}{20} m \omega h^2 \left[ \left( \frac{1 + 15 \cos^2 \beta}{4} + \tan^2 \alpha \right) + 5 k^2 \cos \beta \right] \quad (19')$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 6 分：(1) (2) (3) (4) (5) (6) 式各 1 分；

【理解一】

第 (2) 问 26 分：(7) 式 1 分，(8) 式 2 分，(9) 式 1 分，(10) (11) (12) 式各 2 分，(13) 式 1 分，(14) 式 3 分，(15) 式 1 分，(16) 式 2 分，(17) (18) (19) 式各 3 分；

第 (3) 问 8 分：(20) 式 1 分，(21) 式 3 分，(22) 式 3 分，(23) 式 1 分。

注：可以不使用字母  $k$ ，计算结果正确即可得分。

【理解二】

如考生认为角动量以质心为参考点，(6') 不计分，其余式子代替原式给分即可。

## 二、(40 分) 钠原子气体的色散

本题旨在考虑电磁波在钠原子气体中传播时的行为。钠原子可以被简化为带有单位电荷量  $e$  的原子实和电荷量为  $-e$  的外层电子云。我们假设钠原子外层电子云分布和氢原子电子云分布相似，即有电荷密度分布为

$$\rho = -\frac{e}{\pi a^3} e^{-\frac{2}{a} r} \quad (2.1)$$

在以下的问题中，我们假设电子云是刚性的，即当电子云和原子实发生相对位移时电子云的形状不变，电荷密度分布也不变。

(1) 求电子云分布产生的电场分布  $\vec{E} = \vec{E}(r)$ 。

(2) 假设电子云的总质量是  $m$ ，原子实的质量远大于电子云的质量。现将一束电磁波入射由这样的钠原子组成的气体，设钠原子数密度为  $n$ 。电磁波中与物质主要作用成分为电场，电场会使电子云与原子实发生相对位移，我们假设电磁波不是很强，以至于这样的位移远小

于  $a$ 。同时，我们假设电磁波波长  $\lambda \gg a, \sqrt[3]{\frac{1}{n}}$ 。

(2.1) 求电子云中心与原子实发生相对位移  $\delta \vec{r} = \delta r \hat{x}$  时电子云收到的作用力  $\delta \vec{F}$ ，已知  $\delta r \ll a$ 。

(2.2) 可以设原子附近电磁波形式为  $\vec{E}(t) = E_0 \cos \omega t \hat{x}$ ，试由此列出电子云运动满足的微分方程，设电子云相对原子实的位移为  $\vec{r}$ ，我们同时假设阻尼力可以被忽略。

(2.3) 求解 (2.2) 中得到的方程，仅需要写出稳定解。（不考虑发生共振的情况）

(2.4) 电子云与原子实的相对位移会产生偶极矩进而产生极化矢量  $\vec{P}$ ，试求  $\vec{P}$  的表达式。

(2.5) 观察  $\vec{P}$  的表达式，试进一步给出钠原子气体的等效相对介电常数  $\epsilon_r$ 。

提示：你可能会用到下面的数学公式：

$$\int e^{-\lambda x} x^2 dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^3} (\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + 2) + C \quad (2.2)$$

$$\text{当 } x \text{ 很小时, } e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \quad (2.3)$$

解：(1) 先考虑一个球壳，电荷面密度为  $\sigma$ ，半径为  $R$ ，则其电场分布为：

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{R^2}{r^2} \hat{r}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases} \quad (1)$$

则对本题中情形，可将电子云分割成一系列球壳积分，因此有

$$\vec{E}(r) = \int_0^r \frac{e}{\pi a^3} e^{-\frac{2}{a}R} \cdot \frac{R^2}{r^2} \hat{r} dR = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( 1 - e^{-\frac{2}{a}r} \left( 1 + 2\frac{r}{a} + 2\frac{r^2}{a^2} \right) \right) \hat{r} \quad (2)$$

(2)

(2.1) 由相互作用力的性质，仅需计算此时电子云对原子实的力即可。此时原子实相对电子云中心的位矢为  $\delta \vec{r}' = -\delta \vec{r} = -\delta r \hat{x}$ 。因此有

$$\delta \vec{F}' = -eE(\delta r) \hat{x} \quad (3)$$

将电场在  $r = 0$  附近级数展开可以得到

$$E(r) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( 1 - \left( 1 - 2\frac{r}{a} + 2\frac{r^2}{a^2} - \frac{4}{3}\frac{r^3}{a^3} \right) \left( 1 + 2\frac{r}{a} + 2\frac{r^2}{a^2} \right) \right) = -\frac{e}{3\pi\epsilon_0 a^3} r \quad (4)$$

因此有

$$\delta \vec{F}' = \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 a^3} \delta r \hat{x} \quad (5)$$

$$\delta \vec{F} = -\frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 a^3} \delta r \hat{x} \quad (6)$$

(2.2) 原子实对电子云产生的回复力为

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r} \quad (7)$$

因此可以列出运动方程：

$$m\ddot{\vec{r}} + \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r} = -eE_0 \cos \omega t \hat{x} \quad (8)$$

(2.3) 设稳定解为  $\vec{r} = \vec{r}_0 \cos \omega t$ ，因此有

$$\left( \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 a^3} - m\omega^2 \right) \vec{r}_0 = -eE_0 \hat{x} \quad (9)$$

由此可得

$$\vec{r} = \frac{eE_0}{m\omega^2 - \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 a^3}} \cos \omega t \hat{x} \quad (10)$$

(2.4) 由电子云中心和原子实的相对位移产生的偶极矩为

$$\vec{p} = -e\vec{r} = \frac{e^2}{\frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 a^3} - m\omega^2} \vec{E} \quad (11)$$

因此极化强度矢量为

$$\vec{P} = n\vec{p} = \frac{ne^2}{\frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 a^3} - m\omega^2} \vec{E} \quad (12)$$

(2.5) 观察到  $\vec{P} \propto \vec{E}$ ，而一般的极化关系为

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E} \quad (13)$$

因此有

$$\epsilon_r = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 \left( \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 a^3} - m\omega^2 \right)} \quad (14)$$

评分标准：本题满分 40 分。

第 (1) 问 9 分：(1) 式 4 分，(2) 式 5 分；

第 (2) 问 31 分：

第 (2.1) 小问 11 分：(3) 式 1 分，(4) 式 5 分，(5) 式 1 分，(6) 式 4 分；

第 (2.2) 小问 4 分：(7) 式 1 分，(8) 式 3 分；

第 (2.3) 小问 6 分：(9) (10) 式各 3 分；

第 (2.4) 小问 6 分：(11) (12) 式各 3 分；

第 (2.5) 小问 4 分：(13) 式 1 分，(14) 式 3 分。

### 三、(40 分) 球面反射镜

如图3.1，考虑一个半径为 $r$ 的空心球体，内表面为理想反射镜。在球体左侧极点处内表面放入半径为 $r_0$ 的均匀球形余弦发光体，光源亮度为 $B$ ，注意光源完全处在球体内部。已知 $r_0 \ll r$ ，球内折射率视为1。以球心为原点，图中向右方向为极轴建立极坐标系 $(r, \theta)$ 。

(1) 求出光源对于 $\theta = 0$ 附近的凹面镜傍轴成像位置，并求出该位置的横向放大率 $V$ 。

(2) 考虑一个小圆盘探测器，半径为 $r_0$ ，探测平面垂直于极轴且轴对称地摆放于极轴上，朝向和背向光源的两面均可以进行照度探测。现在将空心球体内表面 $\theta > \pi/3$ 的区域全部涂黑，不反射任何光线。设圆盘在轴上恰可以接收到在 $\theta$ 处反射的光线。

(2.1) 求出小圆盘朝向光源和背向光源两面接收的照度大小之比，结果参量只保留 $\theta$ 。并代入 $\theta = \frac{\pi}{6}$ ，求该比例的数值解并保留四位有效数字。

(2.2) 简要说明结果的适用范围，解释结果与物理实际的差异来源于何处，并解释涂黑的用意。

可供参考的信息：

I. 光源在某一方向上射出的光的光强为 $I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$ ，定义为该方向上单位立体角通过的光通量；

II. 光源在某一方向上的光亮度为 $B = \frac{dI}{ds \cos \phi}$ （式中的 $\phi$ 为出射方向与面元法线的夹角，也即

计算 $d\Phi$ 时的立体角微元方向与面元法线的夹角), 定义为单位投影面积在该方向上发出的光强;

III. 照度定义为照射在单位面积上的光通量 $E = \frac{d\Phi'}{ds'}$ ;

IV. 余弦发光体意味着光源上任何一个面元对任何出射角的亮度 $B$ 都相同, 也即光强正比于出射角的余弦值 $\cos\phi$ 。

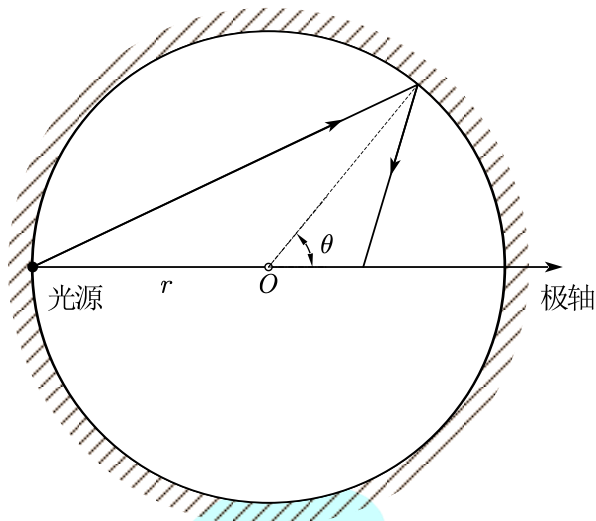


图3.1 光源与球面反射镜

解: (1) 直接使用成像公式即可

$$\frac{1}{2r} + \frac{1}{r - r_\theta} = \frac{2}{r} \quad (1)$$

解得

$$r_\theta = \frac{1}{3}r \quad (2)$$

横向放大率

$$V = -\frac{r - r_\theta}{2r} = -\frac{1}{3} \quad (3)$$

(2)

(2.1) 先计算 $\theta$ 处反射光到轴上的位置, 由正弦定理

$$\frac{\sin \frac{3\theta}{2}}{2r \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin \theta}{r + r_\theta} \quad (4)$$

化简得到

$$r_\theta = \frac{1}{1 + 2 \cos \theta} r \quad (5)$$

考虑从 $\frac{\theta}{2} \rightarrow \frac{\theta}{2} + \frac{d\theta}{2}$ 的光源上立体角发射的光通量, 余弦发光体说明等效面积为 $\pi r_0^2$

$$d\Phi = B \cdot \pi r_0^2 \cdot 2\pi \sin \frac{\theta}{2} d\frac{\theta}{2} \quad (6)$$

光线将斜入射到探测器上, 入射光线相对于极轴的夹角为 $\frac{3\theta}{2}$ , 则微元关系为

$$dr_\theta \cdot \tan \frac{3\theta}{2} = 2r_0 \quad (7)$$

联立上面各式，可以得到入射的光通量为

$$d\Phi' = \frac{\pi^2 Br_0^3}{2r} \cdot \frac{(1 + 2 \cos \theta)^2}{\tan \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \quad (8)$$

于是照度为

$$E = \frac{\pi Br_0}{2r} \cdot \frac{(1 + 2 \cos \theta)^2}{\tan \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \quad (9)$$

正面的照度为

$$E_i = \frac{\pi Br_0^2}{4r^2} \cdot \frac{(1 + 2 \cos \theta)^2}{(1 + \cos \theta)^2} \quad (10)$$

照度比

$$\frac{E_i}{E} = \frac{r_0}{2r} \cdot \frac{\tan \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{(1 + \cos \theta)^2} \quad (11)$$

代入  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ，得到数值解为

$$\frac{E_i}{E} = 0.1387 \frac{r_0}{r} \quad (11')$$

(2.2)

1. 根据 (9) 式，背面收到的光通量在  $\theta \rightarrow 0$  时发散，与物理实际相违，所以适用范围是当  $\theta$  足够大以至于 (7) 式在小角近似下成立。

2. 差异即来源于上一点所说的当  $\theta \rightarrow 0$  时 (7) 式在小角近似下并不成立，此时应该使用严格的几何分析进行计算，具体计算可由同学们下来自己进行。（圆盘正面的遮挡带来的照度损失没有被考虑，但这并不是发散的主要原因，因为遮挡掉的照度只是一个正常量项。）

3. 涂黑给出了条件  $\theta < \frac{\pi}{3}$ ，保证了结果不会为负，同时涂黑保证了不必分析多次反射和光源附近反射光的影响。

**评分标准：本题满分 40 分。**

**第 (1) 问 9 分：(1) (2) (3) 式各 3 分；**

**第 (2) 问 31 分：**

**第 (2.1) 问 25 分：(4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) 式各 3 分，(11) 或 (11') 式答对其一即得 4 分；**

**第 (2.2) 问 6 分：三条解释每条 2 分。**

#### 四、(50 分) 旋转圆环与小珠

一个半径  $R$  的光滑圆环，其上套有一质量为  $m$  的小珠，圆环绕竖直一轴转动，圆心与轴的距离为  $b$ ，小珠可在圆环上自由滑动。重力加速度大小为  $g$ 。

(1) 如图 4.1 所示，圆环和转轴在同一平面，圆环绕轴以匀角速度  $\omega$  旋转，以  $\theta$  表示小珠方位。

(1.1) 将所有的保守力做功都与势能变化相联系，试在随圆环转动系中写出小珠机械能表达式（表达式中可以含有  $\dot{\theta}$ ）。

(1.2) 导出小珠处于平衡位置时， $\theta$  所需满足的条件。

(1.3) 对于 (1.2) 中的结果，利用图解法分析  $\theta$  取值在 I ( $0 \leq \theta < \pi/2$ )、II ( $\pi/2 \leq \theta < \pi$ )、

III( $\pi \leq \theta < 3\pi/2$ ) 和 IV ( $3\pi/2 \leq \theta < 2\pi$ ) 象限中,分别可能出现的小珠的平衡位形的数目,以及相应的 $b$ 、 $R$ 、 $\omega$ 各参量之间需要满足的条件。

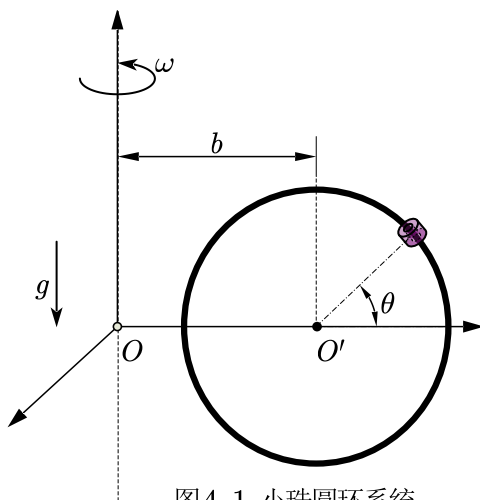


图4.1 小球圆环系统

(2) 如图4.2, 图4.3和图4.4所示, 圆环平面与径向夹角为 $\varphi$ , 圆环绕轴以匀角速度 $\omega$ 旋转, 以 $\theta$ 表示小珠方位。

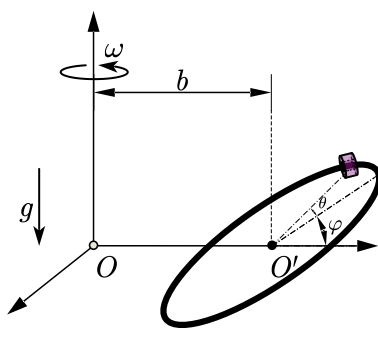


图4.2 立体视图

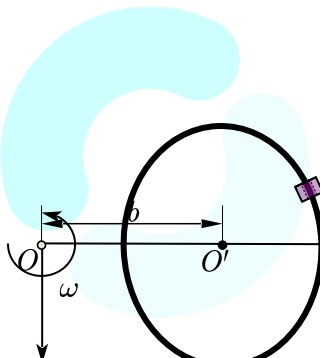


图4.3 俯视图

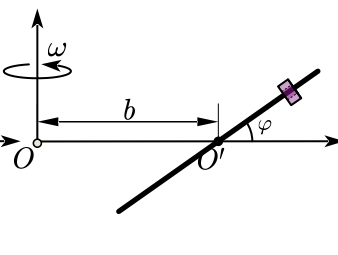


图4.4 主视图

(2.1) 试在随圆环转动系中写出小珠机械能表达式(表达式中可以含有 $\dot{\theta}$ )。

(2.2) 取 $\varphi = \pi/6$ 、 $b = R$ , 分别分析 $\theta = 0$ 、 $\pi$ 是稳定平衡位置时,  $\omega$ 需要满足的条件以及满足条件时的小振动周期。

解: (1)

(1.1) 小珠机械能由三部分组成: 动能、重力势能、离心势能。动能 $E_k$ 为

$$E_k = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

重力势能 $E_{pg}$ 为(以 $\theta = 0$ 为势能零点)

$$E_{pg} = mgR \sin \theta \quad (2)$$

离心势能 $E_{pr}$ 为(以 $r = 0$ 为势能零点)

$$E_{pr} = -\frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (3)$$

其中 $r = b + R \cos \theta$ 。故小珠的机械能 $E(\theta)$ 为

$$E(\theta) = E_k + E_{pg} + E_{pr} = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR \sin \theta - \frac{1}{2} m \omega^2 (b + R \cos \theta)^2 \quad (4)$$

(1.2) 小珠在平衡位置时其势能取极值, 即



$$\frac{dE_p(\theta)}{d\theta} = mgR \cos \theta + m\omega^2 R(b + R \cos \theta) \sin \theta = 0 \quad (5)$$

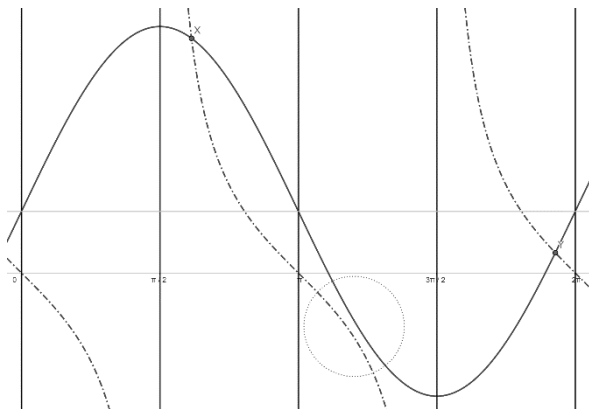
可得小珠处于平衡位置的条件是,  $\theta$  必须满足

$$\tan \theta + \frac{R}{b} \sin \theta + \frac{g}{\omega^2 b} = 0 \quad (6)$$

(1.3) 采用图解法, 将 (6) 式写为

$$-\tan \theta = A \sin \theta + B \quad (7)$$

其中  $A = \frac{R}{b}$ ,  $B = \frac{g}{\omega^2 b}$  均为正值。在坐标纸上绘示意图如下:



答图 4.1 作图法求解

从图中不难看出, 两函数在 I 象限有 0 个交点, 在 II、IV 象限各有 1 个交点, 在 III 象限有 0-2 个交点 (虚线圆处)。

对于 III 象限, 考虑临界情况: 1 个交点。此时两曲线在交点处相切, 对  $\theta$  的导数相等, 有

$$-\frac{1}{\cos^2 \theta_0} = A \cos \theta_0 \quad (8)$$

求出  $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$  后, 代入 (7) 式得

$$B_0 = A \left( 1 - A^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (9)$$

$B$  越大, 正弦函数曲线上移, 故  $B > B_0$  对应 0 个交点、 $B = B_0$  对应 1 个交点、 $B < B_0$  对应 2 个交点。

注意, 当  $A \leq 1$ ,  $B = 0$  或不存在, 故此时 III 象限无平衡位置。

综上, I、II、IV 象限分别有 0、1、1 个平衡位置; 当  $b \geq R$ , III 象限有 0 个平衡位置; 当  $b < R$ , 当  $\omega < \omega_0$ 、 $\omega = \omega_0$ 、 $\omega > \omega_0$ , III 象限分别有 0、1、2 个平衡位置, 其中

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R \left( 1 - \left( \frac{R}{b} \right)^{-\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}}} \quad (10)$$

(2)

(2.1) 小珠机械能由三部分组成: 动能、重力势能、离心势能。

动能  $E_k$  为

$$E_k = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 \quad (11)$$

重力势能  $E_{pg}$  为 (以  $\theta = \frac{\pi}{2}$  为势能零点)

$$E_{pg} = mgR \sin \varphi \cos \theta \quad (12)$$

离心势能 $E_{pr}$ 为（以 $r=0$ 为势能零点）

$$E_{pr} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (13)$$

其中由几何关系有

$$r^2 = (b + R \cos \varphi \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2 \quad (14)$$

故小珠的机械能 $E(\theta)$ 为

$$E(\theta) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR \sin \varphi \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2[(b + R \cos \varphi \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2] \quad (15)$$

(2.2) 代入 $\varphi = \pi/6$ 、 $b = R$ ，有

$$E_p(\theta) = \frac{1}{2}mgR \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \left( \frac{7}{4} + \sqrt{3} \cos \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) \quad (16)$$

在 $\theta = 0$ 、 $\pi$ 处分别对 $E_p(\theta)$ 展开到二阶。

$\theta \sim 0$ 时，有

$$E_p(\theta) \approx E_p(0) + \left( \left( \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{8} \right) \omega^2 - \frac{1}{4} \frac{g}{R} \right) mR^2 \theta^2 \quad (17)$$

稳定平衡要求二次系数大于零，临界为

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{(2\sqrt{3}-1)R}} \quad (18)$$

当 $\omega > \omega_0$  时，在 $\theta = 0$ 处的小振动周期为

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{4}{(2\sqrt{3}-1)\omega^2 - \frac{2g}{R}}} \quad (19)$$

$\theta \sim \pi$ 时，有（设 $\vartheta = \theta - \pi \sim 0$ ）

$$\begin{aligned} E_p(\theta) &= -\frac{1}{2}mgR \cos \vartheta - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \left( \frac{7}{4} - \sqrt{3} \cos \vartheta + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta \right) \\ &\approx E_p(\pi) + \left[ \frac{1}{4} \frac{g}{R} - \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{8} \right) \omega^2 \right] mR^2 \vartheta^2 \end{aligned} \quad (20)$$

稳定平衡要求二次系数大于零，临界为

$$\omega_\pi = \sqrt{\frac{2g}{(2\sqrt{3}+1)R}} \quad (21)$$

当 $\omega < \omega_\pi$  时，在 $\theta = 0$ 处的小振动周期为

$$T_\pi = 2\pi \sqrt{\frac{4}{\frac{2g}{R} - (2\sqrt{3}+1)\omega^2}} \quad (22)$$

评分标准：本题满分 50 分。

第 (1) 问 26 分：

第 (1.1) 小问 8 分：(1) (2) (3) (4) 式各 2 分；

第 (1.2) 小问 6 分：(5) (6) 式各 3 分；

第 (1.3) 小问 12 分：(7) (8) (9) (10) 式各 2 分，讨论和分析 4 分；

第 (2) 问 24 分：

第 (2.1) 小问 10 分：(11) (12) (13) (14) (15) 式各 2 分；

## 第(2.2)小问14分: (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) 式各2分。

## 五、(40分) 铜管中小磁体的下落转动

如图5.1所示, 有一个无穷长的导体薄圆柱壳, 壳的厚度为 $\delta$ , 圆柱半径为 $R$ , 电阻率为 $\rho$ 。将一个磁矩为 $m$ 的小永磁体, 已知磁体足够小, 以至于可以略去它的几何尺寸。在中轴线上释放, 利用外力其匀速下落, 速率为 $v$ 。设某一时刻磁矩朝向与圆柱轴线所成角度为 $\alpha$ , 已知 $\alpha$ 较小(但是请不要做小量近似), 可以忽略平行于 $z$ 方向的平面内的磁通量变化。

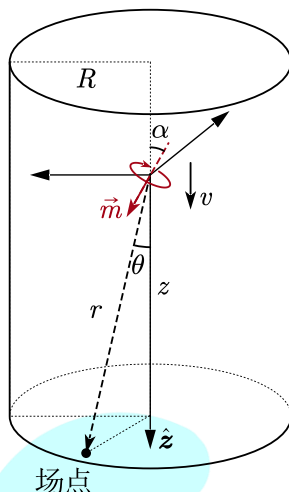


图5.1 磁矩在圆柱筒中下坠

(1) 考虑圆柱上在磁矩前方且与磁矩距离为 $z$ 的一个圆形水平截面, 试计算该截面区域内的磁通量大小 $\Phi = \Phi(z)$ 。

(2) 磁矩在下落过程中轻微振荡导致 $\alpha$ 角变化, 其变化率为 $\dot{\alpha} = \omega$ , 试计算小永磁体受到铜管给其的力矩大小。

提示:

磁矩是一个矢量, 磁矩 $\vec{m}$ 在对其位矢为 $\vec{r}$ 处产生的磁场为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}] \quad (5.1)$$

以下公式对你或许有帮助:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3} dx = \frac{3\pi}{8} \quad (5.2)$$

解: (1) 作为一个矢量, 磁矩可以分解为水平和竖直方向分量, 容易看出水平的磁矩分量对磁通量没有贡献, 故只计算磁矩的沿 $z$ 方向的竖直分量即可

$$m_z = m \cos \alpha \quad (1)$$

## 【解法一】

考虑以磁体位置为原点, 半径为 $\sqrt{R^2 + z^2}$ 的球体, 注意到磁矩竖直分量 $m_z$ 在该截面对应球冠上产生的磁通量与在截面上的磁通量相同, 故直接计算球冠上的磁通即可。 $\theta$ 处面元的法向磁场 $B_n$ 为

$$B_n = \frac{\mu_0 m_z}{4\pi} \cdot \frac{2 \cos \theta}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

则 $\theta \rightarrow \theta + d\theta$ 对应的立体角上面元磁通

$$d\Phi = B_n \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \quad (3)$$

积分至截面边缘，也即  $\theta_0 = \arctan \frac{R}{z}$  处

$$\Phi(z) = \int_0^{\theta_0} d\Phi \quad (4)$$

得到

$$\Phi(z) = \frac{\mu_0 m R^2 \cos \alpha}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

### 【解法二】

考虑互感法，假设圆筒上此位置有一个电流环，电流大小为  $I'$ ；又假设磁矩面积为  $S$ ，则电流  $I'$  磁矩上产生的磁通量为

$$\Phi' = B'S = \frac{\mu_0 I' R^2 S \cos \alpha}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2')$$

根据定义，可得磁矩和电流环的互感为

$$M = \frac{\Phi'}{I'} = \frac{\mu_0 R^2 S \cos \alpha}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3')$$

所以磁矩在电流环上产生的磁通量为

$$\Phi(z) = MI = \frac{\mu_0 S R^2 \cos \alpha}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot I = \frac{\mu_0 m R^2 \cos \alpha}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4')$$

(2) 由法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon(z) = -\frac{d\Phi(z)}{dt} \quad (6)$$

得到

$$\varepsilon(z) = \frac{\mu_0 m R^2 \omega \sin \alpha}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\mu_0 m R^2 z v \cos \alpha}{2(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (7)$$

产生的电流为

$$dI = \varepsilon(z) \cdot \frac{\delta}{2\pi R \rho} dz \quad (8)$$

计算  $z$  到  $z + dz$  处电流圈磁矩产生的磁场，由毕奥—萨伐尔定理

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (9)$$

得到磁场大小为

$$dB = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{dI \cdot R d\theta}{R^2 + z^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\delta}{2\pi R \rho} \cdot \varepsilon(z) dz \quad (10)$$

对  $z$  从负无穷到正无穷积分得到

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\delta}{2\pi R \rho} \cdot \varepsilon(z) dz \quad (11)$$

磁矩所受力矩为

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (12)$$

注意到 (13) 式中的磁场积分表达式中原函数中为奇函数和偶函数和, 而积分区间是从负无穷到正无穷, 对积分式化简可以得到

$$B = \frac{\mu_0 R \delta}{4\pi\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 m R^2 \omega \sin \alpha}{2(R^2 + z^2)^3} dz = \frac{\mu_0^2 m R^3 \delta \omega \sin \alpha}{8\pi\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(R^2 + z^2)^3} dz \quad (13)$$

$$M = \frac{\mu_0^2 m^2 R^3 \delta \omega \sin^2 \alpha}{8\pi\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(R^2 + z^2)^3} dz \quad (14)$$

根据数学提示中的积分公式得到

$$M = \frac{3\mu_0^2 m^2 \omega \delta \sin^2 \alpha}{64\rho R^2} \quad (15)$$

评分标准: 本题满分 40 分。

第 (1) 问 15 分: (1) 式各 3 分;

【解法一】(2) (3) (4) (5) 式各 3 分;

【解法二】(2') (3') (4') 式各 4 分;

第 (2) 问 25 分: (6) 式 2 分, (7) (8) (9) 式各 3 分, (10) 式 2 分, (11) (12) 式各 3 分, (13) 式 2 分, (15) 式 4 分。

## 六、(50 分) 相对论情形下的辐射

(1) 考虑温度为  $T_0$ , 半径为  $R_0$  的黑体球, 相对于观测者以速度  $v$  运动, 观测方向与运动方向夹角为  $\theta$ 。为了表述统一, 黑体球静止系记为  $\Sigma'$  系, 物理量用加撇的量表示, 观察者系记为  $\Sigma$  系, 对应的量用不加撇的量表示。

(1.1) 使用相对论多普勒变换, 试求在该方向上单位立体角收到辐射功率。

(1.2) 注意到, 上面的表达式在积分后并不会得到黑体球辐射的总功率, 原因是, 黑体球在相同时间间隔内发出的不同方向的辐射能量, 在  $\Sigma$  系中接收所用的时间间隔并不相同, 进而在观察者系中, 研究相同时间间隔内不同方向接收到的能量 (即直接对上面的公式积分) 并不对应黑体球在相同时间间隔的能量。具体来说, 如图 6.1 所示, 考虑黑体球在时间间隔  $\Delta t$  发出的两列电磁波, 传播时间  $t$  后得到波前, 从中可以明显看出, 在不同方向上, 观察者接收到相邻两个波前 (即接收到对应的能量) 所用的时间间隔不相同。根据这一观点, 计算观察者接收黑体球同一时间间隔发出辐射的功率角分布, 并积分得到总功率。然后对黑体球本身进行分析, 验证结果是否相同。

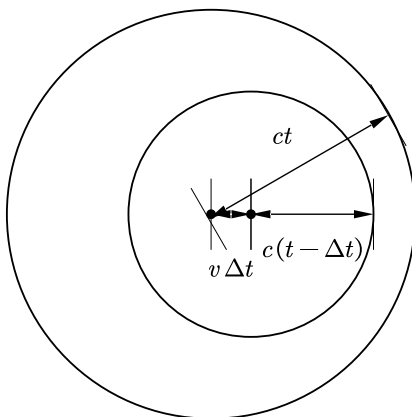


图 6.1 辐射波前示意图

(2) 接 (1), 下面从电磁场的观点, 重新分析这一问题。

(2.1) 考虑到观察距离足够远, 观察范围足够小, 可以将球面波的波前近似成平面波。统一起见, 不妨假设电场方向在纸面内, 磁场方向与纸面垂直向外, 坐标系如图 6.2 所示。根据

电磁场场强变换关系，重新推导电磁场能量密度，即辐射能量的变换关系，有关角度用  $\Sigma$  系中的角度  $\theta$  表示。

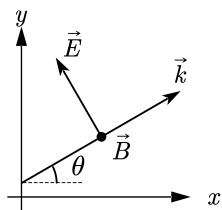


图6.2 电磁波方向

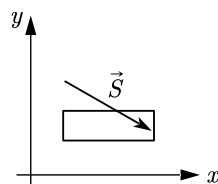


图6.3 提示1图

提示：电磁场变换公式：（ $x$ 方向为换系方向）

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z) & B'_y &= \gamma(B_y + vE_z/c^2) \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y) & B'_z &= \gamma(B_z - vE_y/c^2) \end{aligned}$$

（2.2）我们考虑换系过程中， $\Sigma'$ 系中一定体积  $V$  内电磁场的能量究竟是如何变化的，即我们要将  $\Sigma'$  系中的能量一一对应地变化到  $\Sigma$  系中。在  $\Sigma'$  系中选择一个静止的长方体框架，其框中的能量为  $W'$ 。运用洛伦兹变换将这个框架变换到  $\Sigma$  系中，可以发现，由于异地的同时性被破坏，所以这个框架中的能量并非与  $\Sigma'$  系中的能量相同，需要考虑在这一时间差内流入（出）的能量，进而得到一一对应的能量  $W$ 。试计算  $W$  与  $W'$  之间的关系。

提示 1：考虑一个一边平行于换系方向的长方体（垂直于纸面方向的长度很小，可以忽略该方向上电磁场的变化）作为分析的区域，如图 6.3 所示。

提示 2：电磁场的能量密度表示为  $w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$ ；电磁场的能流密度则可以用波印亭矢量

$\vec{S}$  表示，在真空中的表达式为  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ ，波印亭矢量的方向就是能流的方向。

（2.3）这样，我们重新得到了与相对论多普勒效应频率变换得到的相同结果。试重复（1.1）（1.2）中的操作，再次得到（1.1）（1.2）中的结果，即两个辐射功率角分布。

解：

（1.1）在  $\Sigma'$  系中，单位面积辐射功率

$$P' = \sigma T_0^4 \quad (1)$$

单位时间单位立体角辐射能量

$$\frac{dw'}{dt' d\Omega'} = R_0^2 \sigma T_0^4 \quad (2)$$

考虑到辐射光子数保持不变，有：

$$\begin{aligned} dn &= dn' \\ dw' &= dn' h\nu' \\ dw &= dn h\nu \\ \frac{dw}{dt d\Omega} &= \frac{dw'}{dt' d\Omega'} \cdot \frac{dw}{dw'} \cdot \frac{dt'}{dt} \cdot \frac{d\Omega'}{d\Omega} \end{aligned} \quad (3)$$

由相对论多普勒效应，频率变换

$$\frac{dw}{dw'} = \frac{\nu}{\nu'} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos \theta} \quad (4)$$

时间间隔变换

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5)$$

立体角变换

$$\frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{d\cos\theta}{d\cos\theta'} = \frac{(1 - \beta \cos\theta)^2}{1 - \beta^2} \quad (6)$$

最终得到

$$\frac{dw}{dt d\Omega} = R_0^2 \sigma T_0^4 \cdot \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta \cos\theta)^4} \quad (7)$$

(1.2)

(方法一)

按照提示中的方法，同一时刻接收的辐射并非同一时刻发出的辐射。考虑在  $\Delta t$  时间内发射的辐射，对应于  $(c - v \cos\theta)\Delta t$  接收，对上式因子乘以  $(1 - \beta \cos\theta)$ ，得到：

$$\frac{dw}{dt^* d\Omega} = R_0^2 \sigma T_0^4 \cdot \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta \cos\theta)^3} \quad (8)$$

对上述表达式进行积分，得到：

$$\frac{dw}{dt^*} = 4\pi R_0^2 \sigma T_0^4 \quad (9)$$

(方法二)

考虑  $dt'$  黑体球发出的辐射，在  $\Sigma'$  系中光子均匀分布。不妨设光子总数为  $N$ ，则单位立体角光子数

$$f(\theta') = \frac{N}{4\pi}$$

由于换系过程中光子数不变，有：

$$f(\theta) d\Omega = f(\theta') d\Omega'$$

得到

$$f(\theta) = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta \cos\theta} f(\theta') \quad (8')$$

考虑钟慢效应

$$dt^* = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9')$$

结合立体角变换

$$\frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \frac{d\cos\theta}{d\cos\theta_0} = \frac{(1 - \beta \cos\theta)^2}{1 - \beta^2}$$

得到

$$\frac{dw}{dt^* d\Omega} = R_0^2 \sigma T_0^4 \cdot \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta \cos\theta)^3} \quad (10')$$

对上述表达式进行积分，得到：

$$\frac{dw}{dt^*} = 4\pi R_0^2 \sigma T_0^4 \quad (11')$$

用整体思想进行验证：

换系：

$$dw = \frac{dw'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10)$$

$$dt^* = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (11)$$

得到

$$\frac{dw}{dt^*} = \frac{dw'}{dt'} = 4\pi R_0^2 \sigma T_0^4$$

(2.1) 先在  $\Sigma'$  系中考虑, 设波矢方向与观察方向夹角为  $\theta'$ 。则电磁场不为零的分量

$$E'_x = -E \sin \theta' \quad (12)$$

$$E'_y = E \cos \theta' \quad (13)$$

$$B'_z = B \quad (14)$$

考虑到  $E = cB$ , 电磁场能量密度

$$w' = \frac{1}{2} \epsilon_0 E'^2 + \frac{B'^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 E^2 \quad (15)$$

换系后

$$E_x = -E \sin \theta' \quad (16)$$

$$E_y = \gamma(E \cos \theta' + vB) \quad (17)$$

$$B_z = \gamma \left( B + \frac{vE \cos \theta'}{c^2} \right) \quad (18)$$

算出换系后能量密度

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \epsilon_0 E^2 \cdot \frac{(1 + \beta \cos \theta')^2}{1 - \beta^2} \quad (19)$$

代入波矢角度变换关系

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \quad (20)$$

得到

$$w = \epsilon_0 E^2 \cdot \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^2} = w' \cdot \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \theta)^2} \quad (21)$$

(2.2) 按照  $\Sigma'$  系的同时标准 ( $\Delta t' = 0$ ) 选取两个截面对应体积  $V'$ , 由洛伦兹变换, 在  $\Sigma$  系中对应的体积

$$V = \frac{V' + v\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{V'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (22)$$

由于换系后在  $\Sigma$  系中不同时, 对应两个截面的时间间隔

$$\Delta t = \frac{v\Delta x'}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \quad (23)$$

由于  $\Sigma'$  系中, 坐标越大的位置时刻越晚, 所以流入的界面先截止, 流出的界面后截止。考虑这一段时间内流出的能量, 按照  $\Sigma'$  的同时标准, 修正后  $\Sigma$  系中的能量为

$$W = wV - SA \cos \theta \Delta t \quad (24)$$

其中波印亭矢量大小

$$|\vec{S}| = S = \frac{EB}{\mu_0} = \epsilon_0 c E^2 \cdot \frac{(1 + \beta \cos \theta')^2}{1 - \beta^2} \quad (25)$$

代入角度变换关系得到

$$W = W' \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} \quad (26)$$

(2.3) 上面得到的 (26) 式与 (4) 式物理意义相同。重复类似的操作得到:

$$\frac{dw}{dt d\Omega} = R_0^2 \sigma T_0^4 \cdot \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta \cos \theta)^4} \quad (27)$$

$$\frac{dw}{dt^* d\Omega} = R_0^2 \sigma T_0^4 \cdot \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \quad (28)$$



评分标准：本题满分 50 分。

第 (1) 小问 27 分：

第 (1.1) 小问 16 分：(1) (2) (3) (4) (5) 式各 2 分，(6) (7) 式各 3 分；

第 (1.2) 小问 11 分：

解法一：(8) 式 5 分，(9) 式 4 分；解法二：(8') (9') (11') 式各 3 分；

(10) (11) 式各 1 分；

第 (2) 小问 23 分：

第 (2.1) 小问 9 分：(15) (16) (17) (18) 式各 1 分，(19) 式 2 分，(20) 式 1 分，(21) 式 2 分；

第 (2.2) 小问 8 分：(22) (23) 式各 1 分，(24) (25) (26) 式各 2 分；

第 (2.3) 小问 6 分：(27) (28) 式各 3 分。

### 七、(60 分) 四冲程柴油机

内燃机按照每个工作周期的冲程数量可以分为二冲程内燃机和四冲程内燃机，按照工作介质可以分为汽油机和柴油机。四冲程内燃机的四个冲程分别起到进气、压缩混合气、对外做功提供动力和排出废气的的作用，在实际生活中应用普遍。柴油机和汽油机的主要区别是前者没有火花塞，混合气在压缩的过程中压强和温度达到临界值即发生爆燃。

本题尝试建立一个四冲程柴油机的简易模型，如图 7.1 所示。一个带有两个绝热阀门的绝热气缸由一个光滑活塞连杆结构与飞轮相连接，A 和 B 为两个阀门，其中 A 为进气口，B 为出气口，且 A、B 均有驱动装置使得其在进气或排气冲程开始时打开（即活塞运动方向刚开始折返时）。在各活塞开合后以及气体爆燃后瞬间气体立刻达到准静态并保持到下一次活塞开合或气体爆燃。进气口 A 与装有压强为  $p_1$ ，温度为  $T_1$  的柴油空气混合气体的无限大气缸相连，其中柴油的体积占比为  $a$ ，受驾驶员控制，在本题中保持不变。活塞通过连杆带动飞轮，使飞轮不断转动。飞轮通过一个传动装置与车轮相连，传动比为  $\alpha$ （即车轮角速度与飞轮角速度之比为  $\alpha$ ）。

气缸的最大体积为  $V_0$ ，每个工作周期中的气缸排量（即排出的废气体积，在本题中认为就是活塞移动的距离对应的体积）为  $V$ 。出气口 B 直接与大气相连，大气压强为  $p_0$ ，温度为  $T_0$ ，可看作氧气与氮气的混合物，氧气体积占比为 21%。满足  $p_0 \approx p_1$ ，故进气和排气冲程不做功。

气缸中的混合气体恰好在气缸被压缩到体积最小时发生爆燃。已知在爆燃过程中柴油分子  $C_nH_m$  与空气中的氧气发生反应  $C_nH_m + \left(n + \frac{1}{4}m\right)O_2 = nCO_2 + \frac{1}{2}mH_2O$ 。 $m, n$  在本题中可以视为常数，且  $C_nH_m$ 、 $H_2O$  的分子构形并非直线形， $CO_2$  分子为直线形。临界压强和温度下每消耗一摩尔  $C_nH_m$  内能变化量为  $\Delta U$ ，轮胎半径为  $r$ ，设每次爆燃均能耗尽柴油分子  $C_nH_m$  且气缸内各成分均为气态。

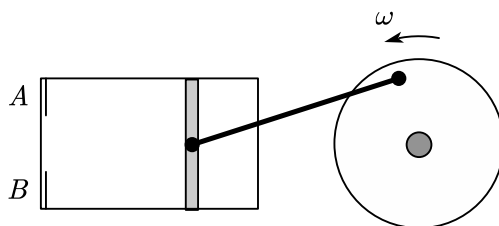


图 7.1 飞轮连接传动装置

请在答题卡第 7 页作答第 (1)、(2.1) 及 (2.2) 问

(1) 定量描述柴油机四个冲程中气缸内气体的压强和温度的变化情况。（只需写出大致过程

方程和变化趋势即可，不用计算具体参数，可以保留各过程气体的比热容比  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  但必须注明其对应的过程。）

(2) 先考虑车辆在地面上行驶且飞轮匀速转动时的情形，飞轮的角速度恒为  $\omega$ 。

(2.1) 求爆燃前混合气体的温度  $T$  和压强  $p$ 。

(2.2) 求爆燃后气体的温度和压强，并求出柴油机稳定工作时的平均功率。

**请在答题卡第 8 页作答第 (2.3) (3) 两问**

(2.3) 假设阻力矩  $\tau$  仅分别作用于两前轮（两非驱动轮），且与飞轮角速度  $\omega$  成正比： $\tau = \beta\omega$ ， $\beta$  已知。求稳定时飞轮角速度  $\omega$  与柴油体积占比  $a$  的关系。假设飞轮连接的传动装置无能量损耗。（此问为了简便可以将  $a$  看作一个小量，舍去高阶项，并且将指数里的  $a$  去掉。）

提示：为了简化表达式，在本问和下一问中，你可以引入无量纲参数  $A$ ，满足

$$A = \left[ \left( \frac{V_0}{V_0 - V} \right)^{\frac{2}{5}} - 1 \right] \left[ \frac{\Delta U}{RT_1} \left( \frac{V_0 - V}{V_0} \right)^{\frac{2}{5}} - 3 + \frac{7}{8}m \right] \quad (7.1)$$

(3) 接上问存在阻力矩的情况，再考虑车辆加速上坡的情形。坡道与水平面夹角为  $\theta$ ，重力加速度为  $g$ 。初始（ $t = 0$  时）飞轮角速度为  $\omega_0$  小于上问中求出的  $\omega$  且飞轮角速度开始增加。车辆总质量为  $M$  远远大于轮胎、飞轮和各种传动装置的质量，求飞轮角速度  $\omega$  与时间  $t$  的关系  $\omega(t)$ 。

解：(1) 进气过程中气体压强和温度不变

$$p = p_1, T = T_1 \quad (1)$$

压缩混合气时气体压强温度增大

$$\frac{p^{\gamma_1-1}}{T^{\gamma_1}} = \frac{p_1^{\gamma_1-1}}{T_1^{\gamma_1}} \quad (2)$$

其中  $\gamma_1 = \frac{c_{p1}}{c_{v1}}$  为刚进入气缸的混合气的比热容比。爆燃瞬间气体体积不变，温度上升至  $T'_1$ ，

压强上升至  $p'_1$ 。此后对外做功时气体压强温度减小

$$\frac{p^{\gamma_2-1}}{T^{\gamma_2}} = \frac{p_1'^{\gamma_2-1}}{T_1'^{\gamma_2}} \quad (3)$$

其中  $\gamma_2 = \frac{c_{p2}}{c_{v2}}$  为爆燃后混合气的比热容比。排出废气时一瞬间缸内气体与外界气体达到平衡，

此后气体压强温度不变

$$p = p_0, T = T_0 \quad (4)$$

(2)

(2.1) 平均定压摩尔热容和定容摩尔热容分别为

$$C_{pm1} = \left[ 4a + \frac{7}{2}(1-a) \right] = (3.5 + 0.5a)R, C_{vm1} = (2.5 + 0.5a)R \quad (5)$$

因此比热容比

$$\gamma_1 = \frac{C_{p1}}{C_{v1}} = \frac{C_{pm1}}{C_{vm1}} = \frac{7+a}{5+a} \quad (6)$$

由于气缸绝热，

$$p_1 V_0^{\frac{7+a}{5+a}} = p(V_0 - V)^{\frac{7+a}{5+a}}, T_1 V_0^{\frac{2}{5+a}} = T(V_0 - V)^{\frac{2}{5+a}} \quad (7)$$

因此，

$$p = p_1 \left( \frac{V_0}{V_0 - V} \right)^{\frac{7+a}{5+a}}, T = T_1 \left( \frac{V_0}{V_0 - V} \right)^{\frac{7+a}{5+a}} \quad (8)$$

(2.2) 爆燃前  $C_nH_m$  分子的摩尔数为  $\nu = \frac{ap_1V_0}{RT_1}$ , 因此

$$Q = \nu \Delta U = \frac{ap_1V_0\Delta U}{RT_1} \quad (9)$$

注意  $Q$  就是爆燃后气体在体积不变的情况下相比  $T$  状态下的对应气体的内能的增加量, 即

$$Q = C_{v2}\Delta T, \Delta T = T'_1 - T \quad (10)$$

爆燃后, 气体成分为

$$\begin{aligned} \nu_{N_2} &= \frac{79\%(1-a)p_1V_0}{RT_1}, \nu_{O_2} = \frac{21\%(1-a)p_1V_0}{RT_1} - \frac{\left(n + \frac{1}{4}m\right)ap_1V_0}{RT_1} \\ \nu_{CO_2} &= \frac{narp_1V_0}{RT_1}, \nu_{H_2O} = \frac{map_1V_0}{2RT_1}, \nu_{C_nH_m} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

于是

$$\begin{aligned} C_{v2} &= \frac{5(1-a)p_1V_0}{2T_1} - \frac{5\left(n + \frac{1}{4}m\right)ap_1V_0}{2T_1} + \frac{5narp_1V_0}{2T_1} + \frac{3map_1V_0}{2T_1} \\ &= \frac{p_1V_0}{T_1} \left[ \frac{5}{2} - \left( \frac{5}{2} - \frac{7}{8}m \right) a \right] \end{aligned} \quad (12)$$

于是

$$\Delta T = \frac{a\Delta U}{\left[ \frac{5}{2} - \left( \frac{5}{2} - \frac{7}{8}m \right) a \right] R} \quad (13)$$

因此

$$T'_1 = \frac{a\Delta U}{R \left[ \frac{5}{2} - \left( \frac{5}{2} - \frac{7}{8}m \right) a \right]} + T_1 \left( \frac{V_0}{V_0 - V} \right)^{\frac{2}{5+a}} \quad (14)$$

又因为

$$p'_1(V_0 - V) = \nu'RT'_1 \quad (15)$$

$\nu'$  为爆燃后气体分子总摩尔数

$$\nu' = \frac{p_1V_0}{RT_1} \left( 1 - a + \frac{1}{4}am \right) \quad (16)$$

于是

$$p'_1 = \frac{p_1V_0}{T_1(V_0 - V)} \left( 1 - a + \frac{1}{4}am \right) \left[ \frac{a\Delta U}{R \left[ \frac{5}{2} - \left( \frac{5}{2} - \frac{7}{8}m \right) a \right]} + T_1 \left( \frac{V_0}{V_0 - V} \right)^{\frac{2}{5+a}} \right] \quad (17)$$

每个工作周期内, 只有压缩过程和对外做功的过程中气缸活塞体系会与飞轮轮胎体系通过做功的方式发生能量交换。又因为气缸绝热, 因此气体做的功与内能变化量大小相等符号相反。在压缩冲程中,

$$W_1 = -\Delta U_1 = -(2.5 + 0.5a)p_1V_0 \left[ \left( \frac{V_0}{V_0 - V} \right)^{\frac{2}{5+a}} - 1 \right] \quad (18)$$

在做功冲程中,

$$\begin{aligned}
 W_2 = -\Delta U_2 &= \frac{p_1 V_0 T_1'}{T_1} \left[ \frac{5}{2} - \left( \frac{5}{2} - \frac{7}{8}m \right) a \right] \left[ 1 - \left( \frac{V_0 - V}{V_0} \right)^{\frac{2 - (2 - \frac{1}{2}m)a}{5 - (5 - \frac{7}{4}m)a}} \right] \\
 &= p_1 V_0 \left[ \frac{5}{2} - \left( \frac{5}{2} - \frac{7}{8}m \right) a \right] \left[ 1 - \left( \frac{V_0 - V}{V_0} \right)^{\frac{2 - (2 - \frac{1}{2}m)a}{5 - (5 - \frac{7}{4}m)a}} \right] \left\{ \frac{a \Delta U}{RT_1 \left[ \frac{5}{2} - \left( \frac{5}{2} - \frac{7}{8}m \right) a \right]} + \left( \frac{V_0}{V_0 - V} \right)^{\frac{2}{5+a}} \right\} \quad (19)
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 W &= W_1 + W_2 \\
 &= p_1 V_0 \left[ \frac{5}{2} - \left( \frac{5}{2} - \frac{7}{8}m \right) a \right] \left[ 1 - \left( \frac{V_0 - V}{V_0} \right)^{\frac{2 - (2 - \frac{1}{2}m)a}{5 - (5 - \frac{7}{4}m)a}} \right] \left\{ \frac{a \Delta U}{RT_1 \left[ \frac{5}{2} - \left( \frac{5}{2} - \frac{7}{8}m \right) a \right]} + \left( \frac{V_0}{V_0 - V} \right)^{\frac{2}{5+a}} \right\} \\
 &\quad - (2.5 + 0.5a) p_1 V_0 \left[ \left( \frac{V_0}{V_0 - V} \right)^{\frac{2}{5+a}} - 1 \right] \quad (20)
 \end{aligned}$$

整个过程经过时间

$$T = \frac{4\pi}{\omega} \quad (21)$$

又因为系统各处光滑无摩擦损耗，柴油机平均输出功率就是气体做功的平均功率，于是

$$P = \frac{W}{T} = \frac{\omega W}{4\pi} \quad (22)$$

其中 $W$ 按(20)式确定。

(2.3) 忽略 $W$ 的指数中的 $a$ 并进行小量展开

$$\begin{aligned}
 W &= p_1 V_0 \left[ \frac{5}{2} - \left( \frac{5}{2} - \frac{7}{8}m \right) a \right] \left[ 1 - \left( \frac{V_0 - V}{V_0} \right)^{\frac{2}{5}} \right] \left\{ \frac{a \Delta U}{RT_1 \left[ \frac{5}{2} - \left( \frac{5}{2} - \frac{7}{8}m \right) a \right]} + \left( \frac{V_0}{V_0 - V} \right)^{\frac{2}{5}} \right\} \\
 &\quad - (2.5 + 0.5a) p_1 V_0 \left[ \left( \frac{V_0}{V_0 - V} \right)^{\frac{2}{5}} - 1 \right] \\
 &= \frac{5}{2} p_1 V_0 \left( \frac{V_0}{V_0 - V} \right)^{\frac{2}{5}} \left[ 1 - \left( \frac{V_0 - V}{V_0} \right)^{\frac{2}{5}} \right] \left[ 1 - \left( 1 - \frac{7}{20}m \right) a \right] \left[ 1 + \frac{2 \Delta U}{5 RT_1} \left( \frac{V_0 - V}{V_0} \right)^{\frac{2}{5}} a \right] \\
 &\quad - (2.5 + 0.5a) p_1 V_0 \left[ \left( \frac{V_0}{V_0 - V} \right)^{\frac{2}{5}} - 1 \right] \\
 &= a p_1 V_0 \left[ \left( \frac{V_0}{V_0 - V} \right)^{\frac{2}{5}} - 1 \right] \left[ \frac{\Delta U}{RT_1} \left( \frac{V_0 - V}{V_0} \right)^{\frac{2}{5}} - 3 + \frac{7}{8}m \right] = a p_1 V_0 A \quad (23)
 \end{aligned}$$

其中 $A$ 是提示里设出的无量纲参数。于是功率

$$P = \frac{\omega a p_1 V_0}{4\pi} A \quad (24)$$

考虑到轮胎的角速度是飞轮角速度的 $\alpha$ 倍，于是作用于每个前轮的阻力矩产生的功率为

$$P_f = \alpha \omega \tau = \alpha \beta \omega^2 \quad (25)$$

因为传动装置无损耗且车辆稳定前进

$$P = 2P_f \quad (26)$$

于是得到

$$\omega = \frac{ap_1V_0}{8\pi\alpha\beta}A \quad (27)$$

(3) 重力做负功功率

$$P_G = Mgv \sin \theta = Mg\alpha\omega r \sin \theta \quad (28)$$

动能增加率

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}Mv^2\right)}{dt} = M\alpha^2r^2\omega \frac{d\omega}{dt} \quad (29)$$

满足能量关系

$$P - 2P_f - P_G = \frac{dE_k}{dt} \quad (30)$$

于是 $\omega$ 满足微分方程

$$\frac{ap_1V_0\omega}{4\pi}A - 2\alpha\beta\omega^2 - Mg\alpha\omega r \sin \theta = M\alpha^2r^2\omega \frac{d\omega}{dt} \quad (31)$$

根据初始条件 $t = 0$ 时 $\omega = \omega_0$ 解方程得到

$$\omega = \left(\omega_0 + \frac{Mgr}{2\beta} \sin \theta - \frac{ap_1V_0A}{8\pi\alpha\beta M}\right)e^{-\frac{2\beta}{Mar^2}t} - \frac{Mgr}{2\beta} \sin \theta + \frac{ap_1V_0A}{8\pi\alpha\beta M} \quad (32)$$

其中

$$A = \left[\left(\frac{V_0}{V_0 - V}\right)^{\frac{2}{5}} - 1\right] \left[\frac{\Delta U}{RT_1} \left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right)^{\frac{2}{5}} - 3 + \frac{7}{8}m\right]$$

评分标准：本题满分 60 分。

第 (1) 问 6 分：(1) 式 1 分，(2) (3) 式各 2 分，(4) 式 1 分

第 (2) 问 44 分：

第 (2.1) 小问 8 分：(5) (6) (7) (8) 式各 2 分；

第 (2.2) 小问 24 分：(9) (10) 式各 1 分，(11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18)

(19) (20) 式各 2 分，(21) (22) 式各 1 分；

第 (2.3) 小问 12 分：(23) 式 4 分，(24) (25) (26) (27) 式各 2 分；

第 (3) 问 10 分：(28) (29) (30) (31) (32) 式各 2 分。

## 版权信息

## 命题人

曹云博 傅知远 任宇桐 魏哲宇 吴翔宇 吴弈笛 熊程宇

## 审题人

曹云博 付亦轩 傅知远 李天笑 任宇桐 王玮珂 魏哲宇 吴翔宇 吴弈笛  
吴愉轩 熊程宇 张行健

## 联系方式

微信公众号  
CPHOS官方网站  
[www.cphos.cn](http://www.cphos.cn)CPHOS 论坛  
[cphos.cn/index.php/community](http://cphos.cn/index.php/community)

邮箱

[service@cphos.cn](mailto:service@cphos.cn)

微信小程序

CPHOS 物理竞赛联考

